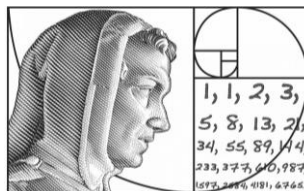

ENSINO FUNDAMENTAL – 8º ANO – MATEMÁTICA VOLUME 1

Apostila do 8º ano do Ensino Fundamental, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



MATEMÁTICA



AULA 03

CONJUNTO DOS RACIONAIS

Definição: Número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Exemplos:

1. $5 = \frac{5}{1}$

2. $-2 = -\frac{2}{1}$

3. $0,7 = \frac{7}{10}$

4. $2,83 = \frac{283}{100}$

5. $0,444... = \frac{4}{9}$

6. $0,727272... = \frac{72}{99}$

O símbolo do Conjunto dos Racionais é a letra $\mathbb{Q}$, pois, por definição, os racionais são representados por uma divisão, e o resultado de toda divisão é chamado quociente. Por este motivo, a letra $\mathbb{Q}$ foi escolhida para representar o conjunto, pois é a primeira letra da palavra quociente.

Desse modo, temos que a operação da divisão é fechada no conjunto dos Números Racionais.

Observação: Todo número inteiro é um número racional. (exemplos 1 e 2)

Observação: Toda decimal exata é um número racional. (exemplos 3 e 4)

Observação: Toda dízima periódica é um número racional. (exemplos 5 e 6)

Diante dos exemplos e das observações, temos que o Conjunto dos Racionais é formado por três subconjuntos: números inteiros, decimais exatos e dízima periódica.

DECIMAIS EXATOS

Definição: Os decimais exatos são todos os números que podem ser escritos como uma fração cujo denominador é uma potência de base 10.

Exemplos:

$$1. 0,5 = \frac{5}{10}$$

$$2. -0,02 = -\frac{2}{100}$$

$$3. 4,7 = \frac{47}{10}$$

Observação: Sendo uma potência de 10, significa que o denominador é 10, 100, 1000, 10 000, etc.

Ao fatorarmos potências de base 10 iremos nos deparar com fatores 2 e 5 somente. Por isso, dizemos que, se analisarmos uma fração irredutível, e o denominador dessa fração possuir somente fatores 2 e 5, essa fração será um decimal exato, mesmo não tendo um denominador como potência de base 10.

Exemplos:

1. A fração $17/20$ é um decimal exato, pois, é uma fração irredutível e o denominador é 20. Ao fatorarmos o denominador, temos que $20=2^2 \cdot 5$, isto é, o denominador 20 só possui fatores 2 e 5.

2. A fração $5/6$ não é um decimal exato, pois, é uma fração irredutível e possui fatores 2 e 3 no denominador.

DÍZIMA PERIÓDICA

Definição: Dízima periódica são todos os números racionais que escritos como decimais são infinitos e apresentam um período de um ou mais algarismos.

Observação: Em uma dízima periódica, o algarismo ou algarismos que se repetem infinitamente, constituem o período dessa dízima.

Exemplos:

$$0,333... = 0,\bar{3} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{Dízima periódica de período 3.}$$

$$1,0282828... = 1,0\overline{28} = \frac{1018}{990} = \frac{509}{495} \rightarrow \text{Dízima periódica de período 28.}$$

Observação: A barra acima do número indica que ele se repetirá infinitamente, ou seja, que esse número é o período da dízima periódica.

As dízimas periódicas podem ser divididas de duas formas: dízimas periódicas simples e dízimas periódicas compostas.

DÍZIMA PERIÓDICA SIMPLES

Nas **dízimas periódicas simples**, o período apresenta-se logo após a vírgula.

Exemplos

$$\frac{5}{9} = 0,555 \dots = 0, \overline{5} \quad \text{Dízima periódica de período } 5.$$

$$\frac{7}{3} = 2,333 \dots = 2, \overline{3} \quad \text{Dízima periódica de período } 3.$$

$$\frac{20}{27} = 0,740740740 \dots = 0, \overline{740} \quad \text{Dízima periódica de período } 740.$$

DÍZIMA PERIÓDICA COMPOSTA

Nas **dízimas periódicas compostas**, entre o período e a vírgula existe uma parte não periódica.

Exemplos

$$\frac{1}{45} = 0,0222 \dots = 0,0\overline{2} \quad \text{Dízima periódica de período } 2.$$

$$\frac{1039}{900} = 1,15444 \dots = 1,15\overline{4} \quad \text{Dízima periódica de período } 4.$$

$$\frac{61}{495} = 0,1232323 \dots = 0,1\overline{23} \quad \text{Dízima periódica de período } 23.$$

Observações: Consideramos parte não periódica de uma dízima o termo situado entre a vírgula e o período.

Perceba que as dízimas periódicas não podem ser escritas como uma fração de base 10 como os decimais exatos, e, portanto, se torna mais complicado encontrar a fração que gera este número.

$$\frac{7}{10} = 0,7 \quad \frac{77}{100} = 0,77 \quad \frac{777}{1000} = 0,777$$

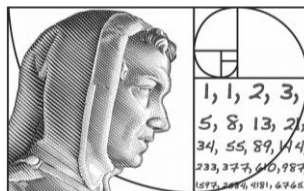
Fariamos este processo infinitas vezes e ainda não seria o suficiente para expressar este número. Mais adiante aprenderemos a como encontrar as frações que geram as dízimas periódicas.

Em uma reta numérica envolvendo números racionais, temos as seguintes afirmações:

- 1ª. Entre os números naturais existem infinitos números racionais.
- 2ª. Entre os números inteiros existem infinitos números racionais.
- 3ª. Entre os números racionais existem infinitos números racionais.

ATIVIDADES

1. Defina o Conjunto dos Números Racionais.
2. Qual operação passou a ser fechada no Conjunto dos Racionais? Justifique.
3. Em uma fração, como podemos saber se ela será um decimal exato ou uma dízima periódica?
4. Transforme os decimais exatos em frações irredutíveis.
 - a. 4,05
 - b. 0,08
 - c. 7,5
 - d. 0,64
 - e. 0,148
 - f. 22,468
 - g. 13,576
5. Transforme as frações em decimais exatos.
 - a. $\frac{95}{10}$
 - b. $\frac{14}{100}$
 - c. $\frac{53}{1000}$
 - d. $\frac{1}{1000}$
 - e. $\frac{24}{5}$
 - f. $\frac{17}{20}$
 - g. $\frac{17}{25}$
6. Escreva o período das dízimas abaixo:
 - a. 14,787878...
 - b. 1,46333...
 - c. 514,8145145145...
7. Defina dízima periódica e diga como podemos classificá-las, dando dois exemplos de cada.
8. Dadas as frações abaixo, classifique, sem realizar as divisões, quais números são decimais exatos e quais não são:
 - a) $\frac{7}{4}$
 - b) $\frac{7}{35}$
 - c) $-\frac{45}{60}$
 - d) $\frac{8}{15}$
 - e) $\frac{100}{27}$
 - f) $\frac{15}{35}$
 - g) $\frac{84}{14}$
 - h) $\frac{39}{6}$



AULA 07

PORCENTAGEM



nessa Aula faremos uma revisão do conteúdo de porcentagem.

Em alguns livros, a palavra porcentagem pode aparecer como percentagem ou percentual ou porcentual. Nessa Aula usaremos o termo porcentagem.

A palavra porcentagem deriva do latim per centum, que quer dizer por um cento, isto é, dividido por cem.

A porcentagem faz parte do nosso cotidiano, especialmente nos descontos concedidos em compras, nos juros das prestações, nos dados estatísticos, etc.

A porcentagem recebeu um símbolo que passou por várias modificações ao longo dos anos, até que em 1925, D. E. Smith padronizou o símbolo de porcentagem, como sendo %. Para indicarmos qualquer porcentagem devemos representar o número acompanhando do símbolo % e a isso chamamos de taxa porcentual.

Exemplos

$$1. 30\% = 30 \text{ por cento} = 30 \text{ por } 100 = \frac{30}{100}.$$

$$2. 45\% = \frac{45}{100}.$$

$$3. 115\% = \frac{115}{100}.$$

$$4. 8\% = \frac{8}{100}.$$

$$5. 26\% = \frac{26}{100}.$$

$$6. 300\% = \frac{300}{100}.$$

$$7. 0,9\% = \frac{0,9}{100} = \frac{9}{1000}.$$

Na etimologia da palavra porcentagem fica evidente que existe uma relação da taxa porcentual com a fração centesimal, como podemos comprovar nos exemplos.

A fração centesimal está totalmente relacionada com a fração irredutível e o valor decimal.

A relação da fração centesimal com a fração irredutível ocorre, pois, geralmente a fração centesimal pode ser simplificada e com isso, transformada em uma fração irredutível, se ela não puder ser simplificada significa que a fração centesimal é propriamente a fração irredutível.

A relação entre fração centesimal e valor decimal ocorre, pois, ao dividirmos o numerador pelo denominador da fração centesimal, aparecerá um valor decimal.

Desta forma, iremos relacionar a fração centesimal, fração irredutível e o valor decimal com a taxa percentual.

Exemplos

1. Vejamos uma tabela relacionando taxa percentual, fração centesimal, fração irredutível e valor decimal.

Taxa Percentual	Fração Centesimal	Fração Irredutível	Valor Decimal
150%	$\frac{150}{100}$	$\frac{3}{2}$	1,5
100%	$\frac{100}{100}$	$\frac{1}{1}$	1
75%	$\frac{75}{100}$	$\frac{3}{4}$	0,75
50%	$\frac{50}{100}$	$\frac{1}{2}$	0,5
30%	$\frac{30}{100}$	$\frac{3}{10}$	0,3
25%	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$	0,25
10%	$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{10}$	0,1
5%	$\frac{5}{100}$	$\frac{1}{20}$	0,05
2%	$\frac{2}{100}$	$\frac{1}{50}$	0,02
1%	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	0,01

Observação: A taxa percentual de 100% representa o todo.

Observação: A taxa percentual de 50% representa a metade do todo.

Observação: A taxa percentual de 25% representa a metade da metade do todo.

Observação: A taxa percentual de 10% representa a décima parte do todo.

Observação: A taxa porcentual de 1% representa a centésima parte do todo.

Exemplos

1. 100% de 180 é 180, pois 100% representa o todo.
2. 50% de 180 é 90, pois 50% representa metade do todo.
3. 25% de 180 é 45, pois 25% representa a metade da metade do todo.
4. 10% de 180 é 18, pois 10% representa a décima parte do todo.
5. 1% de 180 é 1,8, pois 1% representa a centésima parte do todo.

PORCENTAGEM DE UM VALOR

As porcentagens são todas calculadas em relação a algum valor.

Exemplos

1. 80% de 500.
2. 95% de 50.
3. 2% de 300.
4. 80% de 10.

Observação: Notem que os exemplos 1 e 4 possuem a mesma taxa porcentual que é 80%, porém, os valores são diferentes. Logo, as porcentagens dos exemplos 1 e 4 serão diferentes, mesmo tendo a mesma taxa porcentual e isto ocorre, pois, a porcentagem é um valor relativo e não um valor absoluto.

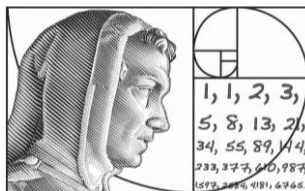
As formas para calcular as porcentagens serão estudadas na próxima Aula.

ATIVIDADES

1. Defina porcentagem.
2. Por que porcentagens são valores relativos e não absolutos?
3. Complete a tabela abaixo:

Taxa Porcentual	Fração Centesimal	Fração Irredutível	Valor Decimal
90%	$\frac{90}{100}$	$\frac{9}{10}$	0,9
	$\frac{32}{100}$		
87%			0,87
			0,25
	$\frac{3}{100}$		
	$\frac{7}{100}$		
		$\frac{3}{20}$	
			0,006

4. Complete as frases:
 - a. Calcular 25% de um valor é o mesmo que dividir esse número por ____.
 - b. Calcular ____ de um valor é o mesmo que dividir esse número por 5.
 - c. Calcular 1% de um valor é o mesmo que dividir esse número por ____
 - d. Calcular ____ de um valor é o mesmo que dividir esse número por 10.
 - e. Calcular ____ de um valor é o mesmo que dividir esse número por 2.



AULA 11

APROXIMAÇÃO DE VALORES DOS NÚMEROS IRRACIONAIS



s números irracionais, por definição, são dízimas não periódicas, isto é, são números infinitos sem repetição. A partir dessa definição, será que conseguimos operar os números irracionais de uma forma precisa?

A resposta a essa pergunta é não, pois, os números irracionais são infinitos e sem período, assim, fica impossível operar com os números irracionais de uma forma precisa. Para isso, devemos encontrar valores aproximados aos números irracionais e esse processo de aproximação recebe o nome de arredondamento ou aproximação de valores.

Além disso, para representarmos os números irracionais em uma reta numérica, devemos arredondá-los.

Para arredondarmos um número irracional devemos seguir a regra de arredondamento.

REGRAS PARA O ARREDONDAMENTO

1ª. Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for inferior a 5, o último algarismo a ser conservado permanecerá sem modificação.

2ª. Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for superior a 5, ou, sendo 5, for seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero, o último algarismo a ser conservado deverá ser aumentado de uma unidade.

Exemplos

1. Seja dado o número irracional a tal que $a=19,758943761053...$ arredonde com uma casa decimal o número a .

Resolução: Pela regra de arredondamento, se iremos arredondar com uma casa decimal, devemos observar o algarismo seguinte à primeira casa, isto é, devemos analisar a segunda casa decimal, que neste caso é o algarismo 5. Com isso, utilizando a segunda regra, temos que:

$$a = 19,7\textcolor{red}{5}8943761053\dots$$

$$a \cong 19,8$$

2. Seja dado o número irracional b tal que $b = 45,293741296\dots$ arredonde com duas casas e três casas decimais o número b .

Resolução: Primeiramente iremos arredondar com duas casas decimais e depois com três casas.

Duas casas decimais: no arredondamento com duas casas decimais devemos observar o algarismo da terceira casa decimal.

$$b = 45,29\textcolor{red}{3}741296\dots$$

$$b \cong 45,29$$

Três casas decimais: no arredondamento com três casas decimais devemos observar o algarismo da quarta casa decimal.

$$b = 45,293\textcolor{red}{7}41296\dots$$

$$b \cong 45,294$$

3. Seja dado o número irracional c tal que $c = 578,961964138624\dots$ arredonde com quatro casas decimais o número c .

Resolução: No arredondamento com quatro casas decimais devemos observar o algarismo da quinta casa decimal.

$$c = 578,9619\textcolor{red}{6}4138624\dots$$

$$c \cong 578,9620$$

ATIVIDADES

1. Calcule as operações utilizando aproximações com três casas decimais.

(Utilize $\sqrt{10} = 3,16227766016838\dots$ e $\sqrt{7} = 2,64575131106459059050\dots$) a.

$$\sqrt{10} + \sqrt{10}$$

b. $\sqrt{10} - \sqrt{7}$

c. $\sqrt{10} + \sqrt{7}$

d. $\sqrt{7} + \sqrt{7}$

e. $\sqrt{7} - \sqrt{10}$

2. Calcule utilizando aproximações com duas casas decimais.

(Utilize $\sqrt{3} = 1,732050807\dots$ e $\sqrt{11} = 3,31662479\dots$)

a. $3\sqrt{3}$

b. $\frac{\sqrt{11}}{4}$

c. $\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{11}$

d. $\sqrt{3}$.e) $\sqrt{11}$

3. Arredonde os seguintes valores para uma casa decimal, duas casas decimais, três casas decimais e 4 casas decimais:

a. 9,987654...

b. 2,5164798624...

c. 3,1470953462854...

4. Calcule utilizando aproximações com duas casas decimais.

(Utilize $\pi = 3,141592653589...$ $e = 2,718281828459...$),

$\sqrt{2} = 1,414213562373...$ e $\sqrt{5} = 2,236067977499...$)

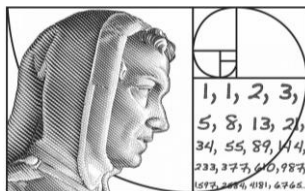
a. $\pi + 4e$

b. $\pi + \sqrt{2} - \sqrt{5}$

c. $e + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \pi$

d. $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$

e. $\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 3\sqrt{5} + 6e - \sqrt{2}$



AULA 16

VERIFICAÇÃO DO VOLUME 1

ORIENTAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO DA VERIFICAÇÃO

Caríssimos educadores e estudantes,

Salve Maria!

Estamos enviando, juntamente com este conteúdo, uma avaliação referente aos conteúdos aprendidos no volume 1. Fiquem atentos às recomendações:

1º Uma avaliação é um documento. Por isso, é importante fazê-la em uma folha de papel almaço e armazená-la separadamente para autenticação dos estudos.

2º Separe um tempo só para a resolução da avaliação.

3º Educador: Peça ao estudante que não consulte nenhum material no momento da resolução, pois é o momento de verificar o que ele realmente aprendeu.

4º Estudante: Faça uma oração antes de iniciar a avaliação pedindo que o Santo Espírito o conduza, que seu Anjo o lembre de tudo o que foi aprendido e que Maria Santíssima possa receber os méritos de seu aprendizado.

5º Depois de acabar a resolução, confira-a com o gabarito. As respostas que estiverem erradas deverão ser corrigidas no caderno, e o estudante deverá voltar a estudar o conteúdo para aprendê-lo melhor.

Boa avaliação!

VERIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA DO 8º ANO VOLUME 1

1. Sobre os conjuntos numéricos responda:
 - a. Defina os Conjuntos Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais e dê dois exemplos de cada conjunto.
 - b. Quais são os símbolos utilizados para representar cada um deles?
 - c. O que significa ser uma operação fechada em conjunto? E quais operações são fechadas nos conjuntos estudados até o momento?
2. Toda dízima periódica simples ou dízima periódica composta é:
 - a. Número inteiro.
 - b. Número racional.
 - c. Número irracional.
 - d. Nenhuma das anteriores.
3. Indique o período de cada dízima e encontre a fração geratriz de cada uma:
 - a. 5,282828...
 - b. 10,24444...
 - c. 1,9123123123...
4. Em um país, a taxa de imposto de renda é de 10% para os primeiros R\$ 20.000,00 de renda, 20% para a renda entre R\$ 20.001,00 e R\$ 50.000,00 e 30% para a renda acima de R\$50.000,00. Se alguém ganha R\$ 70.000,00, quanto pagará de imposto de renda?
5. Uma casa foi originalmente avaliada por R\$ 500.000,00. Depois de 6 meses no mercado, o preço foi reduzido em 15%. Após essa redução, o proprietário aceitou uma oferta de R\$ 395.000,00. Qual foi a porcentagem de desconto da oferta em relação ao preço original?
6. Ana devia, em seu cartão de crédito, R\$ 3000,00. Como não conseguiu pagar, em dois meses essa dívida aumentou para R\$ 3450,00. Nesse caso, qual foi a taxa de juros simples cobrada mensalmente pelo cartão de crédito?
7. Pedro aplicou um capital de R\$ 7200,00, à taxa de 4,2% a.a. e, após certo tempo obteve R\$ 1512,00 de juros. De quanto tempo foi esta aplicação?
8. Calcule utilizando aproximações com três casas decimais.
(Utilize $\sqrt{3} = 1,732050807...$ e $\sqrt{11} = 3,31662479...$)
 - a. $\sqrt{3} + \sqrt{11}$
 - b. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\frac{\sqrt{11}}{5} - \sqrt{11}$

d. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11} - (\sqrt{3})^2$

9. Determine a raiz quadrada exata ou aproximada das raízes abaixo:

a. $\sqrt{1369}$

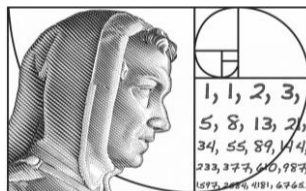
b. $\sqrt{7225}$

c. $\sqrt{10609}$

d. $\sqrt{3257}$

e. $\sqrt{283042}$

10. Demonstre que a $\sqrt{2}$ é irracional.



AULA 19

RELAÇÕES DE ORDEM E DESIGUALDADES



O conjunto dos números reais não é diferente dos outros conjuntos numéricos, isto é, o conjunto dos $\mathbb{R}$ é ordenado. O símbolo $a \leq b$ significa que $a < b$ ou $a = b$. Esta relação de ordem satisfaz as seguintes propriedades:

O_1 : Lei da Tricotomia: Dados dois números reais quaisquer a e b tem-se que uma e somente uma possibilidade ocorre:

$$a < b \quad \text{ou} \quad a > b \quad \text{ou} \quad a = b.$$

O_2 : Propriedade Reflexiva: Para qualquer número real a tem-se $a \leq a$.

O_3 : Propriedade Antissimétrica: Dados dois números reais a e b tem-se:

$$\text{Se } a \leq b \text{ e } b \leq a \text{ então } a = b$$

O_4 : Propriedade Transitiva: Dados os números reais a, b e c , tem-se que:

$$\text{Se } a \leq b \text{ e } b \leq c \text{ então } a \leq c$$

O_5 : Monotonicidade da adição: Para quaisquer números reais a, b e c , tem-se que:

$$\text{Se } a \leq b \text{ então } a + c \leq b + c$$

O_6 : Monotonicidade da multiplicação: Se a, b e c são números reais tem-se que:

$$\text{Se } a \leq b \text{ e } 0 \leq c \text{ então } a \cdot c \leq b \cdot c$$

O_7 : Se a, b e c são números reais tem-se que:

$$\text{Se } a \leq b \text{ e } c \leq 0 \text{ então } a \cdot c \geq b \cdot c$$

O_8 : Se a, b e c são números reais tem-se que:

$$\text{Se } 0 < a \leq b \text{ então } 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

Observação: Uma relação satisfazendo as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva é chamada **relação de ordem**.

Observação: A notação $b \geq a$ significa $a \leq b$ e $b > a$ indica $a < b$.

Observação: Dizemos que um número real a é positivo se $a > 0$ e a é negativo se $a < 0$.

Observação: Se $a \geq 0$ dizemos também que a é não negativo e se $a \leq 0$ dizemos que a é não positivo.

Observação: Se $a < b$ e $b < c$, a propriedade transitiva nos permite escrever

$$a < b < c$$

Vejamos agora duas proposições que estão definidas nos reais e que possuem relação de ordem em sua afirmação:

Proposição 1: Seja a um número real. Então os seguintes resultados são válidos:

I. Se $a \leq 0$ então $-a \geq 0$

II. Se $a \geq 0$ então $-a \leq 0$

III. Para qualquer número real a temos que $a^2 \geq 0$.

Demonstração:

I. Se $a \leq 0$ podemos, utilizando a propriedade 0.5, somar $-a$ aos dois membros da equação, obtendo:

$$a \leq 0 \Rightarrow (-a) + a \leq (-a) + 0 \Rightarrow 0 \leq (-a) \Rightarrow -a \geq 0$$

II. A demonstração é análoga ao i.

III. Temos dois casos a considerar:

1º caso: se $a \geq 0$ podemos, utilizando a propriedade 0.6, multiplicar ambos os membros da desigualdade por a , obtendo:

$$a \geq 0 \Rightarrow a \cdot a \geq a \cdot 0 \Rightarrow a^2 \geq 0$$

2º caso: se $a \leq 0$ então $-a \geq 0$. Pelo caso anterior, temos que $(-a)^2 \geq 0$.

$$\text{Mas, } (-a)^2 = (-1)^2 a^2 = 1a^2 = a^2.$$

Logo, $a^2 \geq 0$.

Proposição 2: Se $a \leq b$ e $c \leq 0$ então $a \cdot c \geq b \cdot c$.

Demonstração: Se $c \leq 0$ então $-c \geq 0$. Assim, pela propriedade **0₆**, temos que:

$$a \cdot (-c) \leq b \cdot (-c) \Rightarrow -(a \cdot c) \leq -(b \cdot c)$$

Somando $a \cdot c + b \cdot c$ aos dois lados da desigualdade obtemos:

$$-(a \cdot c) + (a \cdot c + b \cdot c) \leq -(b \cdot c) + (a \cdot c + b \cdot c)$$

$$[-(a \cdot c) + a \cdot c] + b \cdot c \leq -(b \cdot c) + (b \cdot c + a \cdot c)$$

$$0 + b \cdot c \leq [-(b \cdot c) + b \cdot c] + a \cdot c$$

$$b \cdot c \leq 0 + a \cdot c$$

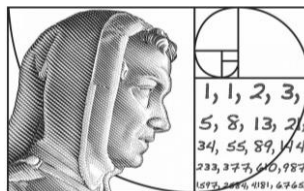
$$b \cdot c \leq a \cdot c$$

$$a \cdot c \geq b \cdot c$$

Portanto, se $a \leq b$ e $c \leq 0$ então $a \cdot c \geq b \cdot c$.

ATIVIDADES

1. Defina a lei da tricotomia e dê três exemplos numéricos.
2. Defina a propriedade reflexiva e dê três exemplos.
3. Defina a propriedade antissimétrica e dê três exemplos.
4. Defina a propriedade transitiva e dê três exemplos.
5. Defina a propriedade da monotonicidade da adição e dê três exemplos.
6. Defina a propriedade da monotonicidade da multiplicação e dê três exemplos.
7. Mostre que se $a \leq 0$ então $-a \geq 0$.
8. Mostre que se $a \geq 0$ então $-a \leq 0$.
9. Mostre que para qualquer número real a temos que $a^2 \geq 0$.
10. Mostre que se $a \leq b$ e $c \leq 0$ então $a \cdot c \geq b \cdot c$.



AULA 21

POTENCIAÇÃO COM NÚMEROS REAIS



esta aula, iniciaremos o estudo de potenciação com números reais examinando as potências onde a base pertence ao conjunto dos reais e o expoente é natural.

Definição: Potência é um produto de fatores iguais.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

O número real ***a*** é chamado **base da potência** e o número natural ***n*** é chamado **expoente da potência**.

Exemplos:

1. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
2. $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$
3. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
5. $(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$

Notem que, independentemente de o número real da base ser racional ou irracional, a definição de potência se aplica normalmente onde a base é o número que se repete em fatores e o expoente é a quantidade de fatores.

Com as potências de base real, teremos resultados positivos e negativos, como nos exemplos acima. Existe uma forma de prevermos se o resultado da potência de base real é positivo ou negativo apenas observando o expoente.

Definição: Quando o expoente for par, a potência de base real é um número positivo.

Exemplos:

1. $(+9)^4 = (+9) \cdot (+9) \cdot (+9) \cdot (+9) = +6561$
2. $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = +49$

$$3. \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{256}$$

$$4. (-\sqrt{2})^6 = (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) = +8$$

Definição: Quando o expoente for ímpar, a potência de base real tem o mesmo sinal da base.

Exemplos:

$$1. (+5)^5 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = +3125$$

$$2. (-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = -343$$

$$3. \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{243}$$

$$4. (\sqrt{11})^3 = \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = +1331$$

Podemos resumir em uma tabela quando o resultado da potência real é positivo ou negativo.

Potenciação com expoente par e ímpar	
Expoente par: resultado é positivo	$(+)^{par} = +$ $(-)^{par} = +$
Expoente ímpar: resultado tem o mesmo sinal da base	$(+)^{ímpar} = +$ $(-)^{ímpar} = -$

ATIVIDADES

1. Calcule:

a) 12^2

b) $(-4)^3$

c) $(-2)^5$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

f) $(\sqrt{11})^2$

g) $\left(-\frac{5}{4}\right)^4$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$

i) $(0,5)^{10}$

j) $(-10)^4$

k) 3^6

l) $(-1)^{84}$

m) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

n) $(-0,1)^2$

o) π^1

2. Calcule:

a) -2^7

b) 3^5

c) $(-2)^5$

d) -2^5

e) 2^8

f) $(-\sqrt{2})^8$

g) -2^8

h) $-(-3)^3$

i) $-(-7)^3$

j) $-(-[-1])^7$

3. Calcule

a) $\left(\frac{5}{8}\right)^2$

e) $\left(-\frac{23}{11}\right)^1$

i) $\left(\frac{7}{9}\right)^2$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

f) $\left(+\frac{7}{18}\right)^1$

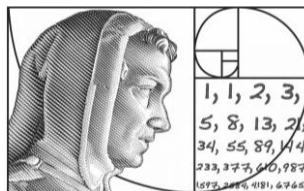
j) $\left(-\frac{15}{28}\right)^2$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^5$

g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$

d) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$

h) $\left(-\frac{6}{7}\right)^2$



AULA 25

POTÊNCIA DE EXPOENTE UM E EXPOENTE ZERO



esta aula, estudaremos duas propriedades de potências de base real: potências de expoente um e potências de expoente zero.

A propriedade de potência de expoente um e a propriedade de potência de expoente zero, sendo as duas propriedades potências de base real, são definidas igualmente as potências de base natural, inteira e racional.

POTÊNCIA DE EXPOENTE UM

Definição: Todo número real elevado ao expoente 1 é igual à própria base.

Exemplos:

1. $(-8)^1 = -8$

2. $19^1 = 19$

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \left(\frac{2}{3}\right)$

4. $(\sqrt{5})^1 = \sqrt{5}$

5. $0^1 = 0$

6. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$

A potência de expoente um é sempre igual à própria base, independentemente da base ser racional ou irracional, pois, pela definição de potência, o **expoente** é o número de vezes que repetimos a base. Logo, como o expoente é 1 iremos repetir uma única vez a base, resultando na própria base.

Observação: Não se esqueça que, quando tivermos um sinal negativo fora da base, devemos calcular primeiramente a potência e depois colocar o sinal negativo.

Exemplos:

$$1. -(\sqrt{7})^1 = -\sqrt{7}$$

$$2. -(-4)^1 = -(-4) = 4$$

$$3. -(-1)^1 = -(-1) = 1$$

$$4. -\left(\frac{1}{4}\right)^1 = -\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

POTÊNCIA DE EXPOENTE ZERO

Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 0$ temos que $a^0 = 1$.

Definição da propriedade de potência de expoente zero: todo número real diferente de zero, elevado ao expoente zero é igual a 1.

A demonstração dessa propriedade ocorre através da utilização da propriedade de divisão de potências de mesma base como veremos a seguir:

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos:

$$1. 1^0 = 1^{1-1} = \frac{1^1}{1^1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$2. (-1)^0 = (-1)^{3-3} = \frac{(-1)^3}{(-1)^3} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$3. \left(\frac{8}{15}\right)^0 = \left(\frac{8}{15}\right)^{1-1} = \frac{\left(\frac{8}{15}\right)^1}{\left(\frac{8}{15}\right)^1} = \frac{\left(\frac{8}{15}\right)}{\left(\frac{8}{15}\right)} = 1$$

$$4. \sqrt{2}^0 = (\sqrt{2})^{1-1} = \frac{\sqrt{2}^1}{\sqrt{2}^1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Observação: Não se esqueça que, quando tivermos um sinal negativo fora da base, devemos calcular primeiramente a potência e depois colocar o sinal negativo.

Exemplos:

$$1. -5^0 = -1$$

$$2. -(-15)^0 = 1$$

$$3. -(1)^0 = 1$$

$$4. -(\sqrt{4})^0 = -1$$

Observação: Notem que $-5^0 \neq (-5)^0$, pois na primeira potência a base é 5 e na segunda a base é -5 .

Observação: A potência 0^0 é considerada indeterminada em matemática. Em cálculo, como é uma expressão muito usada, ela é considerada, por convenção, como sendo igual a 1.

ATIVIDADES

1. Defina a propriedade do expoente 1.
2. Defina e demonstre a propriedade de expoente zero.
3. Calcule as potências:

a) 5^1

e) $(-17)^0$

i) 0^1

b) $(-3)^1$

f) $(-1)^0$

j) $(-25)^1$

c) $(-4)^1$

g) $(-1)^0$

k) $(-100)^0$

d) $(+6)^0$

h) $(+1)^0$

l) $(2024)^0$

4. Calcule:

a) $\left(\frac{7}{2}\right)^1$

f) $\left(-\frac{1}{5}\right)^0$

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{3}{1}\right)^{-1}$

g) $(\sqrt{5})^0$

l) $-(-\sqrt{2})^0$

c) $(\sqrt{2})^0$

h) $\left(\frac{5}{2}\right)^0$

m) $\left(\frac{2}{3}\right)^1$

d) $\left(-\frac{5}{14}\right)^1$

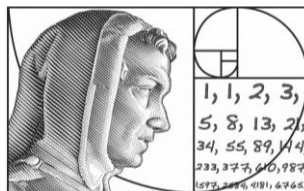
i) $(\sqrt{4})^1$

n) $\left(\frac{7}{5}\right)^1$

e) $(-\sqrt{3})^1$

j) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$

o) $(-\sqrt{3})^1$



AULA 29

NOTAÇÃO CIENTÍFICA COM EXPOENTES NEGATIVOS



esta aula, estudaremos a notação científica com expoentes negativos.

Primeiramente vamos relembrar a definição de notação científica.

Definição: Um número representado em notação científica é escrito sempre como um produto de um número a pôr uma potência de base 10, da seguinte forma:

$$a \cdot 10^n$$

Em que a é um número real tal que $1 \leq a < 10$ e n é um expoente inteiro.

Agora, vamos definir a notação científica com expoentes negativos:

Definição: A notação científica com expoentes negativos representa números extremamente pequenos.

Exemplos:

1. $0,01 = 1,0 \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-2}$.

2. $0,0003 = 3 \cdot 10^{-4}$.

3. $0,00000095 = 9,5 \cdot 10^{-7}$.

Como vimos na aula passada, em números extremamente grandes, o deslocamento da vírgula ocorre para a esquerda, para que tenhamos um coeficiente a que seja da seguinte forma: $1 \leq a < 10$. E com isso o expoente da potência de base 10 será positivo.

Agora, quando nos deparmos com números extremamente pequenos, o deslocamento da vírgula deverá ser para a direita, pois dessa forma conseguiremos obter um coeficiente a que seja $1 \leq a < 10$. Dessa forma, o expoente da potência de base 10 será negativo.

Vejamos um exemplo explicando como um número pequeno se transforma em notação científica com expoente negativo.

Exemplos:

1. O número 0,02 corresponde a notação $2 \cdot 10^{-2}$, vejamos como encontrar essa notação com alguns conceitos matemáticos.

$$0,02 = \frac{2}{100} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot \frac{1}{10^2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 2 \cdot 10^{-2}$$

Podemos escrever o número 0,02 em notação científica utilizando os passos estudados na aula passada. Vamos relembrar os passos:

1º passo: Estabeleça o coeficiente da notação científica respeitando a seguinte norma: $1 \leq a < 10$.

2º passo: Desloque a vírgula do número, de modo que encontremos o coeficiente estabelecido no 1º passo.

3º passo: Escreva o produto entre o número encontrado anteriormente e uma potência de base 10.

4º passo: Conte a quantidade de casas que a vírgula deslocou para definir o expoente da potência de base 10.

Observação: Se o deslocamento da vírgula for para a esquerda, o expoente é positivo; se o deslocamento da vírgula for para a direita, o expoente da potência de base 10 será negativo.

Exemplos:

1. Transforme o número 0,02 em notação científica.

Resolução: Primeiramente devemos estabelecer o coeficiente da notação científica. Neste exemplo, o coeficiente será 2, pois $1 \leq 2 < 10$.

Agora, iremos deslocar a vírgula de modo a encontrar o coeficiente e escrever o produto desse número com a potência de base 10.

$$0,02 = 0,020 = 002,0 \cdot 10 = 0,2 \cdot 10$$

Por fim, contaremos a quantidade de casas que a vírgula deslocou para definirmos o expoente da potência e como a vírgula andou para a direita então o sinal do expoente é negativo.

$$0,02 = 0,2 \cdot 10^{-2}$$

Portanto, a notação científica do número 0,02 é $0,2 \cdot 10^{-2}$.

2. Transforme o número 0,00045 em notação científica.

Resolução: O coeficiente do número 0,00045 será 4,5, pois $1 \leq 4,5 < 10$.

Assim, temos que:

$$0,00045 = 4,5 \cdot 10^{-4}$$

Portanto, a notação científica do número 0,00045 é $4,5 \cdot 10^{-4}$.

3. Transforme o número 0,123 em notação científica.

Resolução: O coeficiente do número 0,123 será 1,23, pois $1 \leq 1,23 < 10$.

Assim, temos que:

$$0,123 = 1,23 \cdot 10^{-1}$$

Portanto, a notação científica do número 0,123 é $1,23 \cdot 10^{-1}$.

4. Transforme o número 0,000000000876 para notação científica.

Resolução: O coeficiente do número 0,000000000876 será 8,76, pois:

$$1 \leq 8,76 < 10.$$

Assim, temos que:

$$0,000000000876 = 8,76 \cdot 10^{-10}$$

Portanto, a notação científica do número 0,000000000876 é $8,76 \cdot 10^{-10}$.

5. Encontre o número que representa a notação $2,44 \cdot 10^{-5}$.

Resolução: Primeiramente iremos transformar a potência em um número e depois multiplicamos essa transformação pelo coeficiente da notação.

$$2,44 \cdot 10^{-5} = 2,44 \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{2,44}{100\,000} = 0,0000244$$

Portanto, o número da notação científica $2,44 \cdot 10^{-5}$ é 0,0000244.

6. Encontre o número que representa a notação $9,8 \cdot 10^3$.

Resolução:

$$9,8 \cdot 10^3 = 9,8 \cdot 1000 = 9800$$

Portanto, o número da notação científica $9,8 \cdot 10^3$ é 9800.

As notações científicas ajudam nos cálculos matemáticos de grandes e pequenos números como podemos ver nos exemplos.

Exemplos:

1. Encontre o produto entre 12 000 e 172 000 000.

Resolução: Em vez de multiplicarmos algarismo por algarismo, vamos transformar esses números em notação científica.

$$12\,000 \cdot 172\,000\,000 = (1,2 \cdot 10^4) \cdot (1,72 \cdot 10^8)$$

Pela propriedade associativa, podemos multiplicar as potências de base 10 entre si e multiplicar os coeficientes entre si.

$$(1,2 \cdot 10^4) \cdot (1,72 \cdot 10^8) = (1,2 \cdot 1,72) \cdot (10^4 \cdot 10^8) = 2,064 \cdot 10^{12}$$

2. Encontre o produto 0,00000021 e 14.000.000.

Resolução:

$$0,00000021 \cdot 14\,000\,000 = (2,1 \cdot 10^{-7}) \cdot (1,4 \cdot 10^7) = (2,1 \cdot 1,4) \cdot (10^{-7} \cdot 10^7) \\ = 2,94 \cdot 10^0 = 2,94 \cdot 1 = 2,94$$

ATIVIDADES

1. Passe para notação científica os seguintes números:

- a) O diâmetro de um grão de mostarda é 0,002 m.
- b) O diâmetro de um grão de areia é equivalente a 0,000000062 km.
- c) Um átomo tem diâmetro típico de 0,2 nm que corresponde a 0,0000000002 metros.
- d) As menores células medem cerca de 100 nanômetros que corresponde a 0,0000001 metros.

2. Calcule:

- a) $0,0005 \cdot 0,0000000542$
- b) $2\,967\,000 \cdot 0,0025$
- c) $8\,074\,000 \cdot 4\,250\,000$

3. Compare os racionais com o símbolo de maior (>), menor (<) ou igual (=):

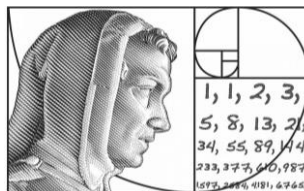
- a) $5,8 \cdot 10^7$ $6,5 \cdot 10^6$
- b) $8,7 \cdot 10^{-20}$ $1,1 \cdot 10^{-22}$
- c) $4,8 \cdot 10^{-5}$ $2,3 \cdot 10^{-3}$
- d) $9,2 \cdot 10^{44}$ $1,9 \cdot 10^{45}$

2. Transforme em notação científica:

- | | |
|--------------|------------------|
| a) 0,1. | e) 0,0000000001. |
| b) 0,002. | f) 0,0000078. |
| c) 0,0005. | g) 0,00093. |
| d) 0,014502. | h) 0,00000002. |

5. Transforme em números as notações científicas:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $1,7 \cdot 10^{-5}$ | e) $6,004 \cdot 10^{-6}$ |
| b) $4,54 \cdot 10^{-3}$ | f) $7,2 \cdot 10^{-7}$ |
| c) $9,61 \cdot 10^{-7}$ | g) $1,34 \cdot 10^{-4}$ |
| d) $8,1 \cdot 10^{-2}$ | h) $3,457 \cdot 10^{-9}$ |



AULA 33

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE RADICAIS



esta aula estudaremos as operações de multiplicação e divisão de radicais. Esse assunto foi dividido em dois casos: radicais de mesmo índice e radicais de índices diferentes.

Antes de adentrarmos nos dois casos, iremos estudar redução de radicais ao menor índice comum, que será muito importante no segundo caso desta aula.

REDUÇÃO DE RADICAIS AO MENOR ÍNDICE COMUM

Definição: Dois ou mais radicais com índices diferentes podem ser expressos como radicais de mesmo índice.

Exemplos:

1. Reduza $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt[4]{5^2}$ ao mesmo índice comum.

Resolução: Primeiramente calcule o MMC dos índices.

$$MMC(3,2,4) = 12$$

Agora, divida o M.M.C. pelos índices de cada radical e multiplique o quociente obtido pelo expoente do radicando.

$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7^1} = \sqrt[12]{7^{1 \cdot 4}} = \sqrt[12]{7^4}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3^1} = \sqrt[12]{3^{1 \cdot 6}} = \sqrt[12]{3^6}$$

$$\sqrt[4]{5^2} = \sqrt[12]{5^{2 \cdot 3}} = \sqrt[12]{5^6}$$

Portanto, reduzindo $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt[4]{5^2}$ ao mesmo índice comum, obtemos $\sqrt[12]{7^4}$, $\sqrt[12]{3^6}$ e $\sqrt[12]{5^6}$, respectivamente.

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE RADICAIS

A operação de multiplicação e divisão de radicais é dividido em dois casos: radicais de mesmo índice e radicais diferentes.

1º CASO: OS RADICAIS DE MESMO ÍNDICE

Definição: Efetuamos a operação de multiplicação ou divisão de radicais com mesmo índice aplicando a operação entre os radicandos.

Exemplos:

$$1. \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35}$$

$$2. 4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = (4 \cdot 5)\sqrt{2 \cdot 3} = 20\sqrt{6}$$

$$3. \sqrt[4]{10} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{10 : 2} = \sqrt[4]{5}$$

$$4. 15\sqrt{6} : 3\sqrt{2} = (15 : 3)\sqrt{6 : 2} = 5\sqrt{3}$$

2º CASO: OS RADICAIS DE ÍNDICES DIFERENTES

Definição: Para realizarmos a operação de multiplicação ou divisão de radicais com índices diferentes, devemos transformar esses radicais em radicais de mesmo índice para depois aplicarmos a operação de multiplicação ou divisão.

Exemplos:

$$\begin{aligned} 1. \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{5} &= \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{5^3} \\ &= \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{125} \\ &= \sqrt[6]{500} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \sqrt[5]{7} : \sqrt{3} &= \sqrt[10]{7^2} : \sqrt[10]{3^5} \\ &= \sqrt[10]{49} : \sqrt[10]{243} \\ &= \sqrt[10]{\frac{49}{243}} \end{aligned}$$

ATIVIDADES

1. Reduza ao menor índice comum os radicais:

a) $\sqrt[6]{7}$ e $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[5]{3}$ e $\sqrt{7}$

c) $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[6]{2}$

d) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{4}$

e) $\sqrt{7^3}$, $\sqrt[5]{2}$ e $\sqrt{5}$

f) $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt{2^2}$ e $\sqrt[3]{3^4}$

2. Qual é o maior: $\sqrt{5}$ ou $\sqrt[3]{10}$?

3. Qual é o maior: $\sqrt{5}$ ou $\sqrt[3]{12}$?

4. Qual é o maior: $\sqrt[3]{4}$ ou $\sqrt[4]{3}$?

5. Efetue as multiplicações e divisões:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{10}$

c) $\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[4]{2}$

d) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt{15} : \sqrt{3}$

g) $\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{2}$

h) $\sqrt[4]{15} : \sqrt[4]{5}$

i) $\sqrt{40} : \sqrt{8}$

j) $\sqrt[3]{30} : \sqrt[3]{10}$

6. Multiplique os radicais e simplifique o produto obtido:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

b) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$

c) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$

d) $\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{7}$

e) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

g) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$

h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

7. Efetue as multiplicações e divisões:

a) $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{7}$

b) $3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{5}$

c) $2\sqrt[3]{5} \cdot 3\sqrt[3]{3}$

d) $5\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$

e) $12\sqrt[4]{25} : 2\sqrt[4]{5}$

f) $18\sqrt[3]{4} : 6\sqrt[3]{7}$

g) $10\sqrt{8} : 2\sqrt{2}$

h) $20\sqrt{2} : 5\sqrt{3}$

8. Efetue as multiplicações e divisões:

a) $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{am}$

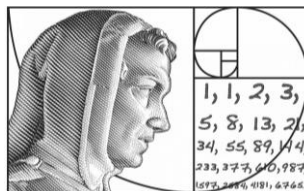
b) $\sqrt[9]{a^5} : \sqrt[9]{a^3}$

c) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a}$

d) $\sqrt{5} : \sqrt[7]{5}$

e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5}$

f) $\sqrt{12} : \sqrt[3]{2}$



AULA 39

DIVISÃO DE MONÔMIOS



esta aula, estudaremos a divisão entre monômios.

Da mesma forma que na multiplicação, a operação de divisão entre monômios ocorre independentemente de possuírem a mesma parte literal.

Antes de vermos a forma como iremos dividir dois monômios precisamos relembrar uma propriedade de potência.

Definição: Em uma divisão de potências de mesma base, devemos conservar a base e subtrair os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Depois de revisarmos o conceito da propriedade de divisão de potências de mesma base, vamos definir como dividimos dois ou mais monômios.

Definição: Para dividirmos dois ou mais monômios, devemos dividir coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal.

Exemplos:

1. Calcule $\frac{27a^{12}}{3a^8}$.

Resolução: Dividindo coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal, temos que:

$$\frac{27a^{12}}{3a^8} = \left(\frac{27}{3}\right) \cdot \left(\frac{a^{12}}{a^8}\right) = 9a^4$$

Portanto, $\frac{27a^{12}}{3a^8} = 9a^4$.

2. Calcule $\frac{144b^5c}{12b^2}$.

Resolução: Dividindo coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal, temos que:

$$\frac{144b^5c}{12b^2} = \left(\frac{144}{12}\right) \cdot \left(\frac{b^5c}{b^2}\right) = 12b^3c$$

Portanto, $\frac{144b^5c}{12b^2} = 12b^3c$.

$$\frac{8x^2y^5}{6xy^3}$$

Resolução: Coeficientes: $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ e Parte Literal: $\frac{x^2y^5}{xy^3} = x^{2-1} \cdot y^{5-3} = xy^2$.

Então, temos que:

$$\frac{8x^2y^5}{6xy^3} = \frac{4}{3}xy^2$$

3. Calcule $\frac{16x^6}{18xy}$.

Resolução: Dividindo coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal, temos que:

$$\frac{16x^6}{18xy} = \left(\frac{16}{18}\right) \cdot \left(\frac{x^6}{xy}\right) = \frac{8x^5}{9y} = \frac{8x^5y^{-1}}{9}$$

Portanto, $\frac{16x^6}{18xy} = \frac{8x^5y^{-1}}{9}$.

ATIVIDADES

1. Como devem ser feitas as divisões entre dois monômios?

2. Calcule:

a) $a^7 : a^2$

b) $t^4 : t^4$

c) $-32x^4 : -8x$

d) $(+9y^6) : (-3y^3)$

e) $\left(\frac{2}{7}a^4x^3\right) : \left(\frac{4}{7}ax^2\right)$

f) $(-7am) : (-21am)$

g) $\left(\frac{5}{9}x^6y^6\right) : (-2x^5y^2)$

h) $\left(-\frac{1}{2}an^6\right) : \left(-\frac{1}{8}an^5\right)$

i) $(-0,4b^2c^4) : (0,25bc^4)$

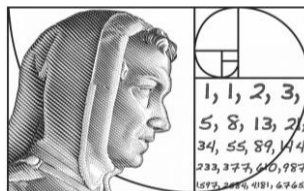
j) $\left(-\frac{3}{5}xy^2z^2\right) : (-0,4xyz^2)$

3. Por qual monômio você deve dividir $20x^2y^3$ para obter $5xy^2$?

4. Multiplique o monômio $-20xy$ pelo monômio $-5x^2y^3$. A seguir, divida o resultado por $10xy^2$. Qual é o monômio que você vai obter?

5. Felipe dividiu a soma $2x^6 + x^6$ pelo monômio $-x^3$ e deu como resposta o monômio $-3x^3$. A resposta de Felipe está certa ou errada?

6. Se dividir $-21a^4b^4$ por um monômio, você obtém $7ab$. Qual é esse monômio?



AULA 44

MULTIPLICANDO UM MONÔMIO POR UM POLINÔMIO



esta aula, estudaremos a multiplicação de um monômio por um polinômio.

Definição: a multiplicação de um monômio por um polinômio é feita multiplicando-se o monômio por cada termo do polinômio.

A multiplicação de um monômio por um polinômio ocorre de forma similar à operação de multiplicação entre monômios. A diferença do caso estudado nesta aula é que devemos aplicar a propriedade distributiva fazendo com que o monômio multiplique todos os termos do polinômio. Para relembramos, vejamos a propriedade distributiva abaixo:

Propriedade Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Agora vamos ver alguns exemplos de multiplicação entre monômios e polinômios:

Exemplos:

1. Seja $P(x) = 4x$ e $Q(x) = 2x + 6$, calcule $P(x) \cdot Q(x)$.

Resolução: Aplicando a definição de multiplicação de um monômio por um polinômio, temos que:

$$P(x) \cdot Q(x) = 4x \cdot (2x + 6) = 4x \cdot 2x + 4x \cdot 6 = 8x^2 + 24x$$

Portanto, $P(x) \cdot Q(x) = 8x^2 + 24x$

2. Seja $P(x) = -2x^2$ e $Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x$, calcule $P(x) \cdot Q(x)$.

Resolução: Aplicando a definição de multiplicação de um monômio por um polinômio, temos que:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (-2x^2) \cdot (3x^3 - 5x^2 + 4x) \\ &= (-2x^2) \cdot 3x^3 + (-2x^2) \cdot (-5x^2) + (-2x^2) \cdot 4x \\ &= -6x^5 + 10x^4 - 8x^3 \end{aligned}$$

Portanto, $P(x) \cdot Q(x) = -6x^5 + 10x^4 - 8x^3$

3. Seja $P(x) = -5p^2q$ e $Q(x) = 8p^3 - 3pq$, calcule $P(x) \cdot Q(x)$.

Resolução: Aplicando a definição de multiplicação de um monômio por um polinômio, temos que:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (-5p^2q) \cdot (8p^3 - 3pq) = (-5p^2q) \cdot 8p^3 + (-5p^2q) \cdot (-3pq) \\ &= -40p^5q + 15p^3q^2 \end{aligned}$$

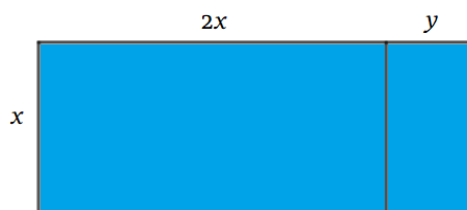
Portanto, $P(x) \cdot Q(x) = -40p^5q + 15p^3q^2$.

4. Resolva a multiplicação $\frac{2}{3}my^2 \cdot \left(8m - 10my + \frac{1}{2}y\right)$.

Resolução: Aplicando a definição de multiplicação de um monômio por um polinômio, temos que:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3}my^2 \cdot \left(8m - 10my + \frac{1}{2}y\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}my^2 \cdot 8m\right) + \left(\frac{2}{3}my^2 \cdot [-10my]\right) + \left(\frac{2}{3}my^2 \cdot \frac{1}{2}y\right) \\ &= \frac{16}{3}m^2y^2 - \frac{20}{3}m^2y^3 + \frac{1}{3}my^3 \end{aligned}$$

5. Calcule a área do retângulo abaixo:



Resolução: Aplicando a fórmula da área do retângulo, temos que:

$$A_{\text{retângulo}} = \text{comprimento} \cdot \text{largura} = (2x + y) \cdot x$$

Aplicando a definição de multiplicação entre monômio e polinômio, temos que:

$$A_{\text{retângulo}} = (2x + y) \cdot x = 2x^2 + xy$$

6. Transforme o polinômio abaixo na forma reduzida.

$$5(x - 4) + x^3 - x(10 - x)$$

Resolução: Desenvolvendo o polinômio, temos que:

$$5(x - 4) + x^3 - x(10 - x) = 5x - 20 + x^3 - 10x + x^2 = x^3 + x^2 - 5x - 20$$

ATIVIDADES

1. Encontre os produtos:

a) $2 \cdot (3x + 4)$

c) $-2x^2 \cdot (x^2 - x + 4)$

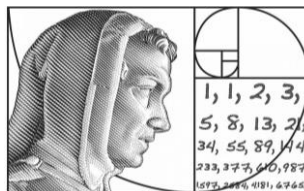
b) $3 \cdot (2x^2 - x - 3)$

d) $(x^2y) \cdot (2x^2 + xy - y^2)$

2. Qual é o polinômio que multiplicado por $5x^2$ dá o produto $10x^5 - 15x^4 + 5x^3 + 25x^2$?

3. Efetue a expressão

$$a(a - b + c) + b(a + b - c) + c(-a + b + c)$$



AULA 46

DIVIDINDO UM POLINÔMIO POR UM MONÔMIO



esta aula, estudaremos a divisão de um polinômio por um monômio.

Definição: Para dividirmos um polinômio por um monômio, devemos dividir cada termo do polinômio pelo monômio.

Exemplos:

1. Se $P(x) = 8x^{24} - 5x^{12}$ e $Q(x) = x^3$, calcule $P(x) : Q(x)$.

Resolução:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{8x^{24} - 5x^{12}}{x^3} = \frac{8x^{24}}{x^3} - \frac{5x^{12}}{x^3}$$

Calculando as divisões individualmente, temos que:

$$\frac{8x^{24}}{x^3} = 8x^{21} \text{ e } -\frac{5x^{12}}{x^3} = -5x^9$$

Logo,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{8x^{24} - 5x^{12}}{x^3} = \frac{8x^{24}}{x^3} - \frac{5x^{12}}{x^3} = 8x^{21} - 5x^9$$

2. Se $P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3$ e $Q(x) = 2x^2$, calcule $P(x) : Q(x)$.

Resolução:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5 - x^4 + 2x^3}{2x^2} = \frac{x^5}{2x^2} - \frac{x^4}{2x^2} + \frac{2x^3}{2x^2}$$

Calculando as divisões individualmente, temos que:

$$\frac{x^5}{2x^2} = \frac{x^3}{2}, -\frac{x^4}{2x^2} = -\frac{x^2}{2} \text{ e } \frac{2x^3}{2x^2} = x$$

Logo,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5 - x^4 + 2x^3}{2x^2} = \frac{x^5}{2x^2} - \frac{x^4}{2x^2} + \frac{2x^3}{2x^2} = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + x$$

3. Se $P(x) = 2a^4b^3 - a^3b^2$ e $Q(x) = 4a^3b$, calcule $P(x) : Q(x)$.

Resolução:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2a^4b^3 - a^3b^2}{4a^3b} = \frac{2a^4b^3}{4a^3b} - \frac{a^3b^2}{4a^3b}$$

Calculando as duas divisões, temos que:

$$\frac{2a^4b^3}{4a^3b} = \frac{ab^2}{2} \text{ e } -\frac{a^3b^2}{4a^3b} = -\frac{b}{4}$$

Logo,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2a^4b^3 - a^3b^2}{4a^3b} = \frac{2a^4b^3}{4a^3b} - \frac{a^3b^2}{4a^3b} = \frac{ab^2}{2} - \frac{b}{4}$$

4. Se $P(x) = 5p^2q^5 - 2p^4q^3$ e $Q(x) = 2c^2$, calcule $P(x) : Q(x)$.

Resolução:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5p^2q^5 - 2p^4q^3}{2c^2} = \frac{5p^2q^5}{2c^2} - \frac{2p^4q^3}{2c^2}$$

Calculando as divisões individualmente, temos que:

$$\frac{5p^2q^5}{2c^2} = \frac{5p^2q^5}{2c^2} \text{ e } -\frac{2p^4q^3}{2c^2} = -\frac{p^4q^3}{c^2}$$

Logo,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5p^2q^5 - 2p^4q^3}{2c^2} = \frac{5p^2q^5}{2c^2} - \frac{2p^4q^3}{2c^2} = \frac{5p^2q^5}{2c^2} - \frac{p^4q^3}{c^2}$$

ATIVIDADES

1. Encontre os quocientes:

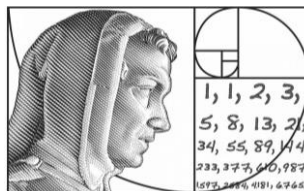
a) $81x^3 : 27x$

b) $-63a^2b^3 : 9ab^3$

c) $\frac{32x^2b^5}{8xy^3}$

d) $\frac{x^4+2x^3}{x^2}$

e) $\frac{4a^4-2a^3+8a}{2a}$



AULA 49

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS



esta aula, daremos início ao estudo dos produtos notáveis examinando o quadrado da soma de dois termos.

Antes de adentrarmos no conteúdo do quadrado da soma de dois termos, devemos primeiramente entender o conceito de produto notável.

Para isso, iniciaremos essa aula estudando a etimologia das palavras produto e notáveis.

A palavra produto vem do latim *producere*, que significa guiar, levar mais à frente; e a palavra notável tem sua origem etimológica no latim *notabilis* que significa digno de nota.

Na matemática, quando falamos em produto estamos nos referindo ao resultado de uma multiplicação, não somente uma multiplicação de números, mas também uma multiplicação algébrica, isto é, uma multiplicação envolvendo letras e números.

Exemplos:

1. Calcule o produto de $26 \cdot 145$.

Resolução: O produto de $26 \cdot 145 = 3770$.

2. Calcule o produto de $\frac{9x^2}{16} \cdot x$.

Resolução: O produto de $\frac{9x^2}{16} \cdot x$ é

$$\frac{9x^2}{16} \cdot x = \frac{6x \cdot x}{5} = \frac{6x^2}{5}$$

3. Calcule o produto de $x \cdot (5x + 2)$.

Resolução: Para calcular o produto de $x \cdot (5x + 2)$ devemos aplicar a propriedade distributiva. Então, temos que:

$$x \cdot (5x + 2) = 5x^2 + 2x$$

Portanto, o produto de $x \cdot (5x + 2) = 5x^2 + 2x$.

4. Calcule o produto de $(2x + 3)^2$.

Resolução: Aplicando a propriedade distributiva, temos que:

$$(2x + 3)^2 = (2x + 3) \cdot (2x + 3) = 4x^2 + 6x + 6x + 9 = 4x^2 + 12x + 9$$

Portanto, o produto de $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

5. Calcule o produto de $(y - 1) \cdot (y + 1)$.

Resolução: Para calcular o produto de $(y - 1) \cdot (y + 1)$ devemos aplicar a propriedade distributiva. Então, temos que:

$$(y - 1) \cdot (y + 1) = y^2 + y - y - 1 = y^2 - 1$$

Portanto, o produto de $(y - 1) \cdot (y + 1) = y^2 - 1$.

Como podemos notar nos exemplos, é comum encontrarmos nas expressões algébricas operações relacionadas a produtos. Esses produtos acabam sendo dignos de nota, pois aparecem várias vezes. Dessa forma, chamamo-los de produtos notáveis.

Os produtos notáveis são: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença.

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Definição: sejam dois termos $a, b \in \mathbb{R}$; o quadrado da soma desses dois termos é:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Em outras palavras, podemos dizer que o quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

Vimos que a definição do quadrado da soma de dois termos é $a^2 + 2ab + b^2$. Essa igualdade ocorre por causa da definição de potência e da propriedade distributiva, como veremos a seguir:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplos:

1. Calcule $(x + 7)^2$.

Resolução: Usando a definição do quadrado da soma de dois termos, temos que:

$$(x + 7)^2 = (x + 7) \cdot (x + 7) = x^2 + 14x + 49$$

Portanto, $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$.

2. Calcule $(4y + 5)^2$.

Resolução: Usando a definição do quadrado da soma de dois termos, temos que:

$$(4y + 5)^2 = (4y)^2 + 2 \cdot (4y) \cdot 5 + 5^2 = 16y^2 + 40y + 25$$

Portanto, $(4y + 5)^2 = 16y^2 + 40y + 25$.

3. Calcule $(5m + 2n)^2$.

Resolução: Usando a definição do quadrado da soma de dois termos, temos que:

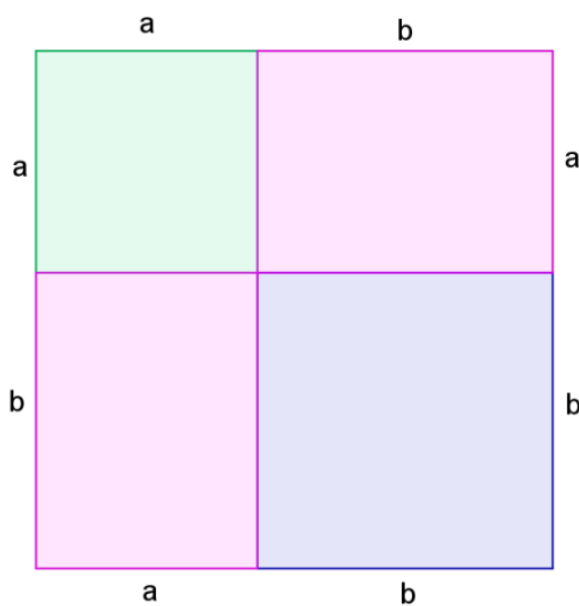
$$(5m + 2n)^2 = (5m)^2 + 2 \cdot (5m) \cdot (2n) + (2n)^2 = 25m^2 + 20mn + 4n^2$$

Portanto, $(5m + 2n)^2 = 25m^2 + 20mn + 4n^2$.

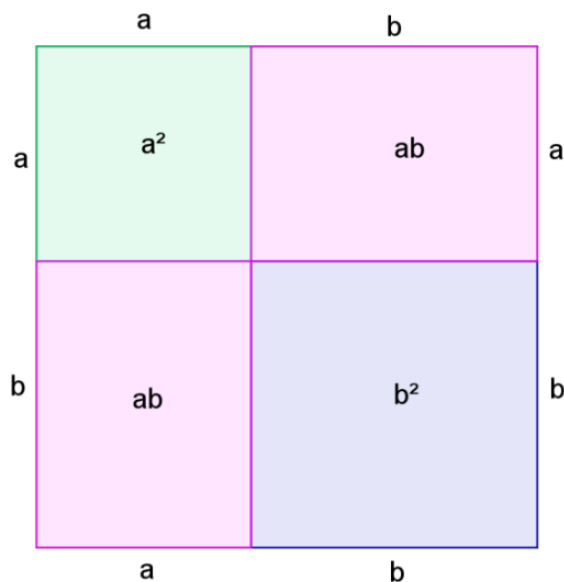
VERIFICAÇÃO GEOMÉTRICA DO PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA

Para verificarmos geometricamente o produto notável do quadrado da soma de dois termos, precisaremos primeiramente de um quadrado de lado $a + b$, logo, a área será $(a + b)^2$. Mas como podemos ter um quadrado de lado $a + b$?

Para termos um quadrado de lado $a + b$ devemos dividir o lado de um quadrado, de tal forma que a parte maior seja equivalente à parcela a e a parte menor seja equivalente à parcela b , ou vice-versa, como podemos verificar na figura abaixo:



Desta forma, obtemos quatro novas figuras geométricas. Calculando a área de cada uma delas, temos que:



Notem que a soma dessas quatro áreas é equivalente à área do quadrado de lado $a + b$. Sendo assim, temos que:

Área do quadrado de lado $(a + b)$ = A soma das quatro áreas

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Portanto, provamos geometricamente que o quadrado da soma de dois termos resulta no primeiro termo ao quadrado mais duas vezes o primeiro pelo segundo mais o segundo termo ao quadrado.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ATIVIDADES

1. Calcule os produtos notáveis.

a) $(x + 1)^2$

b) $(x + 6)^2$

c) $(a + 10)^2$

d) $(y + 4)^2$

e) $(3x + 1)^2$

f) $(2a + 5)^2$

g) $(a + 2b)^2$

h) $(x^2 + 4)^2$

i) $(a^2 + 1)^2$

j) $(5a + 3b)^2$

2. Observe o exemplo:

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$$

Agora calcule:

a) $\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2$

b) $\left(\frac{a}{2a+2}\right)^2$

c) $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2$

3. Responda: certo ou errado?

a) $(x + a)^2 = x^2 + a^2$

b) $(x + a)^2 = x^2 + a^2 + 2ax$

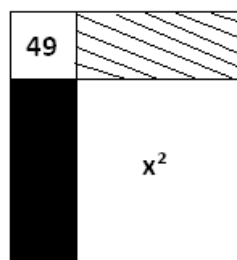
c) $p^2 + q^2 = (p + q)^2$

d) $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4$

e) $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

4. Sabe-se que $x^2 + y^2 = 20$ e $xy = 3$. Qual é o valor de $(x + y)^2$?

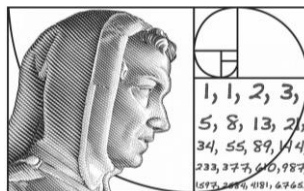
5. Observe que, na figura, a área de um quadrado é x^2 e a área do outro quadrado é 49:



a) Qual é a área do retângulo hachurado (riscado)?

b) Qual é a área do retângulo colorido (preto)?

c) Qual é a área total da figura?



AULA 54

TRINÔMIO DO QUADRADO PERFEITO



esta aula, estudaremos a fatoraçaõ do trinômio do quadrado perfeito; aprenderemos que determinados trinômios podem formar um quadrado perfeito.

Para entendermos essa fatoraçaõ, iremos retomar alguns conceitos importantes.

Definiçaõ: Para que uma expressã algébrica seja considerada um trinômio, ela deverá conter exatamente três monômios.

Exemplos:

1. $5x^2 - 4x + 15$ é um trinômio.
2. $a + b + c$ é um trinômio.
3. $-x^2 + 4x + 5$ é um trinômio.

Observaçãõ: Nem todos os trinômios podem ser escritos como um quadrado perfeito. Ao longo desta aula, aprenderemos a verificar se um trinômio pode ser escrito como um quadrado perfeito.

Definiçaõ: O quadrado perfeito é o produto de uma multiplicaçãõ de fatores iguais.

Exemplos:

1. 64 é um quadrado perfeito, pois $64 = 8 \cdot 8$.
2. x^2 é um quadrado perfeito, pois $x^2 = x \cdot x$.

Vejamos a definiçaõ da fatoraçaõ do trinômio do quadrado perfeito:

Definiçaõ: O trinômio do quadrado perfeito é uma técnica de fatoraçaõ, ele consiste de expressões que possuem três termos e que podem ser escritas como um quadrado perfeito.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Para verificarmos a fatoraçaõ do trinômio do quadrado perfeito, basta aplicarmos a definiçaõ de potência e a propriedade distributiva na fatoraçaõ e encontraremos o trinômio do quadrado perfeito novamente, como podemos ver abaixo:

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Observação: Notem que a fatoração do trinômio do quadrado perfeito sempre resulta no quadrado da soma de dois termos ou no quadrado da diferença da soma de dois termos, dependendo do sinal do termo central do trinômio.

Exemplos:

$$1. x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2.$$

$$2. x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2.$$

$$3. m^4 - 2m^2 + 1 = (m^2 - 1)^2.$$

PROCESSO DE FATORAÇÃO

Agora, estudaremos como transformar um trinômio em um quadrado perfeito, quando possível.

O processo de fatoração de um trinômio quadrado perfeito consiste em reescrever a expressão inicial como um quadrado perfeito da seguinte forma:

1º passo: Primeiramente reescreva o trinômio com os termos em quadrados nas extremidades.

$$x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{e} \quad x^2 - 2xy + y^2$$

2º Passo: Extraia a raiz quadrada dos termos nos extremos.

3º Passo: Multiplique os valores encontrados no segundo passo por 2 ou por -2 , dependendo do sinal do termo central.

4º Passo: Verifique se o termo central é igual ao valor encontrado no terceiro passo; se forem iguais, o trinômio é um quadrado perfeito.

5º Passo: Pegue os valores das raízes e escreva o quadrado da soma delas; se o valor do termo central for positivo ou se o valor do termo central for negativo, escreva o quadrado da diferença dos valores das raízes.

Exemplos:

1. Verifique se o trinômio $x^2 + 9 - 6x$ é um quadrado perfeito e, se for, escreva-o.

Resolução: Primeiramente escrevemos o trinômio $x^2 + 9 - 6x$ na ordem correta.

$$x^2 + 9 - 6x = x^2 - 6x + 9$$

Agora, iremos extrair a raiz dos extremos.

$$\sqrt{x^2} = x \text{ e } \sqrt{9} = 3$$

Multiplicando os valores encontrados por -2 , pois, o termo central $-6x$ é negativo, temos que:

$$-2 \cdot x \cdot 3 = -6x$$

Como o valor dessa multiplicação corresponde ao termo central do trinômio, temos que $x^2 - 6x + 9$ é um quadrado perfeito.

Portanto, $x^2 + 9 - 6x = (x - 3)^2$.

2. Verifique se o trinômio $2x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x + 4$ é um quadrado perfeito e se for escreva-o.

Resolução: Como o trinômio $2x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x + 4$ está na ordem correta, iremos extrair a raiz dos extremos.

$$\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{4} = 2$$

Multiplicando os valores encontrados por 2, pois, o termo central é positivo, temos que:

$$2 \cdot x\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2} \cdot x$$

Como o valor dessa multiplicação corresponde ao termo central do trinômio, temos que $2x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x + 4$ é um quadrado perfeito.

Portanto, $2x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x + 4 = (x\sqrt{2} + 2)^2$.

3. Verifique se o trinômio $m^2 - 10m + 25$ é um quadrado perfeito e, se for, escreva-o.

Resolução: Como o trinômio $m^2 - 10m + 25$ está na ordem correta, iremos extrair a raiz dos extremos.

$$\sqrt{m^2} = m \text{ e } \sqrt{25} = 5$$

Multiplicando os valores encontrados por -2 , pois, o termo central é negativo, temos que:

$$(-2) \cdot m \cdot 5 = -10m$$

Como o valor dessa multiplicação corresponde ao termo central do trinômio, temos que $m^2 - 10m + 25$ é um quadrado perfeito.

Portanto, $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2$.

ATIVIDADES

1. Faça os trinômios, escrevendo-os nas formas de quadrado da soma ou da subtração:

a) $x^2 + 2xy + y^2$

b) $a^2 + 2a + 1$

c) $x^2 - 6x + 9$

d) $4x^2 - 4x + 1$

e) $m^2 + 4mn + 4n^2$

f) $x^2 - 12x + 36$

g) $9x^2 + 6x + 1$

h) $x^3 + 2x^2 + x$

2. Fatore as expressões

a) $m^2 - 12m + 36$

b) $a^2 + 14a + 49$

c) $4 + 12x + 9x^2$

d) $9a^2 - 12a + 4$

e) $9x^2 - 6xy + y^2$

f) $x^2 + 20x + 100$

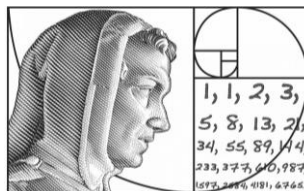
g) $a^2 - 12ab + 36b^2$

h) $9 + 24a + 16a^2$

i) $64a^2 - 176a + 121$

j) $a^4 - 22a^2 + 121$

k) $36 + 12xy + x^2y^2$



AULA 58

EQUAÇÕES COM FATORAÇÃO E EQUACIONANDO PROBLEMAS

Nesta aula, estudaremos equações com fatoração e equacionando problemas.

EQUAÇÕES COM FATORAÇÃO

A fatoração nos auxilia a resolvermos algumas equações, pois ela transforma um polinômio em produtos de fatores irredutíveis.

Quando nos deparamos com uma igualdade entre o número zero e o produto de fatores (podendo ser procedente de alguma técnica de fatoração), podemos aplicar a propriedade da multiplicação que tem como resultado o zero, como veremos a seguir:

Propriedade: Se $x \cdot y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.

A propriedade consiste em um produto de dois números e o resultado é zero; isto significa que o primeiro número é zero ou o segundo número é zero.

Vejamos como encontrar as soluções de equações utilizando a fatoração para encontrar o resultado.

Exemplos:

1. Encontre a solução da equação $x^2 - 16 = 0$.

Resolução: Primeiramente iremos aplicar a técnica da diferença entre quadrados para fatorar o polinômio.

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x + 4) \cdot (x - 4) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0$$

$$x = -4 \qquad x = 4$$

Portanto, as soluções da equação $x^2 - 16 = 0$ são $S = \{-4, 4\}$.

2. Encontre as raízes da equação $a^2 - a$.

Resolução: Primeiramente iremos aplicar a técnica do fator comum em evidência para fatorar o polinômio.

$$a^2 + 5a = 0$$

$$a \cdot (a + 5) = 0$$

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad a + 5 = 0$$

$$a = -5$$

Portanto, as soluções da equação $a^2 + 5a = 0$ são $S = \{0, -5\}$.

EQUACIONANDO PROBLEMAS

Para equacionar os problemas, isto é, para montarmos a equação de um problema, devemos proceder do seguinte modo:

- 1º) Leia o problema com muita atenção.
- 2º) Escreva a sentença matemática do problema.
- 3º) Efetue as operações indicadas na sentença matemática, utilizando as operações inversas.
- 4º) Escreva a resposta do problema.

Exemplos:

1. Um número somado a 15 é igual a 94. Qual é esse número?

Resolução: Depois de lermos o problema devemos escrever as sentenças matemáticas.

um número $\rightarrow x$

somado a 15 $\rightarrow x + 15$

é igual a 94 $\rightarrow x + 15 = 94$

Efetuando as operações, temos que:

$$x + 15 = 94$$

$$x = 94 - 15$$

$$x = 79$$

Portanto, o número é 79.

2. Pensei em um número, acrescentei 14 e obtive o triplo de 25. Qual é esse número?

Resolução: Precisamos encontrar qual número foi pensado; para isso, temos que:

um número $\rightarrow x$

acrescentei 14 $\rightarrow x + 14$

obtive o triplo de 25 $\rightarrow x + 14 = 3 \cdot 25 \Leftrightarrow x + 14 = 75$

Efetuada as operações, temos que:

$$x + 14 = 75$$

$$x = 75 - 14$$

$$x = 61$$

Portanto, o número é 61.

3. A soma de dois números naturais consecutivos resulta em 91. Encontre esses números.

Resolução: Precisamos encontrar os dois números que foram somados; para isso, temos que:

um número $\rightarrow x$

consecutivo de um número $\rightarrow x + 1$

resulta em 91 $\rightarrow x + (x + 1) = 91$

Efetuada as operações, temos que:

$$x + (x + 1) = 91$$

$$x + x + 1 = 91$$

$$2x = 91 - 1$$

$$2x = 90$$

$$x = \frac{90}{2}$$

$$x = 45$$

Portanto, os números são 45 e 46.

ATIVIDADES

1. Se um retângulo tem 20 *cm* de comprimento e 100 *cm*² de área, qual é a medida de sua largura?

2. Se um retângulo tem 35 *cm* de comprimento e 175 *cm*² de área, qual é a medida de sua largura?

3. Quando os gêmeos Anderson e Ricardo nasceram, Maria tinha 7 anos. Hoje, quando a soma das idades dos três irmãos é 34 anos, qual é a idade dos gêmeos?

4. Metade da distância de São Paulo a Belo Horizonte mais 15 *km* é igual à distância entre São José dos Campos e o Rio de Janeiro, que é de 300 *km*. Qual é a distância de São Paulo a Belo Horizonte?

5. Determine um número cujo dobro de seu antecessor menos 3 é igual a 25.

6. Quatro amigos se reuniram para comer numa lanchonete. A conta de R\$ 32,00 foi paga da seguinte forma: Vicente pagou mais R\$ 2,00 que Rubens; Rubens pagou mais R\$ 3,50 que Laerte; Laerte pagou a metade do que José pagou.

a) Quem pagou a maior quantia? Quanto foi?

b) Quem pagou a menor quantia? Quanto foi?

7. Bento tem mais três anos que Teresa. A soma de suas idades é, atualmente, 31 anos. Determine suas idades.

8. A soma de quatro números naturais consecutivos é 62. Determine esses números.

9. Que número é igual à metade de seu quadrado?

10. Numa cidade, uma corrida de táxi custa R\$ 4,00 mais a quantia de R\$ 0,75 por quilômetro rodado.

a) Quanto custa uma corrida de x quilômetros?

b) Quantos quilômetros tem uma corrida que custa R\$ 10,00?

11. Marcos, de 42 anos, é pai de Mariana, de 12 anos. Daqui a quantos anos a idade do pai será o dobro da idade da filha?

12. Na última eleição papal três candidatos apareceram mais vezes. O 1º candidato obteve o dobro dos votos do 2º, que teve mais 18 votos que o 3º candidato. Foram 214 os cardeais, entretanto 20 deles não votaram devido à idade muito avançada. Dê a classificação final e o número de votos de cada candidato.

13. Calcule x em cada equação.

a) $x^2 = 4x$

b) $3x^2 = 6x$

c) $2x^2 = 5x$

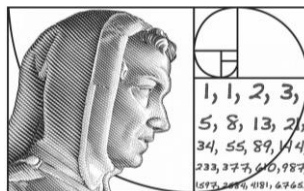
d) $25x = 4x^2$

14. Calcule x em cada equação:

a) $15(x + 2) = 0$

b) $(x + 1)(2x - 1) = 0$

c) $5x(x - 1)(x - 2) = 0$



AULA 62

SISTEMA IMPOSSÍVEL E INDETERMINADO



esta aula, estudaremos dois tipos de sistemas, que são: o sistema possível e indeterminado e o sistema impossível.

Na Aula 59 vimos que existem três tipos de equações: equações possíveis e determinadas, equações possíveis e indeterminadas e equações impossíveis.

As equações possíveis e indeterminadas vimos que são equações que apresentam infinitas soluções e as equações impossíveis não apresentam nenhuma solução.

Da mesma forma, podemos encontrar sistemas de equações que são classificados como sistema possível e indeterminado, onde esse sistema terá um resultado, por isso é possível. Porém, haverá infinitos resultados, sendo classificado como indeterminado. Já os sistemas chamados de impossíveis recebem esse nome, pois, não é possível encontrar nenhuma solução para esse sistema. Vejamos com mais detalhes os dois sistemas abaixo:

SISTEMAS POSSÍVEIS E INDETERMINADOS

O sistema possível e indeterminado, como o próprio nome já diz, são sistemas que será possível encontrar resultados que valem para ambas as equações, porém, terá uma infinidade de soluções recebendo o nome de indeterminado.

Definição: Sistemas lineares possíveis e indeterminados sempre chegarão a uma equação indeterminada do tipo:

$$0x + 0y = 0$$

Exemplos:

1. Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 12x + 8y = 24 \end{cases}$$

Resolução: Resolvendo o sistema pelo método da adição, temos que multiplicar a primeira equação pelo fator -4 para que possamos cancelar a incógnita y .

$$\begin{array}{r} (3x + 2y = 6) \cdot -4 \\ 12x + 8y = 24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -12x - 8y = -24 \\ 12x + 8y = 24 \end{array}$$

Adicionando as duas equações, temos:

$$\begin{array}{r} -12x - 8y = -24 \\ + 12x + 8y = 24 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array}$$

Notem que para qualquer valor que atribuamos a x e a y , será solução dessa equação, pois todo número multiplicado por zero é zero e a soma de zeros resulta em um número zero.

Portanto, como são infinitas as soluções para esta equação, dizemos que o sistema é indeterminado.

SISTEMAS IMPOSSÍVEIS

O sistema impossível, como o próprio nome já diz, são sistemas onde não será possível encontrar resultados que valiam para ambas as equações.

Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$, temos que os sistemas lineares impossíveis são sistemas que não possuem solução possível.

$$0x + 0y = a$$

Exemplos:

1. Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ 9x + 9y = 6 \end{cases}$$

Resolução: Resolvendo o sistema pelo método da adição, temos que multiplicar a primeira equação pelo fator 9 e a segunda equação pelo fator -4 para que possamos cancelar a incógnita y .

$$\begin{array}{r}
 (4x + 4y = 4) \cdot 9 \\
 (9x + 9y = 6) \cdot -4 \\
 \hline
 36x + 36y = 36 \\
 -36x - 36y = -24
 \end{array}$$

Adicionando as duas equações, temos:

$$\begin{array}{r}
 36x + 36y = 36 \\
 + \quad -36x - 36y = -24 \\
 \hline
 0x + 0y = 12
 \end{array}$$

Perceba que nenhum valor atribuído a x e a y soluciona esta equação, uma vez que é impossível que a soma de $0x$ e $0y$ resulte em 12.

Portanto, este sistema é tido como impossível.

ATIVIDADES

1. Classifique os sistemas abaixo como: Sistema Possível e Determinado (S.P.D.), Sistema Possível e Indeterminado (S.P.I.) e Sistema Impossível (S.I.).

a) $\begin{cases} y = x - 7 \\ x = y + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x + 2 \\ x = y - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = x + y + 7 \\ 1 + 2y = 3 - x \end{cases}$

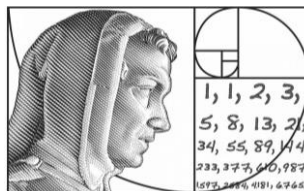
e) $\begin{cases} 5x = 1 - 3y \\ 2x + 4y = y - 3x \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x - y = y - x - 7 \\ 2y - 5x - 3 = 3x + 4 \end{cases}$

2. Encontre o valor de cada incógnita nos sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} a + c = 2004 \\ b + c = 2007 \\ c + d = 2016 \\ c + e = 2021 \\ d + e = 2023 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a + b + c = 12 \\ b + c + d = 12 \\ c + d + e = 12 \\ d + e + f = 12 \\ e + f + g = 12 \\ f + g + h = 12 \\ g + h + i = 12 \\ h + i + j = 12 \\ i + j + a = 12 \\ j + a + b = 12 \end{cases}$



AULA 65

REVISÃO DE GEOMETRIA



esta aula, faremos uma revisão dos assuntos primitivos da geometria.

Para compreendermos qualquer conteúdo, devemos primeiro ter uma clareza dos fundamentos desse assunto. Sendo assim, para estudarmos geometria, devemos ter clareza dos seus fundamentos, de suas noções primitivas.

Definição: Ponto, reta e plano são noções primitivas da geometria.

Desta forma, o nosso objetivo nessa aula é revisarmos as definições de ponto, reta e plano e suas derivações.

PONTO

A palavra ponto deriva do latim de punctus, e significa “ponto, picada”, ou, no particípio passado de *pungere*, “fincar, espetar, picar”.

Definição: o **ponto** é sem dimensão (sem tamanho) e não se encontra no espaço, não tem interior nem exterior.

Pela definição de ponto, temos que ele não tem dimensão, ou seja, tecnicamente não podemos ver o ponto. Mesmo assim, os pontos são representados através de uma marca circular, geralmente a menor marca que se pode fazer. É importante ressaltarmos que essa marca circular não é o ponto, é apenas a representação, e isso ocorre, pois é próprio do homem representar graficamente algo que não se pode ver. Como exemplo, temos os Anjos, que são puros espíritos, ou seja, não possuem matéria, e são representados com asas e corpo, mesmo não os tendo.

Definição: O ponto é sempre representado por letras maiúsculas.

•

A

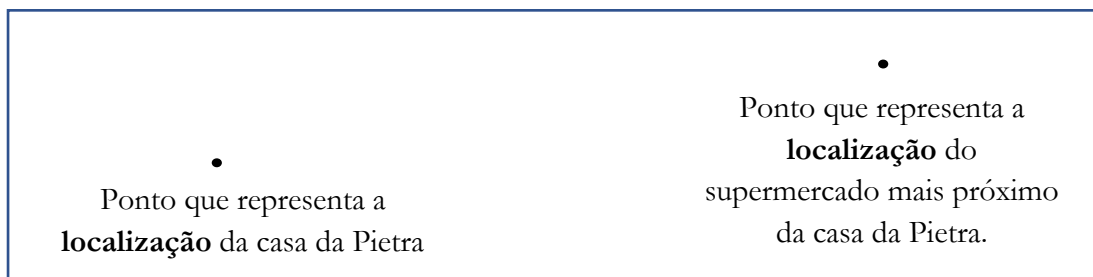
Observação: Na matemática, os pontos são usados para indicar localização.

Exemplos:

1. A imagem das capitais brasileiras representadas por pontos no mapa do Brasil.



2. Representação através de pontos da localização da casa da Pietra e o supermercado mais perto da sua casa.



3. As estrelas no céu parecem pontos.



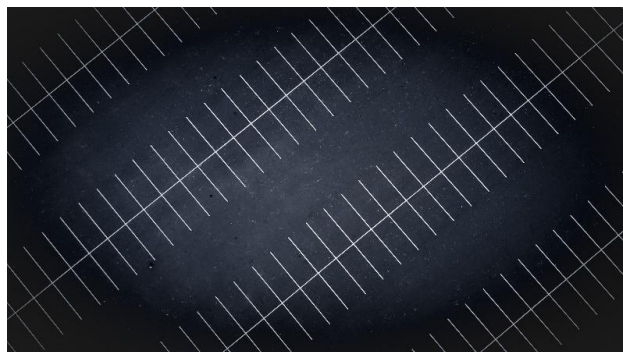
LINHA

A palavra linha tem origem no termo latino LINEA, que significa corda fina, fio de linho.

O sentido primitivo desta palavra era corda fina, porém a partir do século XIV passou a designar um traço ou marca estreita e alongada como um fio, desenhada sobre papel ou algum outro suporte.



As linhas em uma agenda.



Uma visão noturna de drone de linhas de estacionamento.

SEGMENTO DE RETA

A palavra segmento tem origem no termo latino SECARE, que significa cortar. Então, um segmento é algo que foi cortado.

Na matemática, definimos da seguinte maneira:

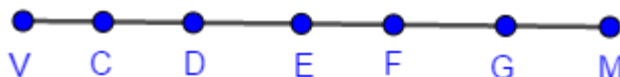
Definição: o segmento de reta é uma linha que possui um ponto de origem e um ponto no fim.

Segmento $\overline{AB}$



O Segmento de Reta pode ser comparado com a nossa vida terrena, pois podemos fazer a linha da nossa vida, onde marcaremos os pontos mais importantes que vivemos, tanto as alegrias quanto as tristezas.

Abaixo temos um exemplo de linha com pontos, cada ponto representado pelas letras V , C , D , E , F , G e M .



Dentro desta linha teremos dois grandes destaques: o **Ponto da Vida** e o **Ponto da Morte**.

O **Ponto da Vida** é o ponto de origem da nossa vida, ou seja, é o ponto que representa a fecundação do óvulo pelo espermatozoide.

O **Ponto da Morte** é o ponto do fim da nossa vida na Terra, ou seja, é quando morremos.

Como a nossa vida na Terra tem um ponto de origem que é a infusão da alma, que se dá imediatamente após a fecundação do óvulo, e também tem um ponto de fim, que é quando morremos, podemos comparar a vida na Terra com o Segmento de Reta.

Para denotar um segmento de reta, indica-se a letra que representa o primeiro ponto (da esquerda para a direita), seguida da segunda letra que representa o segundo ponto com um traço em cima das letras:

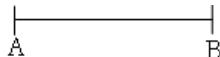
Segmento de reta $\overline{AB}$



Os pontos extremos A e B do seguimento são também denominados vértices.

DESENHO – TRANSPORTE DE SEGMENTOS

Agora iremos realizar o transporte de segmentos dado um segmento $\overline{AB}$ com o auxílio do compasso.



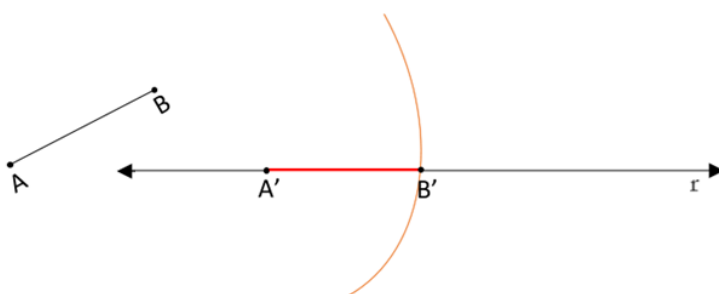
Para realizamos o transporte de segmentos, devemos seguir os seguintes passos:

1º passo: Trace uma reta r qualquer.

2º passo: Marque um ponto A' na reta r .

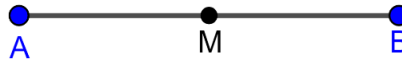
3º passo: Fixe a ponta seca em A e o grafite em B , para medir o segmento $\overline{AB}$.

4º passo: Mantenha a abertura do compasso do passo anterior e fixe a ponta seca em A' e marque o ponto B' na reta r . O segmento $\overline{A'B'}$ tem o mesmo tamanho que o segmento $\overline{AB}$. Logo, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.



PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Definição: Um ponto M interno a um segmento $\overline{AB}$ é denominado ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se M divide $\overline{AB}$ em dois segmentos congruentes.



Na figura acima, M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, pois $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

SEMI-RETA

A palavra semirreta possui um prefixo: *semi*, que deriva do latim e significa meio, metade.

Portanto, uma semirreta pode ser compreendida como a metade de uma reta. Entretanto, qual seria a diferença entre uma semirreta e um segmento de reta?

Um segmento de reta tem um ponto de origem e um ponto no fim, enquanto uma semirreta tem um ponto de origem como o segmento de reta, porém não tem fim, isto é, é infinita, como veremos na definição abaixo.

Definição: a semirreta é uma linha com um ponto de origem e não tem fim.

Semirreta $\overrightarrow{AB}$



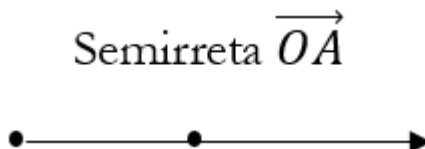
Já vimos que o segmento de reta é comparado com a nossa vida terrena, porém a semirreta pode ser comparada com o quê?

Ela é comparada com a nossa vida, pois todos temos um ponto de origem, que consiste na fecundação do óvulo e de imediato a infusão da alma. Mas sabemos que a nossa vida não termina quando morremos, ou seja, não temos apenas uma vida terrena, mas também uma vida eterna, que pode ser vivida no Céu ou no Inferno.

A vivência do Céu e do Inferno é uma vivência eterna, que não tem fim, como a semirreta, que não possui fim, razão por que podemos comparar a semirreta com a nossa vida, pois temos uma origem e uma vida na eternidade, que dependerá de nossas escolhas, de amar ou não amar a Deus.

As semirretas serão representadas graficamente por uma linha, como as retas, com a diferença de que uma de suas extremidades é um ponto específico e a outra contém uma seta para indicar continuidade. Para representar uma semirreta, utilizam-se os dois pontos, o de origem e outro qualquer, com uma seta em cima.

Semirreta $\overrightarrow{OA}$



RETA

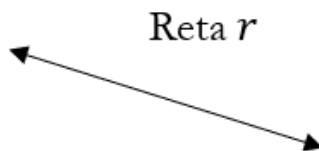
A palavra reta tem origem no termo latino RECTUS, que significa reto, direito. Na Matemática, definimos da seguinte maneira:

Definição: a reta é uma linha sem um ponto de origem e sem fim.



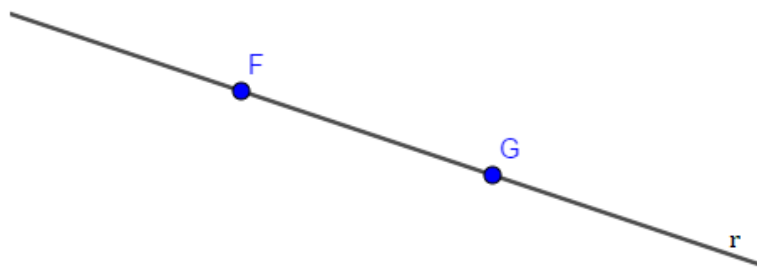
Pela definição, podemos comparar a reta com Deus, pois Deus não tem origem nem fim, ou seja, ele é o Princípio e o Fim, o Alfa e o Ômega, como nós professamos no ato de fé.

As retas serão representadas graficamente por uma linha, como nos segmentos, embora não devam ter profundidade ou largura, com a diferença de que suas extremidades virão ou não acompanhadas. Diferentemente dos pontos, as retas apresentam uma, e somente uma, dimensão: o comprimento. Para representar uma reta, utilizam-se as letras minúsculas do alfabeto:

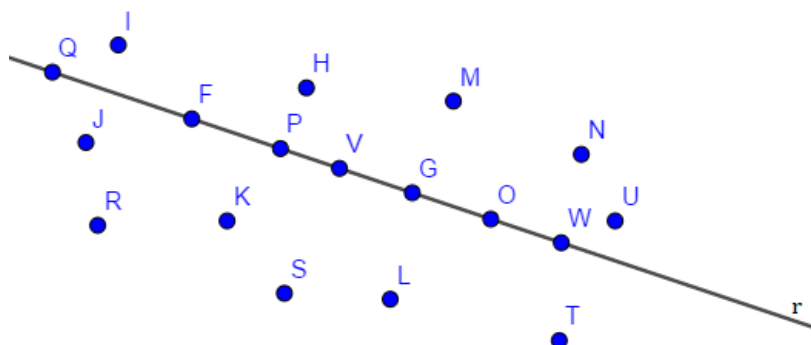


AXIOMAS

Axioma 1: Por dois pontos passam uma única reta.



Axioma 2: Em uma reta e fora dela, há infinitos pontos.



PLANO

A palavra plano tem origem no termo latino *PLANUS*, que significa achatado, nivelado. Na geometria, o plano possui comprimento e largura, porém, não possui altura.

Observação: Os planos são representados através de um paralelogramo e denotados por uma letra grega. Eles transmitem a ideia de superfície.

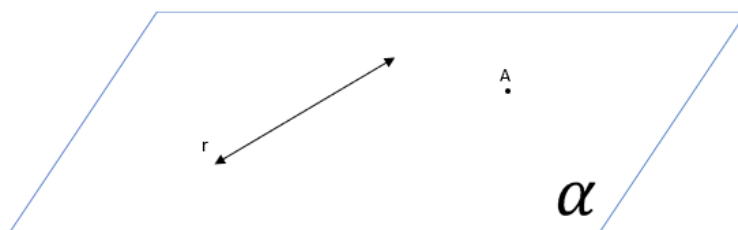
Plano α (Alfa)



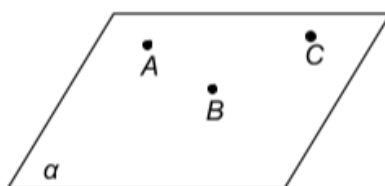
Vejamos duas definições importantes que nos ajudam a determinar a existência de um plano.

Definição: Três pontos não colineares⁵ determinam um único plano.

Definição: Um plano também pode ser determinado por uma reta e um ponto fora dela.



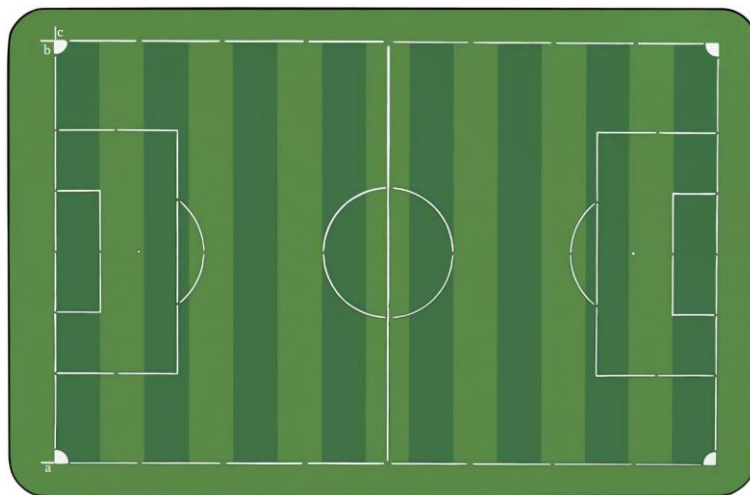
Observação: numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos (tantos quantos se quiser); em um plano há infinitos pontos.



POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS EM UM PLANO

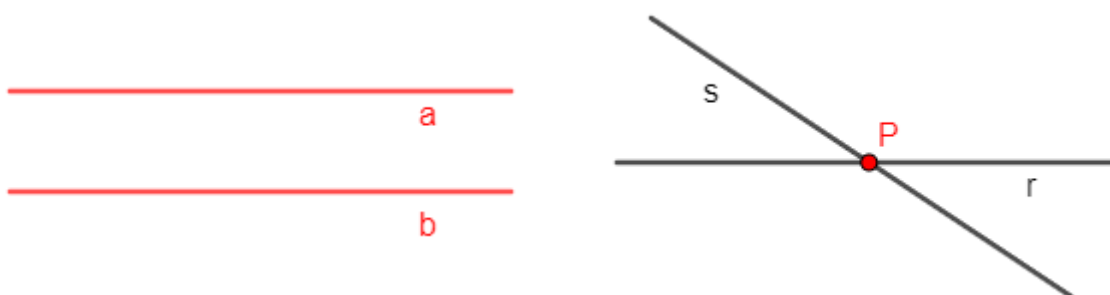
A figura nos mostra um campo de futebol. Cada linha lateral e cada linha de fundo, prolongadas indefinidamente nos dois sentidos, nos sugerem a ideia de reta.

⁵ Pontos não colineares são pontos que não estão na mesma reta.



As linhas laterais do campo, prolongadas, no caso as retas a e b , não se cruzam. A linha lateral e a linha de fundo, prolongadas, no caso as retas a e c ou as retas b e c , cruzam-se em um ponto.

Esse modelo nos mostra que, quando traçamos duas retas em um plano, podem ocorrer as seguintes possibilidades:



As retas a e b não se cruzam, ou seja, não possuem pontos em comum. Dizemos, então, que a e b são retas paralelas e indicamos $a//b$.

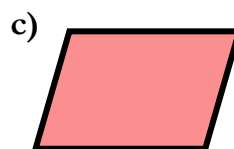
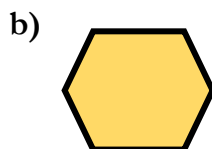
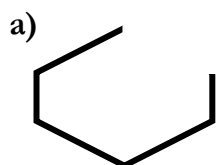
As retas r e s se cruzam em um único ponto (ponto P), ou seja, possuem apenas um ponto em comum. Dizemos, então, que r e s são retas concorrentes.

As retas c e d podem coincidir, ou seja, podem estar ocupando o mesmo lugar no plano, e neste caso dizemos que c e d são retas coincidentes.



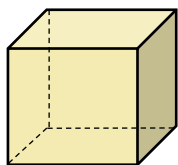
ATIVIDADES

1. Quantos segmentos de reta estão destacados em cada uma das figuras?

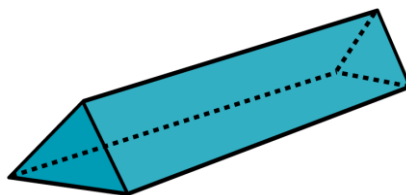


2. Cada segmento que você vê destacado nos sólidos abaixo, chama-se aresta. Quantas arestas temos em cada um deles?

a)



b)



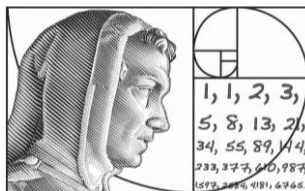
3. Observando a figura abaixo, temos que M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Se $\text{med}(\overline{AB}) = x$ e $\text{med}(\overline{BC}) = y$, qual é a expressão algébrica que representa $\text{med}(\overline{MN})$?



4. Quantas retas você pode traçar passando por um ponto de um plano?
5. Quantas retas você pode traçar passando por dois pontos distintos de um plano?
6. Se a intersecção de duas retas de um mesmo plano é vazia, como podem ser essas duas retas?
7. São dados três pontos A, B e C, não alinhados, de um plano. Quantas semirretas com origem em cada um desses pontos e passando por um dos outros pontos podem ser traçadas?

8. Usando as palavras *ponto*, *reta* ou *plano*, escreva a ideia que você tem quando vê:

- a) Uma estrela no céu.
- b) Um barbante bem esticado.
- c) Um campo de futebol.
- d) Uma porta de geladeira.
- e) A marca de giz na lousa.
- f) O encontro de duas paredes.
- g) A superfície de um lago.
- h) Um furo de compasso na folha de papel.
- i) Esta folha da apostila de Matemática.
- j) Um fio bem esticado entre dois postes.
- k) Uma pequena mancha no chão.
- l) A lousa da sala de aula.



AULA 70

ÂNGULOS COMPLEMENTARES E SUPLEMENTARES

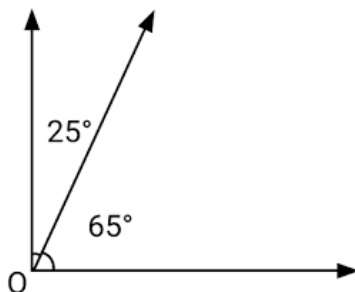
Nesta aula, estudaremos os ângulos complementares e suplementares.

ÂNGULOS COMPLEMENTARES

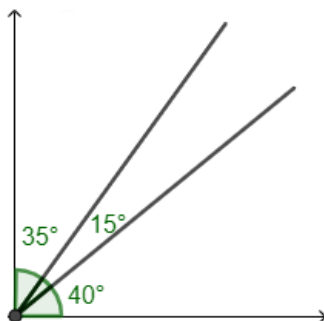
Definição: dois ou mais ângulos são **complementares**, se e somente se a soma de suas medidas for 90° .

Exemplos:

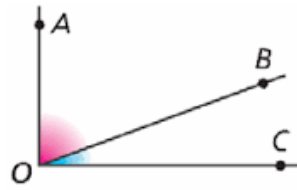
1. Os ângulos 25° e 65° são ângulos complementares.



2. Os ângulos 15° , 35° e 40° são ângulos complementares.



3. O ângulo $\widehat{AOC} = 90^\circ$, razão por que os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOC}$ são complementares.



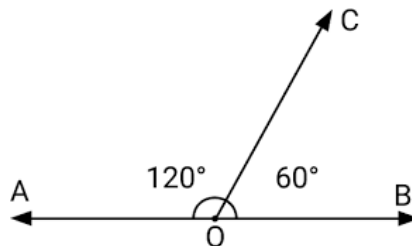
$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 90^\circ$$

ÂNGULOS SUPLEMENTARES

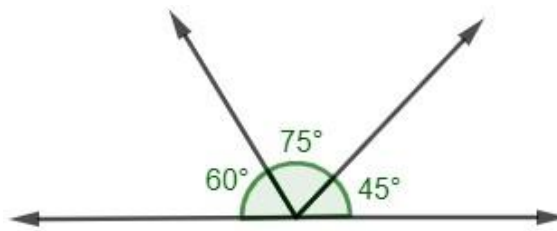
Definição: dois ou mais ângulos são **suplementares**, se e somente se a soma de suas medidas for 180°

Exemplos:

1. Os ângulos de 60° e 120° são ângulos suplementares.



2. Os ângulos de 45° , 60° e 75° são ângulos suplementares.



ATIVIDADES

1. Determine a medida do complemento de um ângulo de:

a) 35°

c) 69°

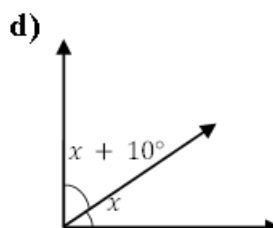
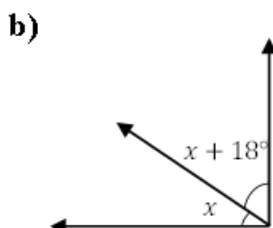
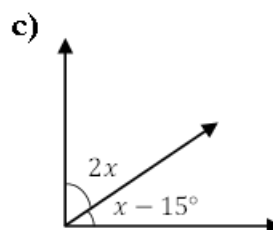
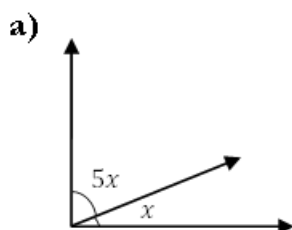
b) 40°

d) 12°

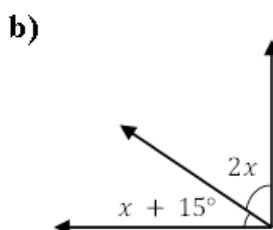
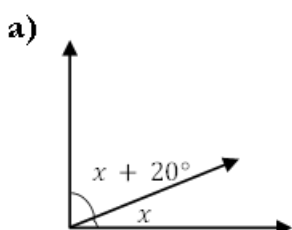
2. A medida de um ângulo é igual à medida do seu complemento aumentada de 70° . Qual é a medida desse ângulo?

3. Sabendo que a medida de um ângulo é igual ao quádruplo da medida do seu complemento, determine a medida desse ângulo.

4. Calcule x , sabendo que os ângulos são complementares:



5. Calcule x sabendo que os ângulos são complementares:



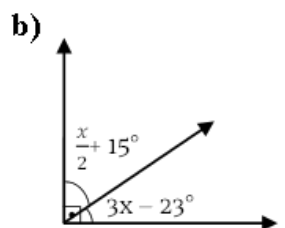
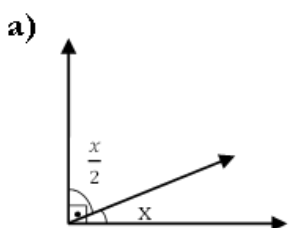
6. A medida de um ângulo é a metade da medida do seu complemento. Calcule a medida desse ângulo.

7. O dobro do complemento de um ângulo aumentado de 20° é igual a 70° . Calcule esse ângulo.

8. Dois ângulos são complementares, e suas medidas são x e y . Sabe-se, também, que o dobro da medida do menor ângulo é igual à medida do maior, aumentada de 30° . Monte um sistema de duas equações e calcule as medidas x e y desses dois ângulos.

9. Calcule a medida de um ângulo que é igual ao dobro do seu complemento.

10. Calcule o x :



11. Determine a medida do suplemento de um ângulo de:

a) 75°

c) 150°

b) 135°

d) 9°

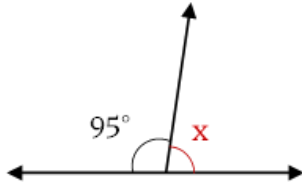
12. A medida de um ângulo é igual à terça parte da medida do seu suplemento. Qual é a medida desse ângulo?

13. O triplo da medida de um ângulo é igual ao dobro da medida do seu suplemento. Pede-se a medida desse ângulo.

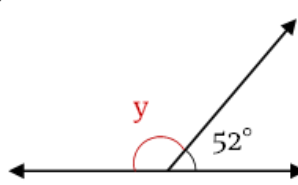
14. A medida do suplemento de um ângulo é igual ao quádruplo da medida do complemento desse mesmo ângulo. Quanto mede esse ângulo?

15. Calcule o valor de x , y e z :

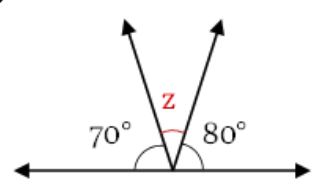
a)



b)

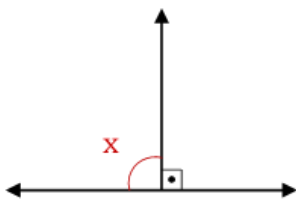


c)

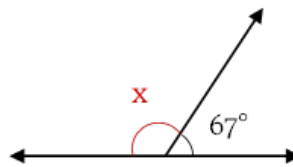


16. Determine o valor de x :

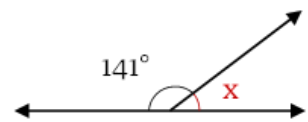
a)



b)

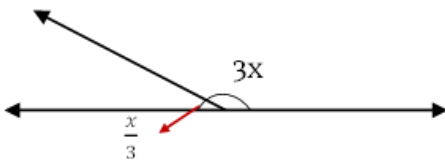


c)

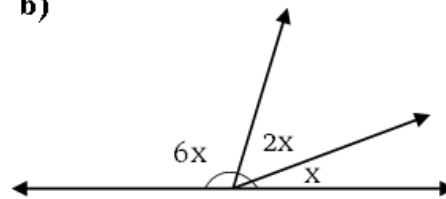


17. Calcule x , sabendo que os ângulos são suplementares:

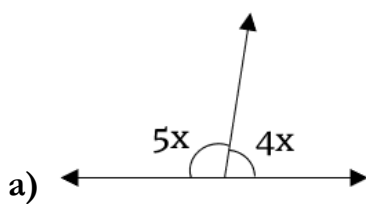
a)



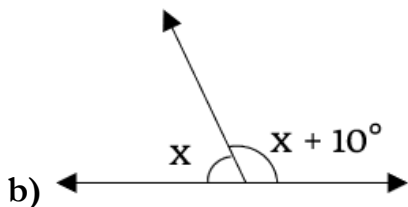
b)



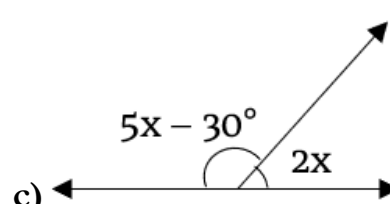
18. Calcule x , sabendo que os ângulos são suplementares:



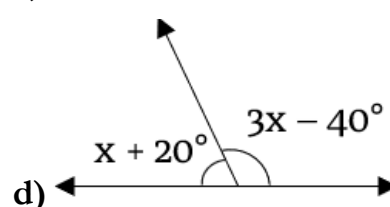
a)



b)

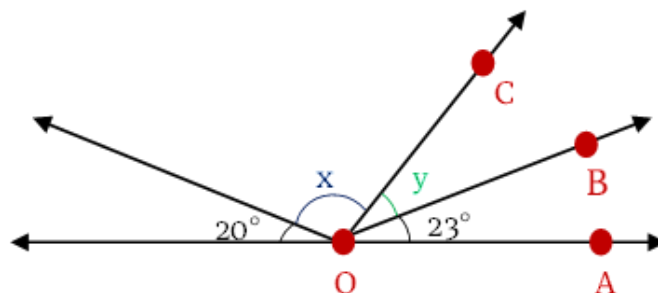


c)

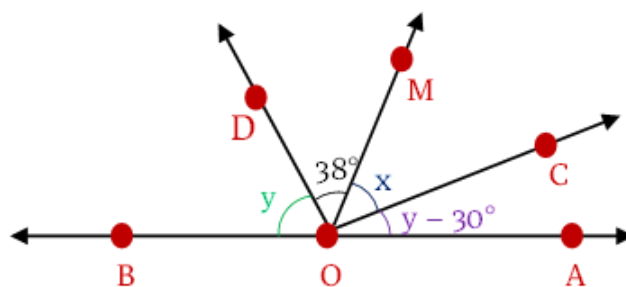


d)

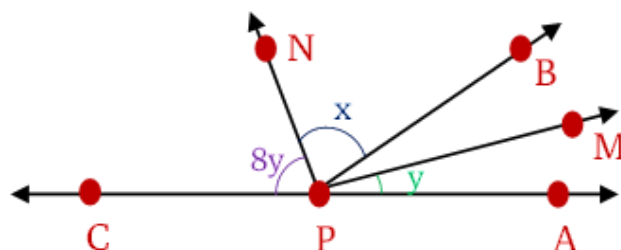
19. Sabendo-se que $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOC}$, quais são as medidas x e y indicadas na figura?



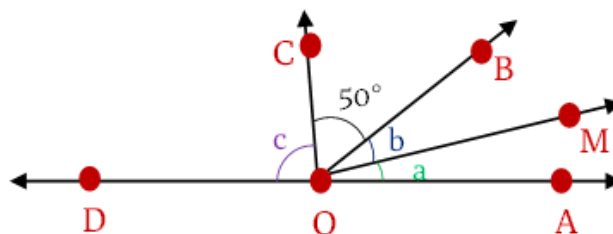
20. Na figura seguinte, $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{COD}$. Nessas condições, dê as medidas de x e y indicadas.

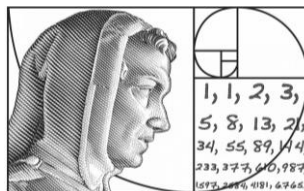


21. Sabendo que $\overrightarrow{PM}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{APB}$ e $\overrightarrow{PN}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{BPC}$, determine a medida de x indicada na figura.



22. Sabendo que $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$, escreva uma expressão algébrica que indique a medida c .





AULA 73

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO



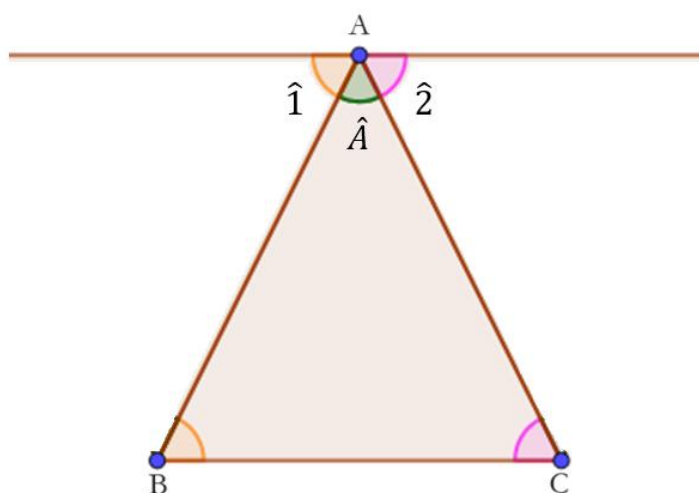
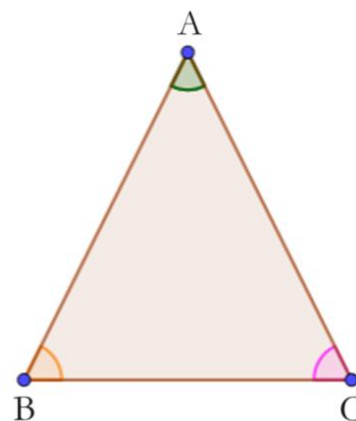
esta aula, estudaremos a soma dos ângulos internos de um triângulo. Existe um teorema matemático falando especificamente da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Teorema: Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180° .

Demonstração: Consideremos um triângulo ABC . Vamos provar que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Traçando uma reta passando pelo vértice A do triângulo que seja perpendicular a base $\overline{BC}$, temos que:



Os ângulos $\hat{1}$, $\hat{2}$ e $\hat{A}$ são suplementares, isto é,

$$\hat{A} + \hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$$

Os ângulos $\hat{1} \equiv \hat{B}$ e $\hat{2} \equiv \hat{C}$ por serem internos. Então, temos que:

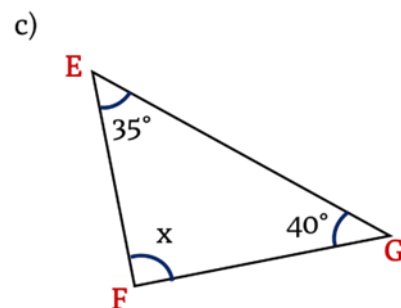
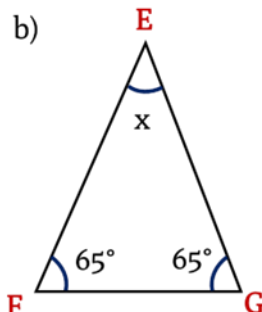
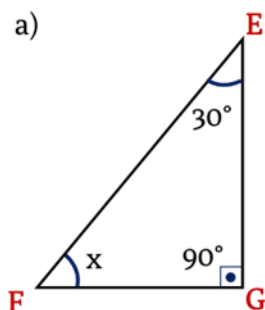
$$\hat{A} + \hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

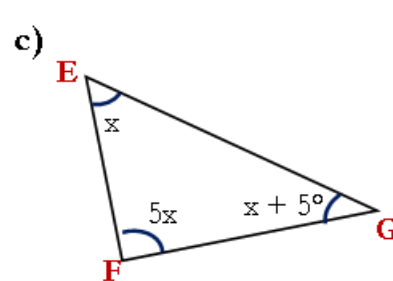
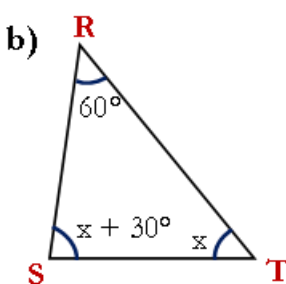
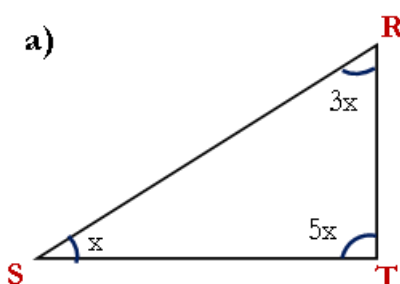
Portanto, em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180° .

ATIVIDADES

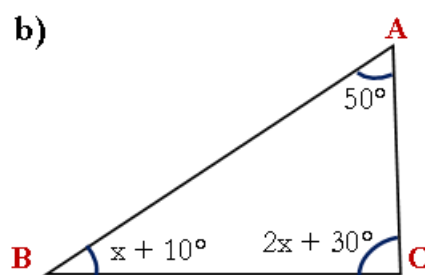
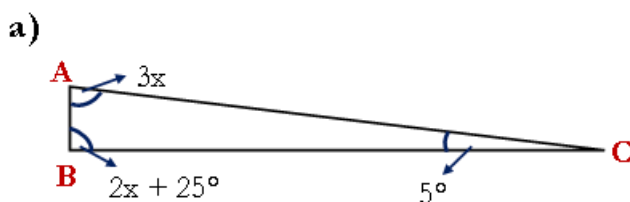
1. Determine x em cada um dos triângulos:



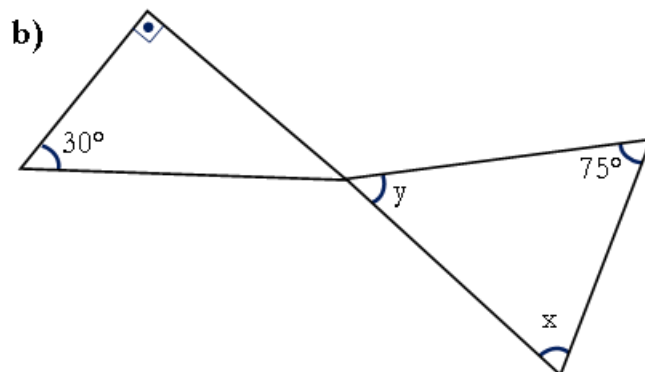
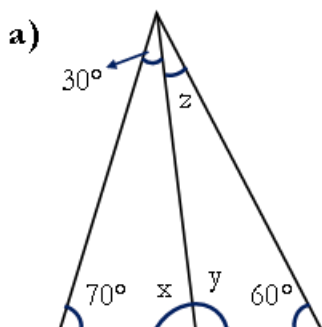
2. Determine x em cada um dos triângulos:



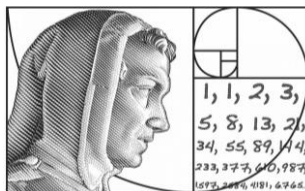
3. Determine x em cada um dos triângulos:



4. Calcule os ângulos indicados pelas letras:



5. Demonstre que a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em 180° .



AULA 78

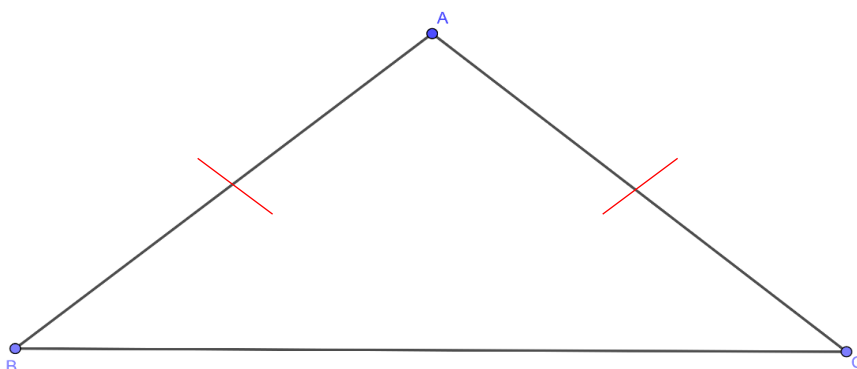
TRIÂNGULOS ISÓSCELES



esta aula, estudaremos um teorema importante envolvendo os triângulos isósceles.

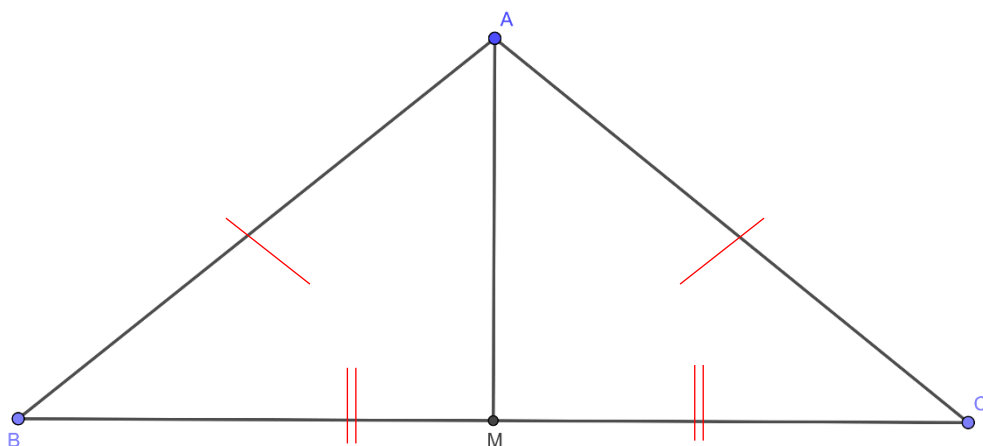
Dos casos de congruência, decorre o seguinte teorema para os triângulos isósceles.

Teorema: Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.



Demonstração: Seja dado o triângulo isósceles $\triangle ABC$, de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ congruentes.

Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$, tal que $\overline{MB} = \overline{MC}$. Traçando o segmento $\overline{AM}$, temos que:



Pelo caso L.L.L., os $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$, pois:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &\equiv \overline{AC} \\ \overline{BM} &\equiv \overline{CM} \Rightarrow \triangle ABM \equiv \triangle ACM \\ \overline{MA} &\equiv \overline{MA}\end{aligned}$$

Por consequência, temos que:

$$\begin{aligned}\hat{A} &\equiv \hat{A} \\ \hat{B} &\equiv \hat{C} \\ \hat{M} &\equiv \hat{M} = 90^\circ\end{aligned}$$

Portanto, os ângulos $\hat{B} \equiv \hat{C}$, o que demonstra o teorema.

ATIVIDADES

1. Demonstre que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.
2. No triângulo isósceles ABC , de base BC , marcamos sobre o lado BC os pontos D e E , de maneira que $BD \equiv EC$. Mostre que os triângulos ADB e AEC são congruentes.
3. Na figura, ABC é um triângulo e $BC = CA = AD = DE$. Determine a medida de $\hat{DAC}$.

