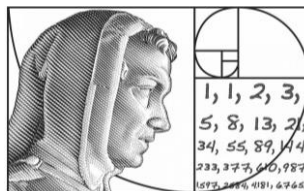

ENSINO FUNDAMENTAL – 8º ANO – MATEMÁTICA VOLUME 2

Apostila do 8º ano do Ensino Fundamental, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



MATEMÁTICA



AULA 81

RELAÇÕES ENTRE LADOS E ÂNGULOS DE UM TRIÂNGULO



esta aula, estudaremos as relações entre lados e ângulos de um triângulo.

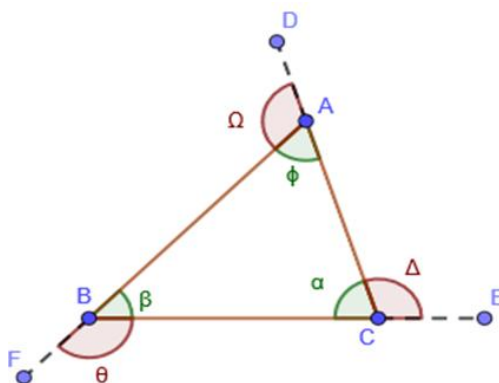
As relações que serão estudadas serão: o maior lado se opõe ao maior ângulo e o maior ângulo se opõe ao maior lado.

Mas antes de adentrarmos nessas duas relações, devemos, primeiramente, entender o conceito de ângulo externo e depois estudarmos o teorema do ângulo externo.

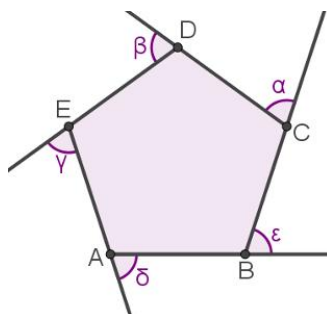
Definição: um ângulo externo é a abertura formada entre o prolongamento de um lado de um polígono e o lado adjacente a ele.

Exemplos:

1. Os ângulos α , β e Φ são ângulos internos do ΔABC e os ângulos Δ , θ e Ω são ângulos externos do ΔABC .

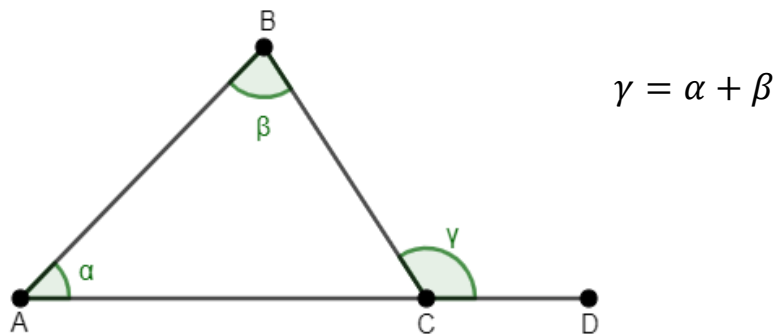


2. Os ângulos α , β , γ , δ e ε são ângulos externos do pentágono $ABCDE$.

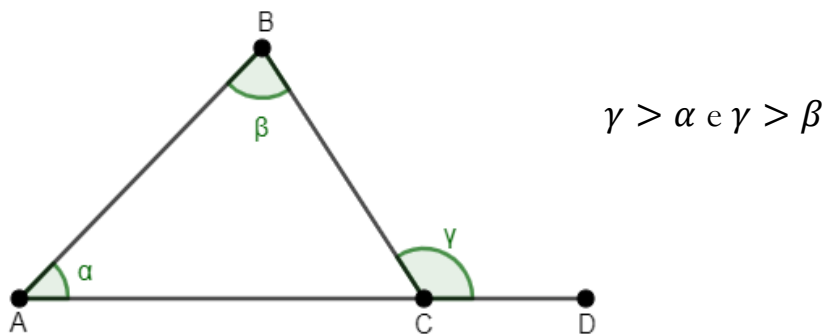


Agora que já definimos o ângulo externo, iremos estudar o teorema do ângulo externo. Este teorema pode ser enunciado de duas formas, como podemos ver a seguir:

Teorema do ângulo externo: fixado um triângulo, a medida de cada ângulo externo é igual à soma das medidas dos seus ângulos internos não adjacentes.



Teorema do ângulo externo: um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer dos ângulos internos não adjacentes.

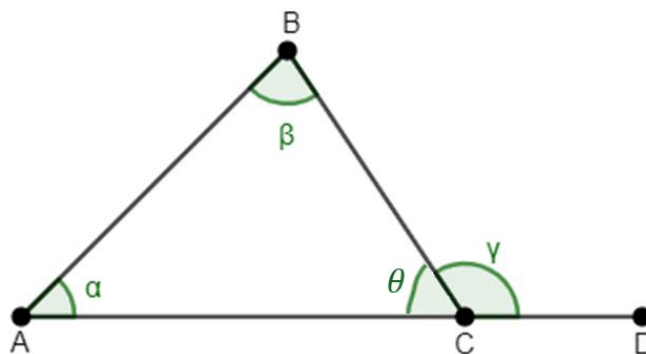


Esses dois enunciados dizem a mesma coisa, pois, se $\gamma = \alpha + \beta$ então $\gamma > \alpha$ e $\gamma > \beta$.

Faremos a demonstração do seguinte enunciado para o ângulo externo.

Teorema do ângulo externo: fixado um triângulo, a medida de cada ângulo externo é igual à soma das medidas dos seus ângulos internos não adjacentes.

Demonstração: Seja um triângulo ΔABC de ângulos α , β e θ e ângulo externo γ .



Dessa forma precisamos demonstrar que

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Para isso, temos que γ e θ são ângulos suplementares. Então:

$$\gamma + \theta = 180^\circ$$

E a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em 180° .

$$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$$

Relacionando as duas equações, temos que:

$$180^\circ = 180^\circ$$

$$\gamma + \theta = \alpha + \beta + \theta$$

$$\gamma = \alpha + \beta + \theta - \theta$$

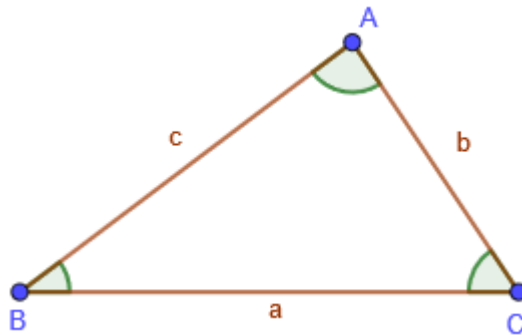
$$\gamma = \alpha + \beta$$

■ Q.E.D

O MAIOR LADO SE OPÕE AO MAIOR ÂNGULO

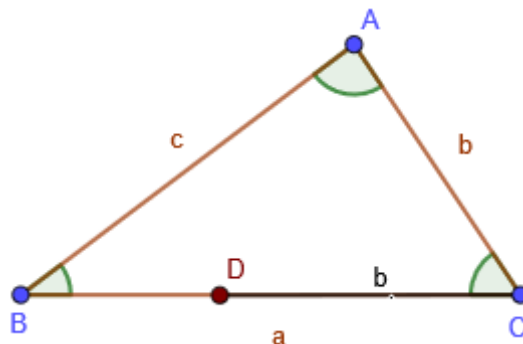
Teorema: Em um triângulo, se um lado é maior que o outro, o ângulo oposto ao maior lado será maior que o ângulo oposto ao lado menor.

Demonstração: Seja um triângulo ΔABC com lados a , b e c .

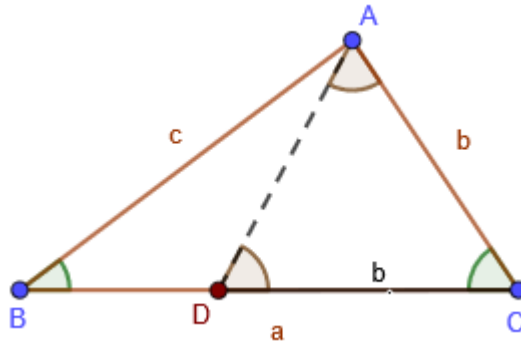


Vamos supor que o lado a é maior que o lado b , dessa forma precisamos demonstrar que o ângulo $\hat{A}$, que é oposto ao lado a , é maior que o ângulo $\hat{B}$, que é oposto ao lado b .

Para isso, iremos tomar um ponto $D \in \overline{BC}$, tal que $\overline{AC} \equiv \overline{CD} = b$, como mostra a imagem abaixo.



Tracemos o segmento $\overline{AD}$, dessa forma, obtemos um triângulo isósceles ΔADC de base $\overline{AD}$, pois, $\overline{AC} \equiv \overline{CD} = b$.



Com isso, temos que $\widehat{ADC} \equiv \widehat{CAD}$. Logo, temos que:

$$\widehat{CAB} > \widehat{ADC}$$

$$\hat{A} > \widehat{ADC}$$

Como o ângulo $\widehat{ADC}$ é um ângulo externo ao $\triangle ABD$, temos, pelo teorema do ângulo externo, que:

$$\widehat{ADC} = \widehat{DAB} + \widehat{ABD}$$

Por consequência do teorema do ângulo externo, temos que:

$$\widehat{ADC} > \widehat{ABD}$$

$$\widehat{ADC} > \hat{B}$$

Portanto, temos que $\hat{A} > \hat{B}$, como podemos ver a seguir:

$$\hat{A} > \widehat{ADC} > \hat{B}$$

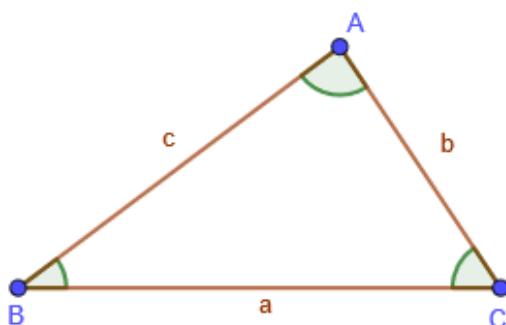
■ Q.E.D

Dessa forma, demonstramos que, dados dois lados diferentes de um triângulo, $a > b$, o ângulo maior é oposto ao lado maior.

Observação: Ao demonstrar esse teorema para os lados a e b , a demonstração para os lados a e c e os lados b e c é análogo.

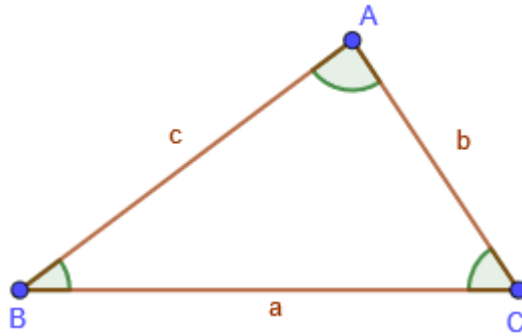
O MAIOR ÂNGULO SE OPÕE AO MAIOR LADO

Teorema: Em um triângulo, se um ângulo é maior que o outro, o lado oposto ao maior ângulo será maior que o lado oposto ao menor ângulo.



$$\hat{A} > \hat{C} \Rightarrow a > b$$

Demonstração: Seja um triângulo $\triangle ABC$ com lados a , b e c .



Vamos supor que $\hat{A} > \hat{B}$, dessa forma precisamos demonstrar que o lado a é maior que o lado b . Em relação aos lados, devemos analisar três casos: $a < b$, $a \equiv b$ e $a > b$.

1º caso: $a < b$

Neste caso, temos uma contradição da hipótese, pois, pelo teorema demonstrado anteriormente, se $a < b$, então $\hat{A} < \hat{B}$, o que contradiz o enunciado que diz que $\hat{A} > \hat{B}$. Logo, esse caso é falso.

2º caso: $a \equiv b$

Os lados a e b não podem ser congruentes, pois, se forem congruentes, teremos um triângulo isósceles e, por consequência, $\hat{A} \equiv \hat{B}$, o que contradiz o enunciado que diz que $\hat{A} > \hat{B}$. Logo, esse caso é falso.

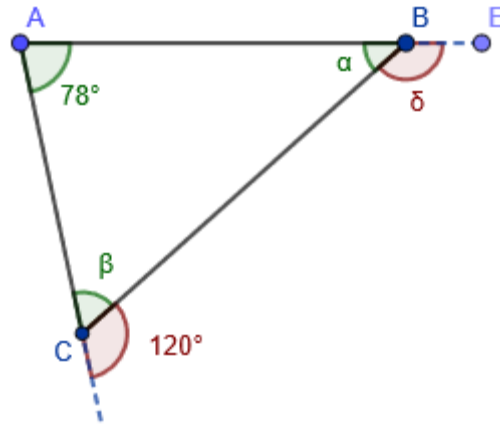
3º caso: $a > b$

O terceiro caso é verdadeiro, por exclusão dos dois primeiros.

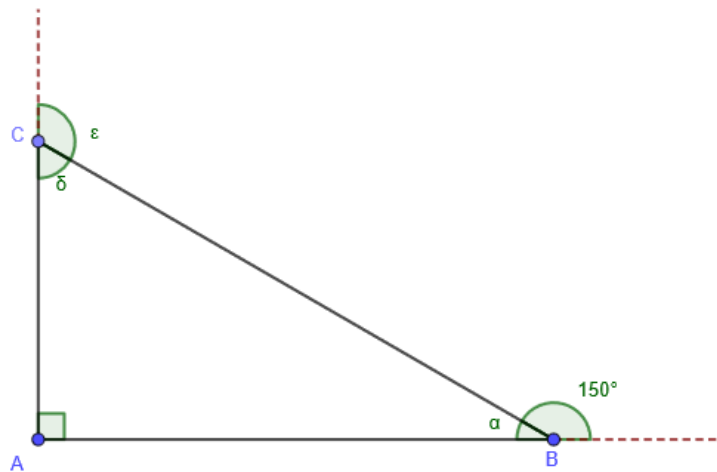
Portanto, se $\hat{A} > \hat{B}$ então $a > b$.

ATIVIDADES

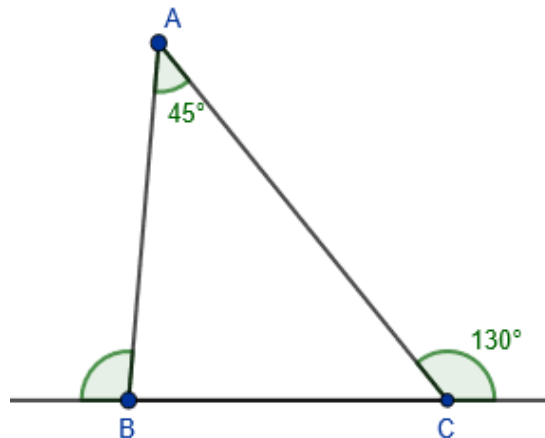
1. Demonstre o teorema do ângulo externo: “Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer dos ângulos internos não adjacentes”.
2. Demonstre que “o maior lado se opõe ao maior ângulo”.
3. Demonstre que “o maior ângulo se opõe ao maior lado”.
4. Indique o valor dos ângulos, identificados por letras gregas, nos triângulos abaixo:
a)



b)



5. Determine o valor de x no triângulo abaixo:

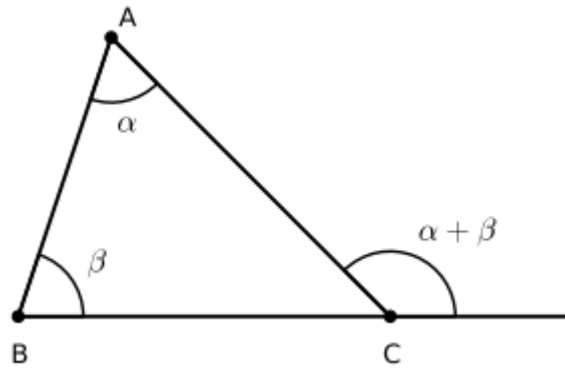


6. Responda:

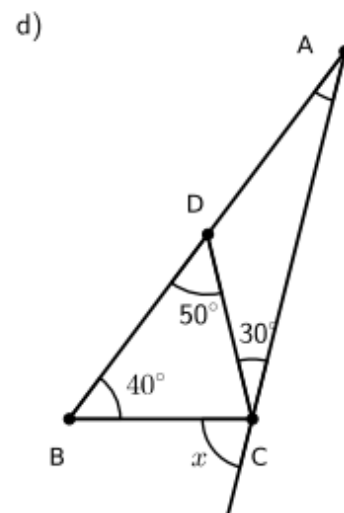
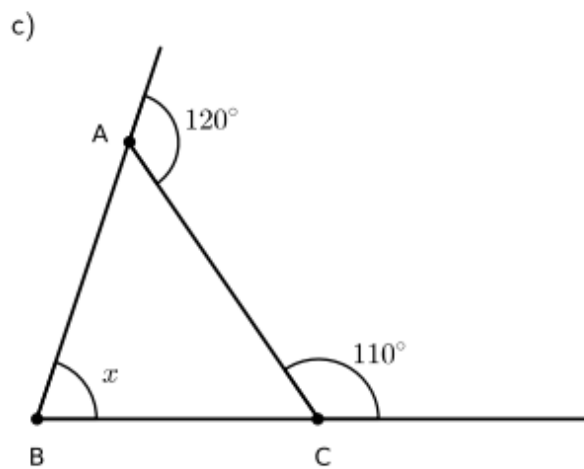
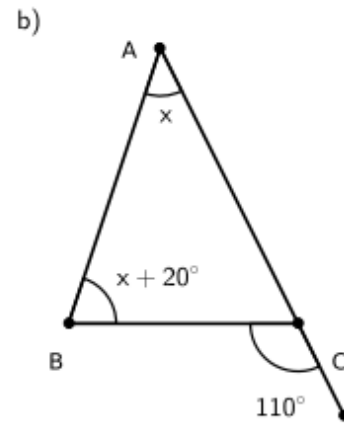
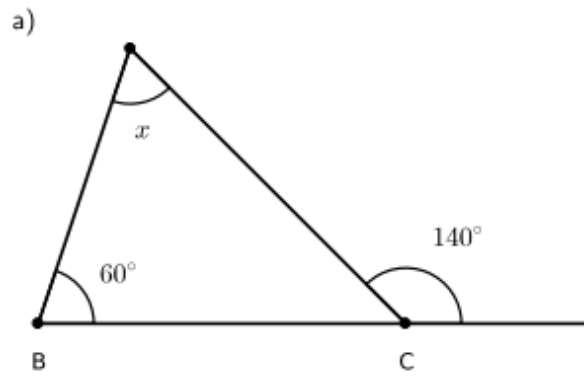
a) Em um triângulo com medidas 3 cm , 4 cm e 5 cm , o maior ângulo se opõe ao lado de medida ...?

b) Em um triângulo com medidas $\frac{7}{4}\text{ cm}$, $1,76\text{ cm}$ e $0,0173\text{ m}$, o maior ângulo se opõe ao lado de medida ...?

7. Na demonstração do teorema do ângulo externo, chegamos à seguinte igualdade: dado um ângulo externo ao triângulo, seu valor é equivalente à soma dos dois ângulos não adjacentes a ele. Veja:

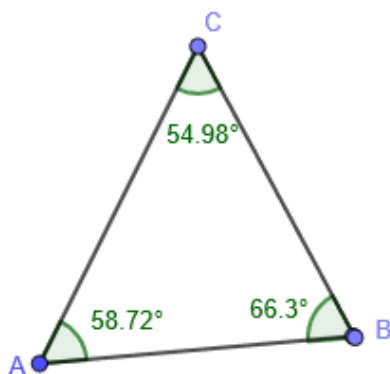


Sabendo disso, encontre o valor de x nas figuras abaixo:

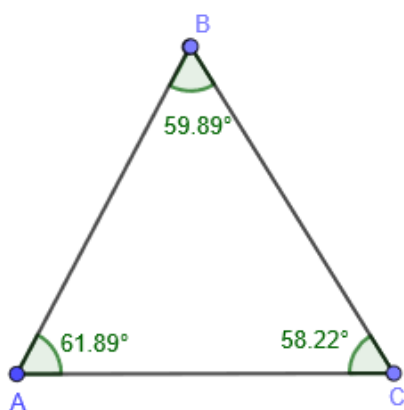


8. Analisando os ângulos abaixo, indique qual dos lados dos triângulos é maior. Depois de analisar, meça com uma régua e verifique sua resposta.

a)

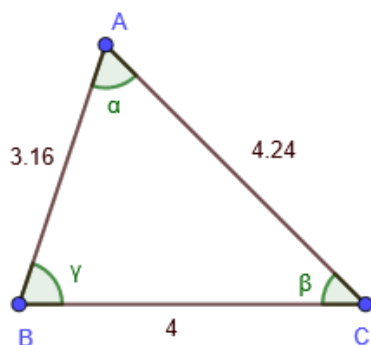


b)

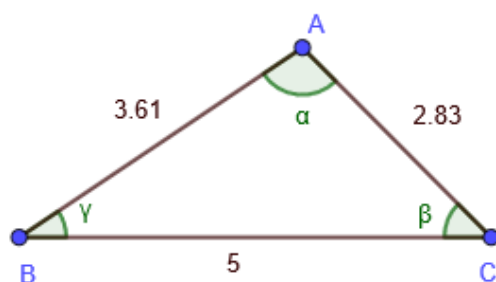


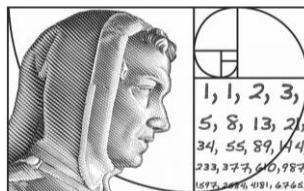
9. Analisando os lados dos triângulos abaixo, indique qual é o maior ângulo:

a)



b)





AULA 85

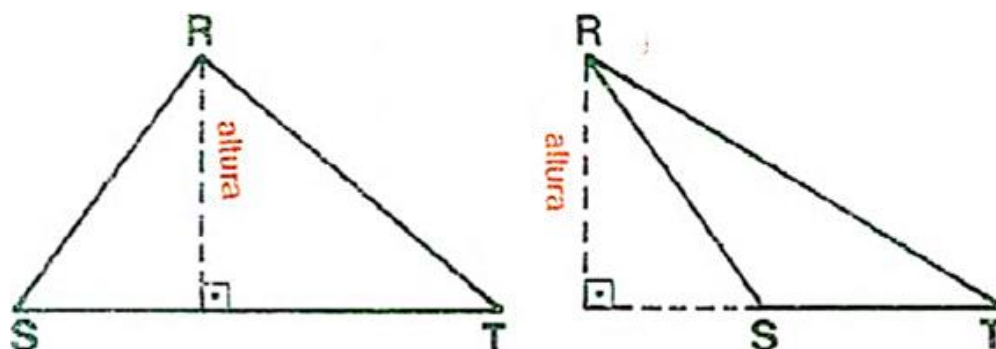
ORTOCENTRO



esta aula, estudaremos o ortocentro.

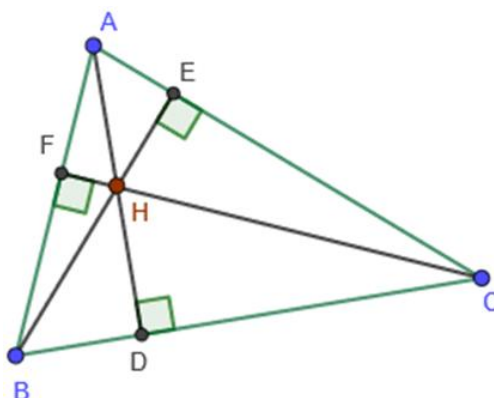
Vimos anteriormente que o ortocentro é um ponto notável do triângulo, e para encontrá-lo devemos traçar as alturas do triângulo. Sendo assim, vamos estudar, primeiramente, o conceito das alturas do triângulo, para podermos encontrar o ortocentro.

Definição: Altura de um triângulo é o segmento da perpendicular, traçada de um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.



Agora, que já sabemos o que é a altura de um triângulo, vamos definir o ortocentro.

Definição: O ortocentro é o ponto de intersecção das alturas do triângulo.



Em outras palavras, podemos dizer que o ortocentro é o ponto do triângulo onde se encontram as alturas desse triângulo.

Notem que na imagem acima, as alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, se encontram no ponto H e o ponto H é o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$.

PROPRIEDADE

Definição: A posição do ortocentro varia dependendo do tipo de triângulo.

O ortocentro pode ser encontrado em três diferentes lugares no triângulo: no interior do triângulo, no exterior do triângulo e no vértice do triângulo.

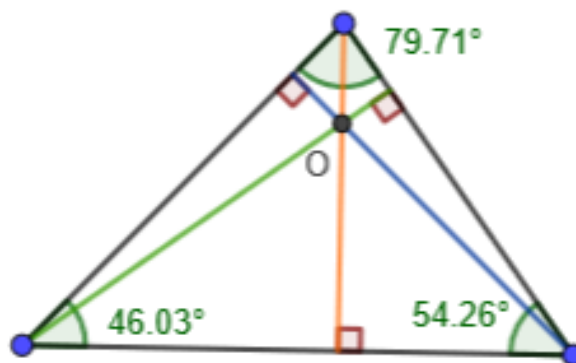
O lugar do ortocentro está relacionado à classificação do triângulo, como veremos a seguir:

ORTOCENTRO NO INTERIOR DO TRIÂNGULO

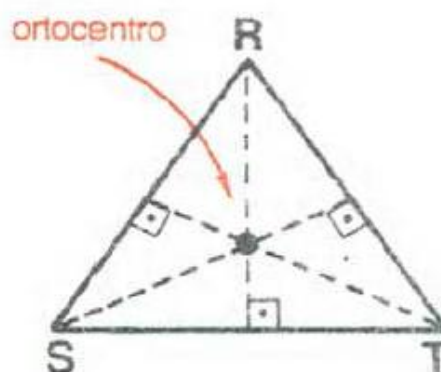
Definição: O ortocentro é encontrado no interior do triângulo quando o triângulo é acutângulo.

Exemplos:

1.



2.



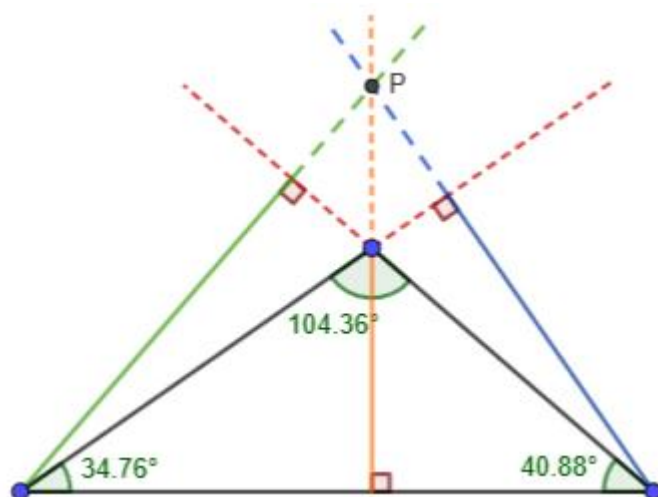
Observação: Nos triângulos acutângulos, o pé de cada altura se encontra no lado oposto ao vértice.

ORTOCENTRO NO EXTERIOR AO TRIÂNGULO

Definição: O ortocentro é encontrado no exterior do triângulo, quando o triângulo é obtusângulo.

Exemplos:

1.



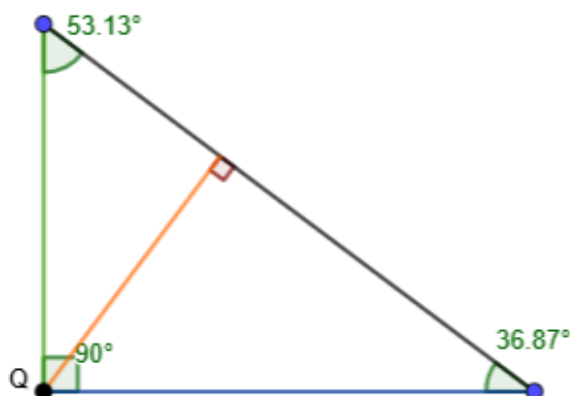
Observação: No triângulo obtusângulo, o pé das alturas dos vértices que contém os ângulos agudos, se encontra no prolongamento do lado oposto ao vértice.

ORTOCENTRO NO VÉRTICE DO TRIÂNGULO

Definição: O ortocentro é encontrado no vértice do triângulo, quando o triângulo é retângulo.

Exemplos:

1.

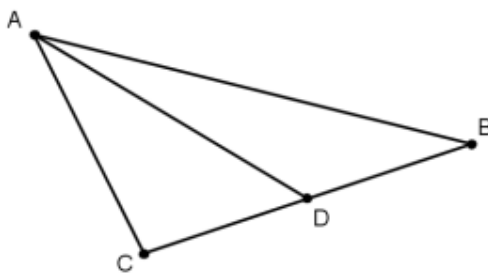


Observação: No triângulo retângulo, o vértice que contém o ângulo reto será o próprio ortocentro, uma vez que os lados que determinam o ângulo reto, são as próprias alturas dos vértices que os contêm.

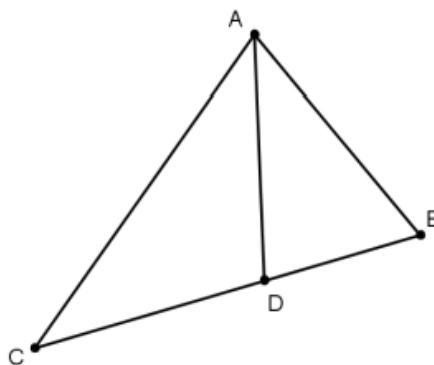
ATIVIDADES

1. Nos triângulos abaixo, classifique as cevianas:

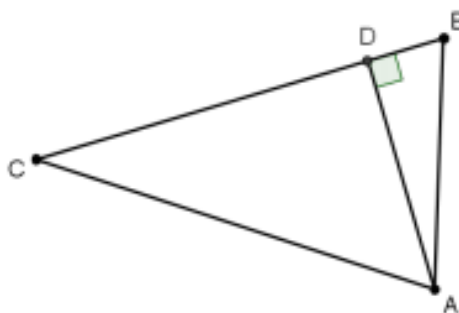
a) AD , sabendo que $BD = CD$



b) AD , sabendo que $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$

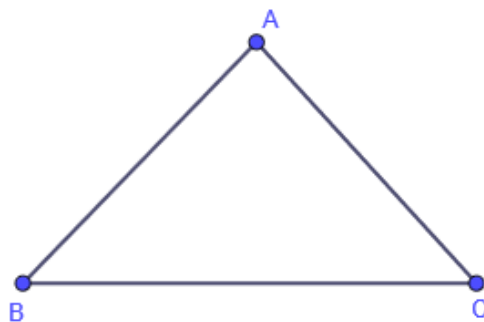


c) AD



2. Encontre o ortocentro dos triângulos abaixo:

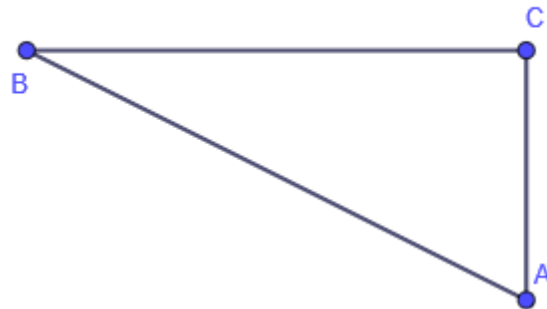
a)



b)



c)



3. O que é a altura de um triângulo? Como se denomina o encontro entre as três alturas de um triângulo?

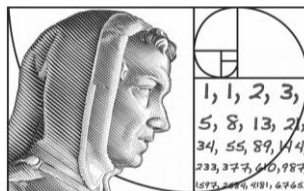
4. Somente pela localização do ortocentro é possível classificá-lo quanto aos seus ângulos. Responda:

a) Se o ortocentro é interior ao triângulo, esse triângulo é _____?

b) Se o ortocentro é exterior ao triângulo, esse triângulo é _____?

c) Se o ortocentro é um dos vértices ao triângulo, esse triângulo é _____?

5. Construa um triângulo com lados 8 cm , 9 cm e 10 cm . Trace as três alturas e indique o ortocentro.

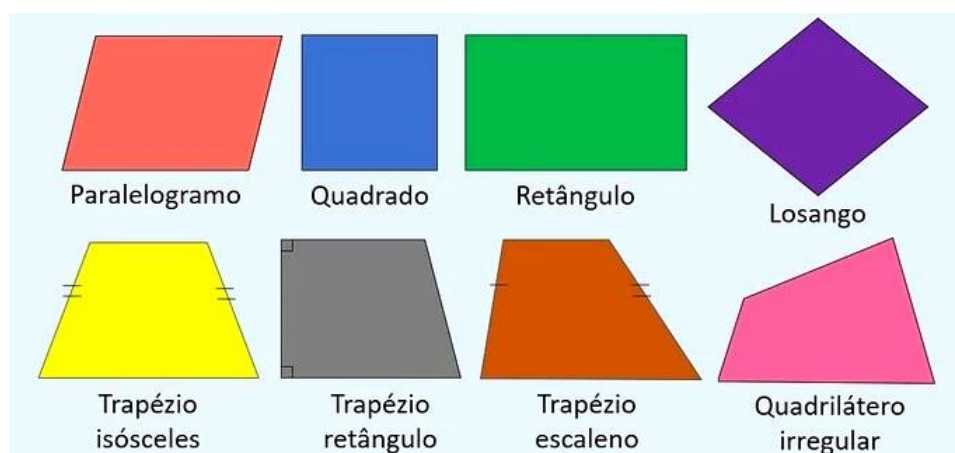


AULA 90

QUADRILÁTEROS

Nesta aula, iniciaremos o nosso estudo dos quadriláteros.

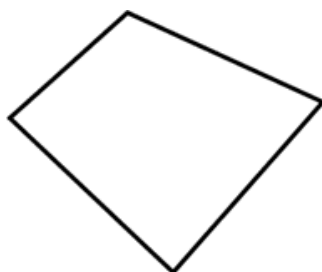
Definição: Quadrilátero são polígonos que possuem quatro lados.



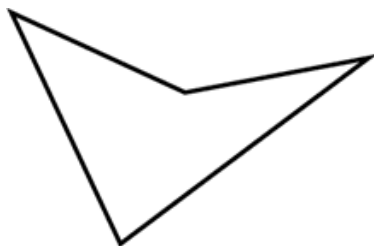
CLASSIFICAÇÃO DOS QUADRILÁTEROS

Os quadriláteros podem ser classificados de duas formas: convexo ou côncavos.

Definição: Um quadrilátero é dito convexo quando, ao tomarmos dois pontos distintos no seu interior, podemos traçar um segmento de reta totalmente no interior do quadrilátero.



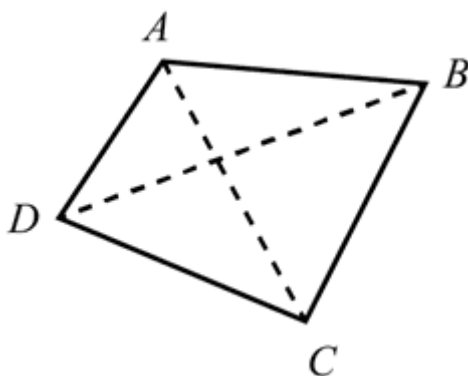
Definição: Um quadrilátero é dito côncavo se existir um segmento de [reta](#) ligando dois pontos do interior do quadrilátero, passando pela região externa da figura.



ELEMENTOS DE UM QUADRILÁTERO

Definição: Os elementos de um quadrilátero são: vértice, lado, ângulo e diagonais.

Dado o quadrilátero $ABCD$ abaixo, observamos que:



Vértices: A, B, C e D .

Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

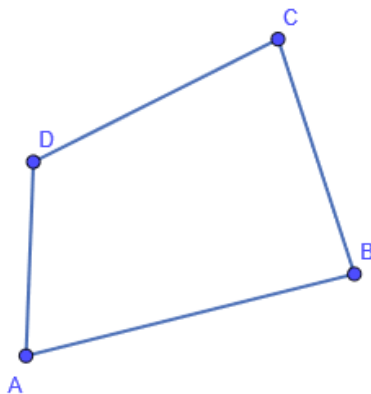
Diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Ângulos: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

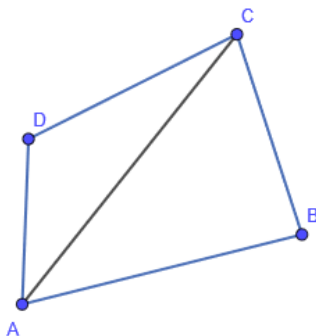
ÂNGULOS INTERNOS

Teorema: A soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer é sempre 360° .

Demonstração: Considere um quadrilátero qualquer $ABCD$.



Trace a diagonal $\overline{AC}$ fazendo com que o quadrilátero seja dividido em dois triângulos, no caso, o ΔABC e ΔCDA .



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta em 180° e o quadrilátero ABCD é formado por dois triângulos, temos que:

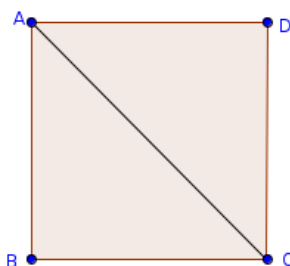
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \text{Ângulos } \Delta ABC + \text{Ângulos } \Delta CDA = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

■ Q.E.D

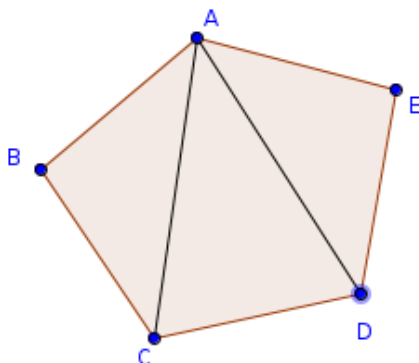
SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO DE n LADOS

Todo polígono pode ser decomposto em triângulos não sobrepostos, a partir das diagonais que saem de um de seus vértices e, essa prática, nos ajuda a entender como podemos encontrar o valor da soma dos ângulos internos de qualquer polígono.

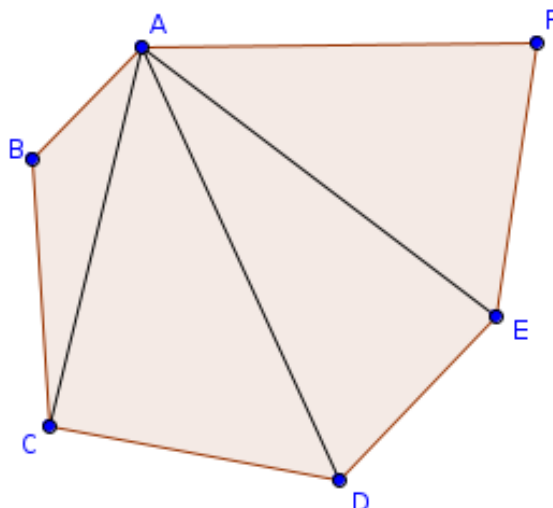
A partir do vértice A do quadrado, podemos traçar **uma** diagonal e, com isso, dividi-lo em **2** triângulos.



A partir do vértice A do pentágono podemos traçar **duas** diagonais e, com isso, dividi-lo em **3** triângulos.



A partir do vértice A do hexágono, podemos traçar **três** diagonais e, com isso, dividi-lo em 4 triângulos.



Observe que a cada um lado aumentado, também aumentamos mais um triângulo, e que o número de triângulos encontrados em cada polígono, é sempre menor que o número de lados do polígono, e essa diferença sempre corresponde a 2.

Dessa forma, em um polígono de n lados teremos $(n - 2)$ triângulos internos e, como a soma dos ângulos internos de um triângulo corresponde a 180° , podemos calcular a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, com a seguinte fórmula:

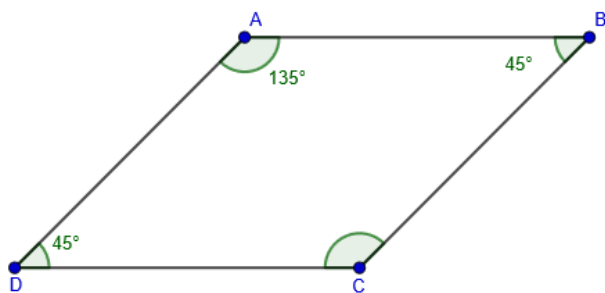
$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

ATIVIDADES

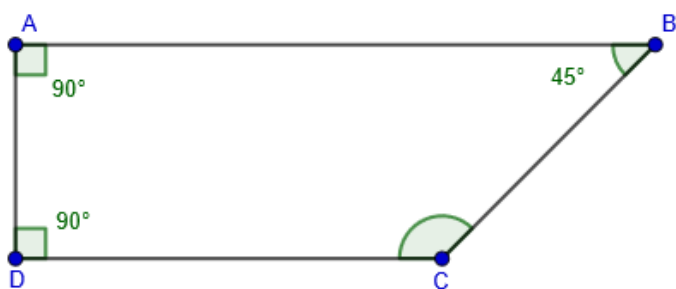
1. Qual é o significado da palavra quadrilátero? Quais são os quadriláteros estudados neste volume?
2. Qual é a diferença entre um quadrilátero côncavo e um quadrilátero convexo?
3. A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é encontrada pela seguinte fórmula: $18n - 360$. Reproduza em seu caderno a explicação de como se chegou a esta fórmula. Depois responda:
 - a) Em um pentágono a soma dos ângulos internos é _____.
 - b) Em um octógono a soma dos ângulos internos é _____.
4. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é sempre 360° . Demonstre este resultado.

5. Encontre a medida do ângulo que resta:

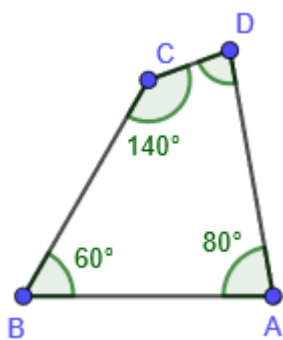
a)



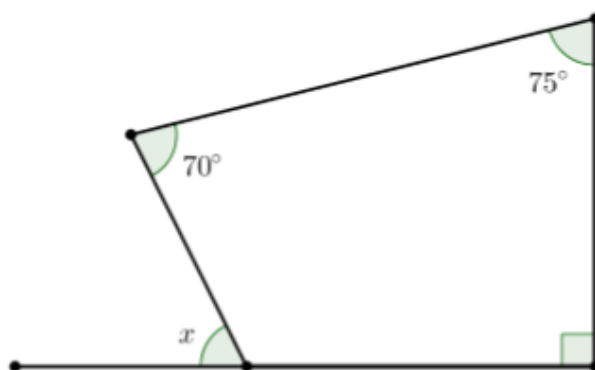
b)

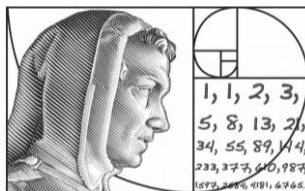


c)



6. Determine o valor de x no quadrilátero abaixo:

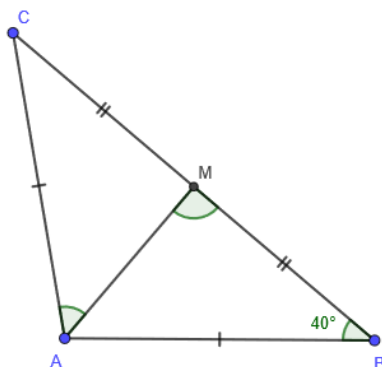




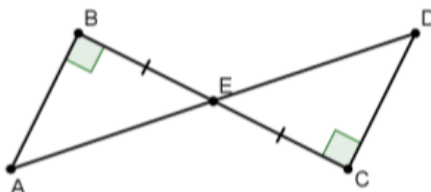
AULA 96

AVALIAÇÃO

1. Demonstre que “o maior lado se opõe ao maior ângulo”.
2. Demonstre que a soma de quaisquer dois lados de um triângulo é sempre maior que o terceiro lado.
3. Defina com suas palavras e desenhos o baricentro, o incentro e o ortocentro.
4. Demonstre que em qualquer triângulo isósceles, a bissetriz do ângulo oposto à base é mediadora relativa à base.
5. Num triângulo isósceles ABC , com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, $\overline{AM}$ é mediana. Se $\hat{B} = 40^\circ$, determine os ângulos $\hat{MAC} = x$ e $\hat{AMB} = y$.

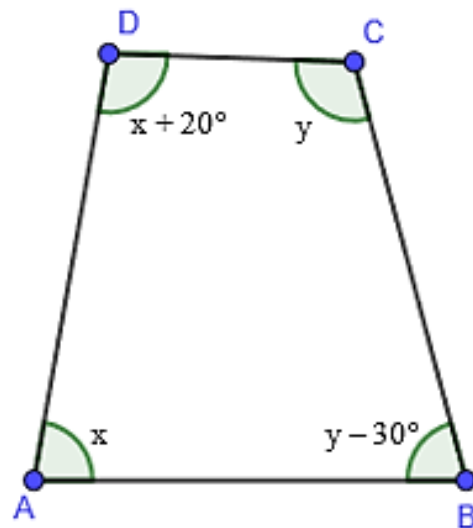


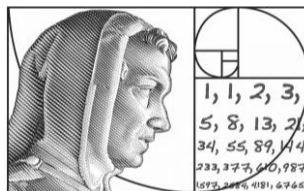
6. Calcular o número de diagonais de um polígono de 25 lados.
7. Dê a definição de paralelogramo e justifique porque um paralelogramo é também um trapézio?
8. Na figura, temos $\overline{AB} = 30$, $\overline{DE} = 50$, $\overline{AE} = 3x - 1$ e $\overline{CD} = 2y + 8$. Determine os valores de x e y .



9. Demonstre que as diagonais de um retângulo são congruentes.

10. Se ABCD é trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determine x e y :





AULA 99

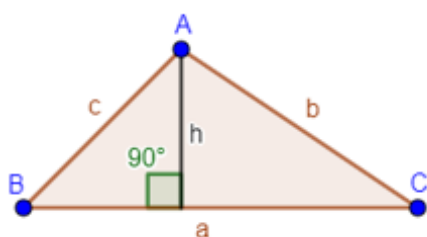
ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Nesta aula, estudaremos as áreas de algumas figuras planas.

As figuras as quais estudaremos suas áreas são: triângulos, quadrado, retângulo, losango e trapézio.

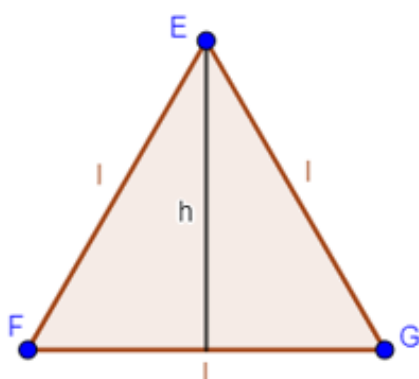
TRIÂNGULOS

Definição: A área de um triângulo pode ser calculada pela seguinte fórmula:



$$A_{\Delta} = \frac{A_{\text{base}} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$$

Além desta fórmula, podemos utilizar outra fórmula para encontrarmos a área de um triângulo equilátero.

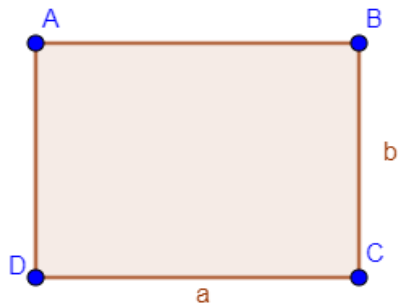


$$A = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

RETÂNGULO

Definição: Retângulo é o paralelogramo em que os quatro ângulos são congruentes e retos.

Definição: A área de um retângulo é dada pelo produto das medidas de dois lados consecutivos, ou seja, a medida da base multiplicada pela medida da altura.

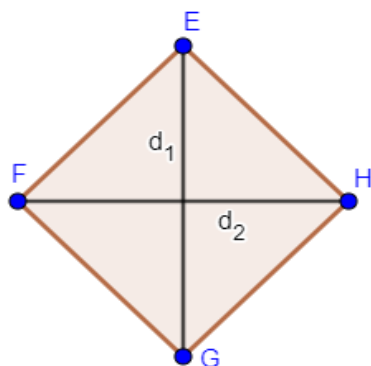


$$A = \text{base} \cdot \text{altura} = a \cdot b = ab$$

LOSANGO

Definição: Losango é o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.

Definição: A área de um losango é dada pela metade do produto das medidas de suas diagonais.

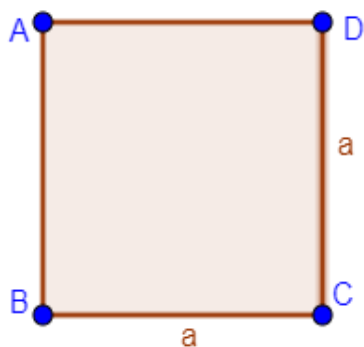


$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

QUADRADO

Definição: Quadrado é o paralelogramo que tem os quatros lados congruentes e os quatro ângulos congruentes (retos).

Definição: A área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida do lado.



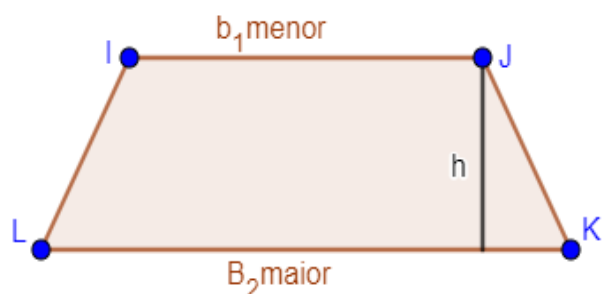
$$A = \text{lado}^2 = \text{lado} \cdot \text{lado} = a \cdot a = a^2$$

TRAPÉZIO

Definição: Todo quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos é denominado trapézio.

Os lados paralelos são chamados bases do trapézio, e a distância entre as bases é a altura do trapézio.

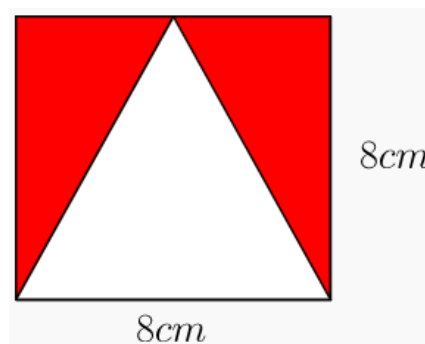
Definição: A área de um trapézio é dada pela metade do produto da altura pela soma das bases.



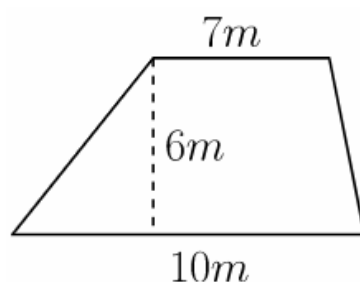
$$A = \frac{(B_{\text{maior}} + b_{\text{menor}}) \cdot \text{altura}}{2} = \frac{(B_{\text{maior}} + b_{\text{menor}}) \cdot h}{2}$$

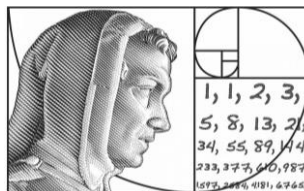
ATIVIDADES

1. Encontre a área da parte colorida em vermelho, sendo que o quadrado tem lado igual a 8 cm.



2. Qual é a área de um triângulo que tem a base igual a 7 m e a altura igual a 6 m?
3. Encontre a área de um quadrado com os lados medindo 12 m.
4. Encontre o perímetro de um quadrado que tem a área igual a 64 m².
5. Um quadrado e um retângulo têm a mesma área. Sabe-se que o retângulo tem 8 m de comprimento e 32 m de altura. Encontre:
 - a) A medida dos lados do quadrado.
 - b) O perímetro do quadrado.
6. Em um losango cujos lados medem 1 cm, a menor de suas diagonais mede 1,2 cm e a maior mede 1,6 cm. Determine a área deste losango.
7. Qual a área do trapézio abaixo?



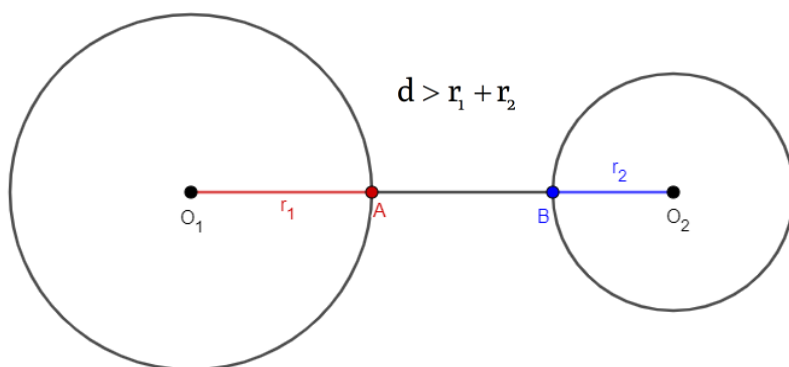


AULA 103

POSIÇÃO RELATIVA DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS



esta aula, estudaremos as posições que duas circunferências podem ocupar em um plano, são elas: externas, tangente externamente, secantes, tangentes internamente, nenhum ponto comum e circunferências concêntricas.

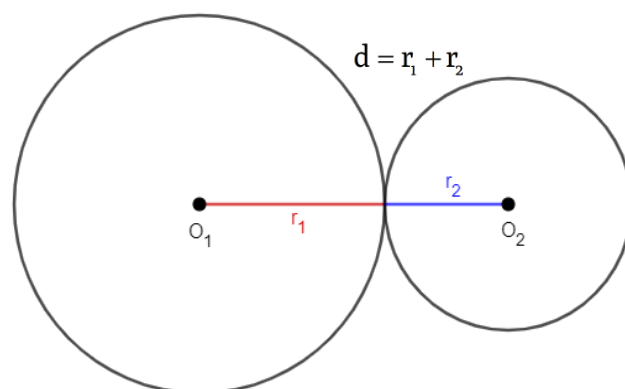


EXTERNAS

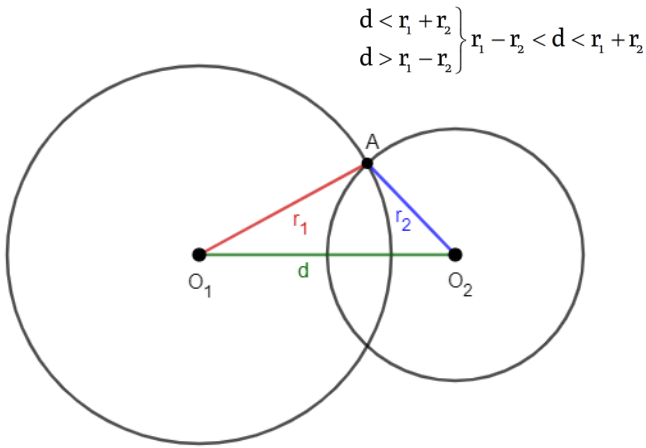
Definição: Seja d a distância entre os centros O_1 e O_2 . Podemos notar que as circunferências são **externas**, pois, neste caso, $d > r_1 + r_2$.

TANGENTES EXTERNAMENTE

Definição: Seja d a distância entre os centros O_1 e O_2 . Podemos notar que as circunferências são **tangentes externamente**, pois, neste caso, $d = r_1 + r_2$.



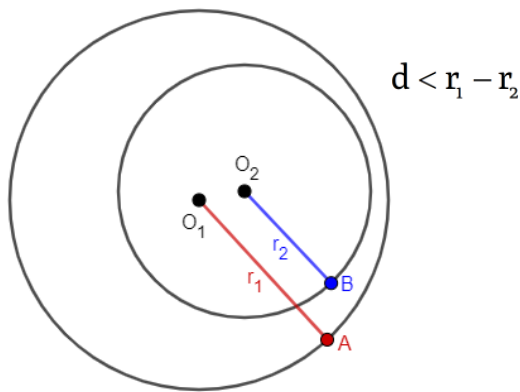
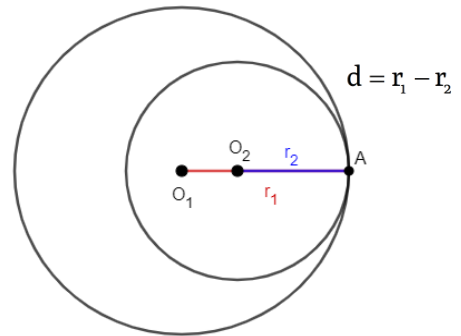
SECANTES



Definição: Seja d a distância entre os centros O_1 e O_2 . Podemos notar que as circunferências são **secantes**, pois, neste caso, $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$.

TANGENTES INTERNAMENTE

Definição: Seja d a distância entre os centros O_1 e O_2 . Podemos notar que as circunferências são **tangentes internamente**, pois, neste caso, $d = r_1 - r_2$.

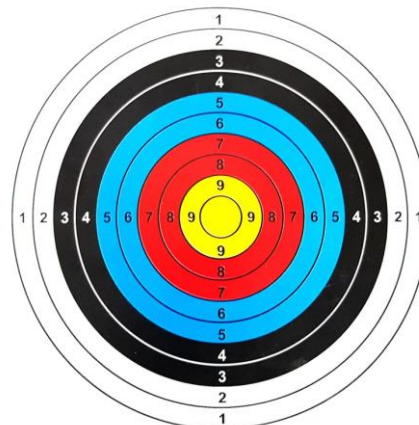
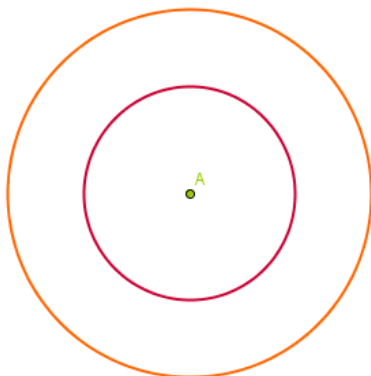


NENHUM PONTO COMUM

Definição: Seja d a distância entre os centros O_1 e O_2 . Podemos notar que as circunferências não têm **nenhum ponto comum**, sendo uma delas interna à outra, pois, neste caso, $d < r_1 - r_2$.

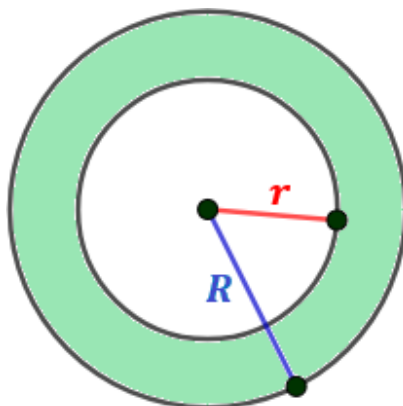
CIRCUNFERÊNCIAS CONCÊNTRICAS

Definição: Duas circunferências, uma interna à outra, que têm o mesmo centro, são chamadas circunferências concêntricas.



Alvo de treinamento de tiro.

A figura plana limitada por duas circunferências concêntricas e de raios distintos, chama-se coroa circular. Na figura abaixo, a parte pintada em verde é a coroa circular.

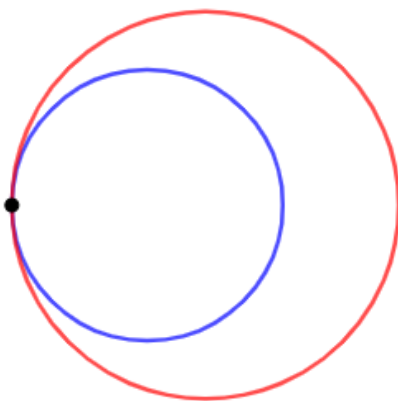


Coroa circular

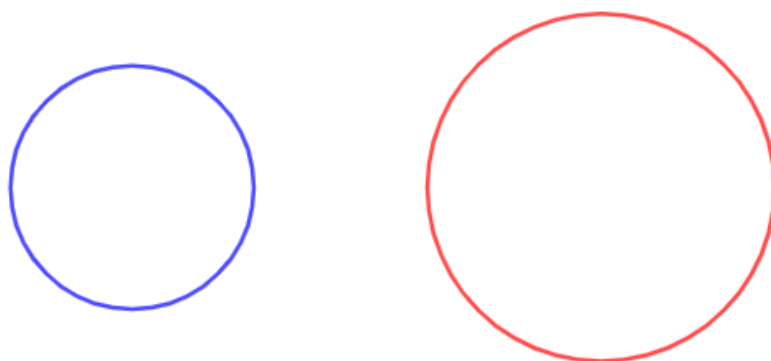
ATIVIDADES

1. Dê o nome das posições ocupadas pelos pares de circunferência:

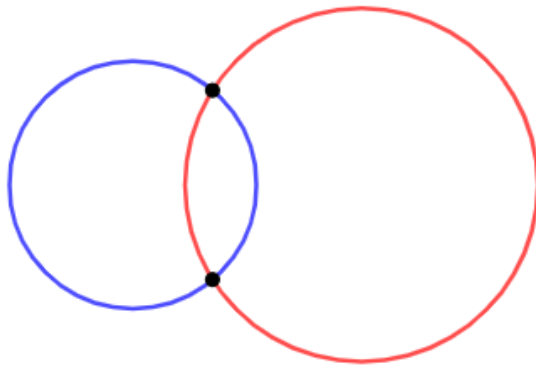
a)



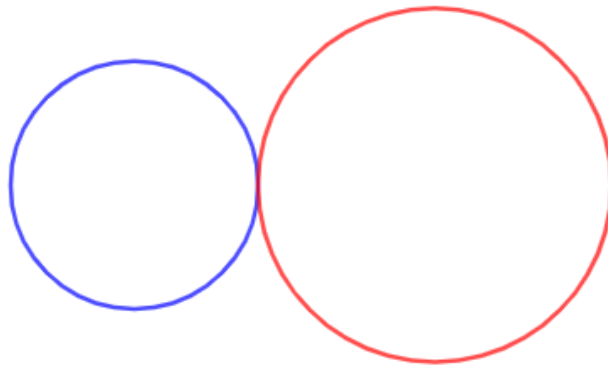
b)



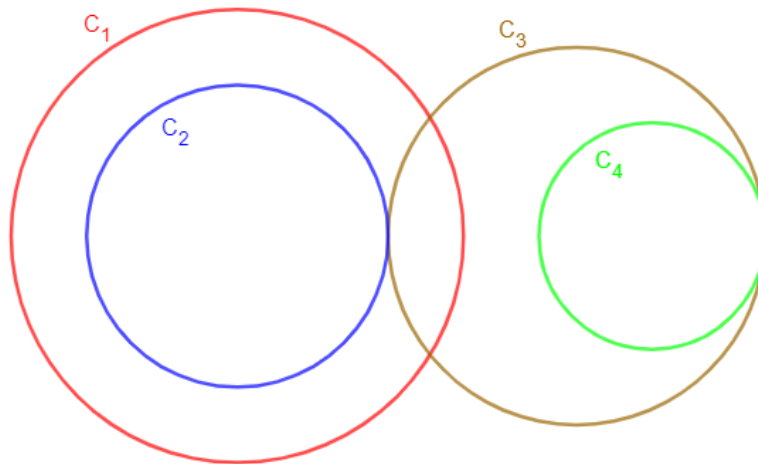
c)



d)



2. Observe a figura e dê a posição relativa das circunferências:



a) C_1 e C_2

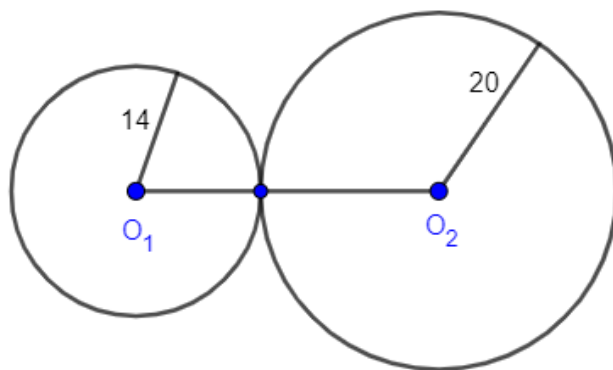
b) C_2 e C_3

c) C_3 e C_4

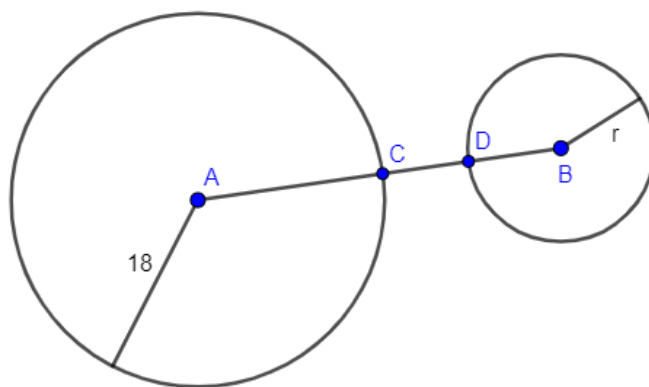
d) C_1 e C_3

e) C_2 e C_4

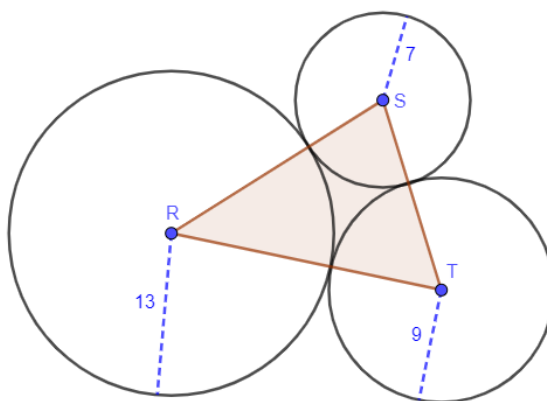
3. Na figura a seguir, os raios estão em centímetros, e seja x a distância entre os centros O_1 e O_2 . De acordo com a figura, determine x .



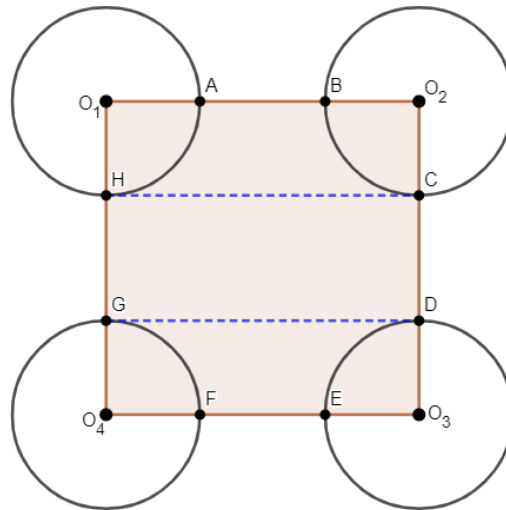
4. Na figura abaixo, a medida do segmento $\overline{CD}$ é 37 cm , e a distância entre os centros A e B é de 65 cm . Nessas condições, determine o comprimento r do raio da circunferência de centro B .



5. Na figura seguinte, as circunferências de centro R , S e T são tangentes externamente, e suas medidas são em centímetros. Nessas condições, qual é o perímetro do triângulo RST ?

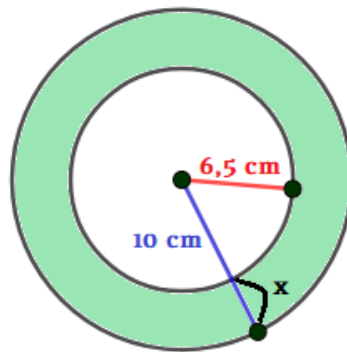


6. Na figura seguinte $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{GH}$, e as circunferências de centros O_1 , O_2 , O_3 e O_4 têm o mesmo raio. Sabendo que a medida do segmento $\overline{AB}$ é 7 cm e que o comprimento de cada raio é 4 cm , determine:



- O perímetro do quadrado $O_1O_2O_3O_4$.
- A área do mesmo quadrado.
- O perímetro do retângulo $CDGH$.

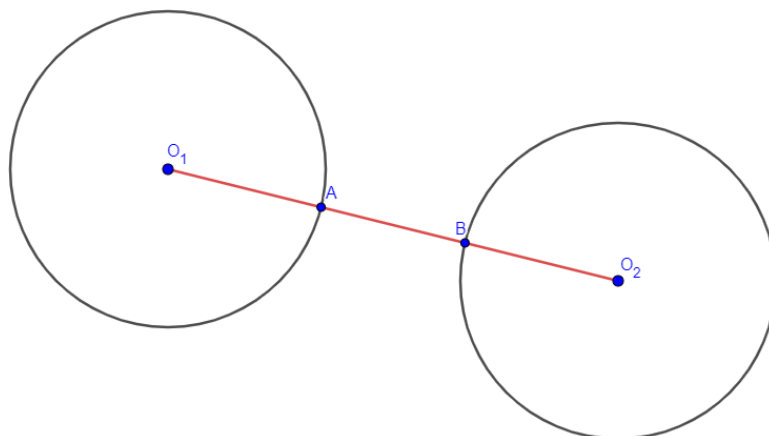
7. Observe que as circunferências da figura abaixo são concêntricas e que a medida x indica o comprimento do raio da coroa circular. Nessas condições, dê a medida x .



8. Temos uma circunferência de centro A e raio x e outra de centro B e raio y . Qual é a posição relativa das duas, quando a distância entre os centros A e B é:

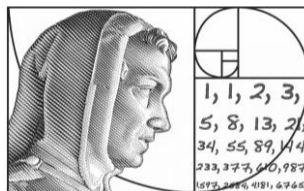
- maior que $(x + y)$;
- igual a $(x + y)$;
- igual a $(x - y)$;
- menor que $(x - y)$.

9. A figura abaixo nos mostra duas circunferências externas. As duas têm o mesmo raio de comprimento x , e a medida do segmento $\overline{AB}$ é y . Escreva o polinômio que indica a distância entre os centros das circunferências.



10. Consideremos duas circunferências, uma de centro A e raio 16 cm , e outra de centro B e raio 10 cm . Dê a posição ocupada pelas duas circunferências quando a distância entre os seus centros é igual a:

- a) 26 cm
- b) 20 cm
- c) 30 cm
- d) 8 cm



AULA 105

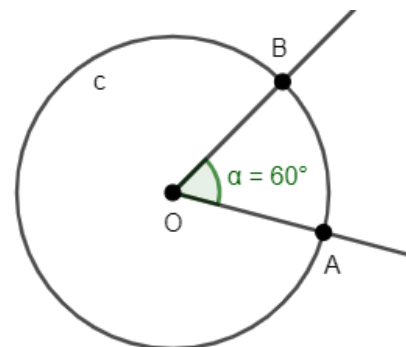
ÂNGULO CENTRAL E ÂNGULO INSCRITO

Nesta aula, estudaremos o ângulo central e o ângulo inscrito na circunferência.

ÂNGULO CENTRAL

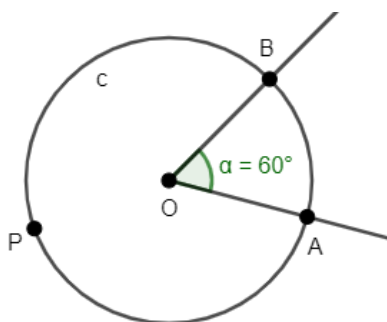
Definição: qualquer ângulo que tenha o vértice no centro de uma circunferência é denominado **ângulo central**.

Quando traçamos um ângulo central na circunferência, podemos notar que este ângulo determina um arco na circunferência. A medida deste arco corresponde ao valor do ângulo central, isto é, a medida do arco na circunferência pode ser dada em graus.



Exemplos:

1. Na figura abaixo, $\widehat{AB}$ é o arco determinado na circunferência pelos lados do ângulo central $A\hat{O}B$.



Temos que:

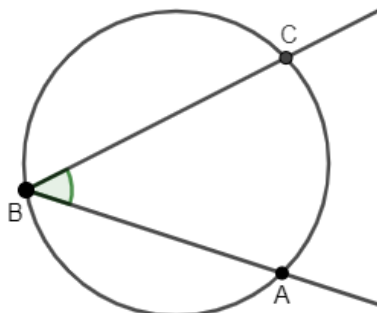
- A medida do arco menor $\widehat{AB}$ é 60° , pois o ângulo central $A\hat{O}B$ mede 60° .
- A medida do arco $\widehat{APB}$ é 300° , pois $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

ÂNGULO INSCRITO

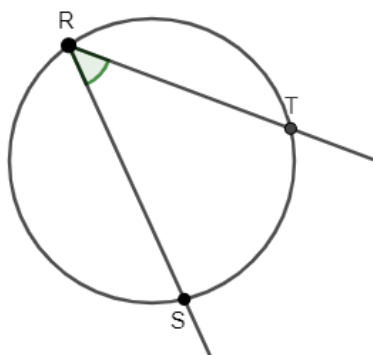
Definição: ângulo inscrito é todo ângulo que tem o vértice na circunferência e seus lados secantes a ela.

Exemplos:

1. A figura $\widehat{ABC}$ é um ângulo inscrito. Ele determina na circunferência o arco $\widehat{AC}$.

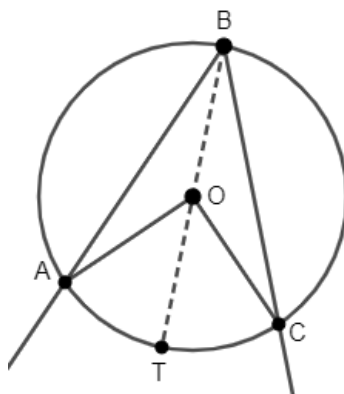


1. A figura $\widehat{SRT}$ é um ângulo inscrito. Ele determina na circunferência o arco $\widehat{ST}$.



A todo ângulo inscrito corresponde um ângulo central, que determina na circunferência o mesmo arco determinado pelo ângulo inscrito.

Na figura a seguir, temos:

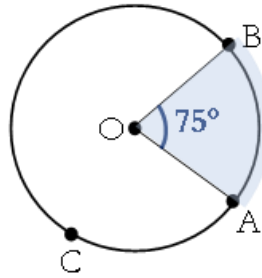


- i) $\widehat{ABC}$ é um ângulo inscrito.
- ii) $\widehat{AOC}$ é um ângulo central correspondente.
- iii) Ambos determinam o mesmo arco $\widehat{AC}$.

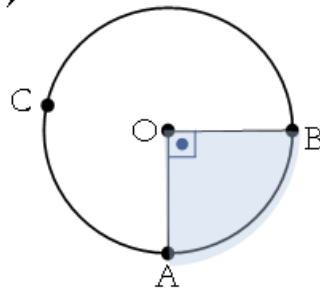
ATIVIDADES

1. Em cada uma das figuras, dê a medida do arco $\widehat{AB}$ e a do arco $\widehat{ACB}$:

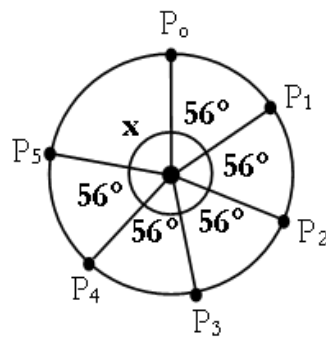
a)



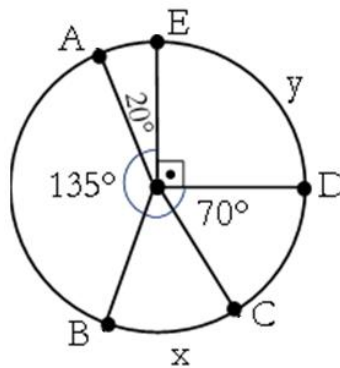
b)



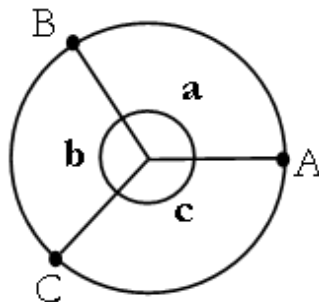
2. Observando a figura, dê o valor da medida x .



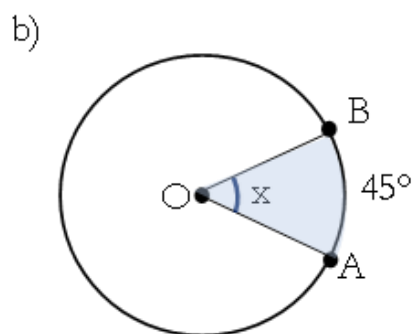
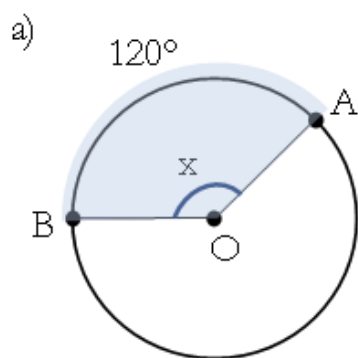
3. Na figura a seguir, calcule o valor de x (medida do arco $\widehat{BC}$) e o valor de y (medida do arco $\widehat{DE}$).



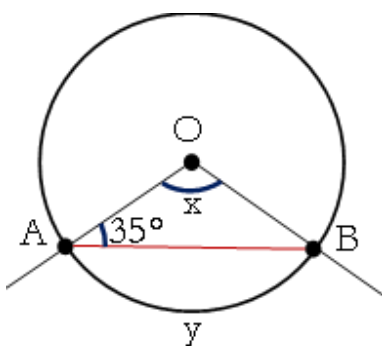
4. Na figura, temos que $a = b = c$, em que a , b e c são as medidas dos ângulos centrais associados a cada arco. Determine a medida dos arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CA}$.



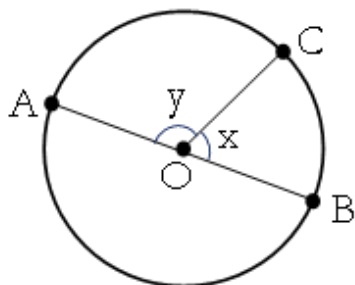
5. Em cada uma das figuras a seguir, calcule a medida x do ângulo central associado ao arco menor $\widehat{AB}$.



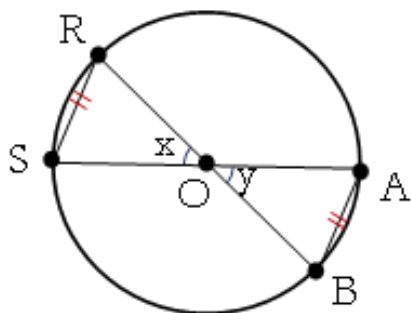
6. Sabendo que o triângulo ΔOAB da figura é isósceles, determine a medida x do ângulo central $\widehat{AOB}$ e a medida y do arco $\widehat{AB}$ associado a esse ângulo central.



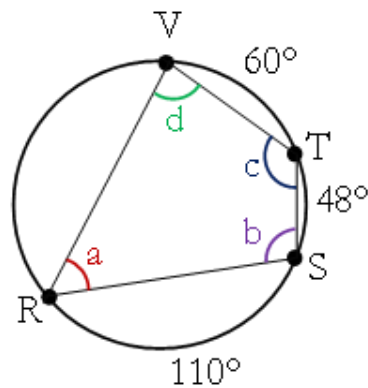
7 Sabendo que o arco $\widehat{BC}$ mede 80° , calcule o valor da expressão $y - x$.



8. Na figura a seguir, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{RS}$ são congruentes. Você pode afirmar que os triângulos ΔAOB e ΔROS são congruentes? Em caso afirmativo, que caso de congruência justifica sua resposta?



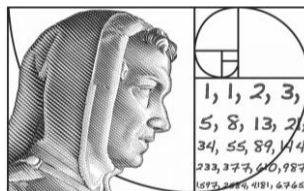
9. Determine as medidas a , b , c e d , indicadas na figura.



10. Em uma circunferência a medida do arco $\widehat{AB}$ é $med(\widehat{AB}) = 2x$; a medida do arco $\widehat{BC}$ é $med(\widehat{BC}) = 3x$; a medida do arco $\widehat{CD}$ é $med(\widehat{CD}) = x + 3$; e a medida do arco $\widehat{DA}$ é $med(\widehat{DA}) = x + 50^\circ$. Determine a medida do ângulo inscrito:

a) $\widehat{BAC}$;

b) $\widehat{BCD}$.



AULA 110

VOLUME DE UM CILINDRO

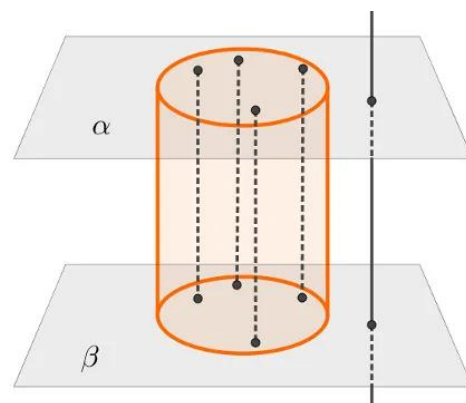


esta aula, estudaremos o volume do cilindro.

O cilindro é uma figura geométrica espacial, isto é, só pode ser definida no espaço tridimensional. Assim, podemos definir o cilindro da seguinte forma:

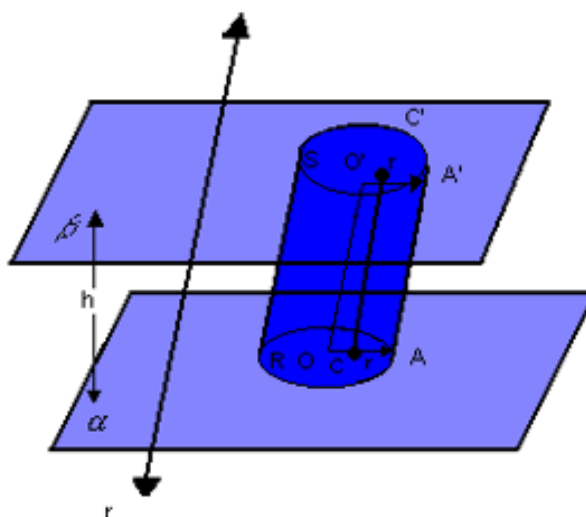
Definição: dados dois planos paralelos α e β , um círculo C no plano α e uma reta r secante a esses planos, um cilindro é o conjunto de segmentos paralelos a r que possuem como extremidade o círculo C no plano α e algum ponto do plano β .

O raio do cilindro é definido como raio do círculo C , e a altura do cilindro é definida como a distância entre os planos α e β .



ELEMENTOS DO CILINDRO

Dado o cilindro a seguir, consideramos os seguintes elementos:



Bases: os círculos de centro O e O' e raios r .

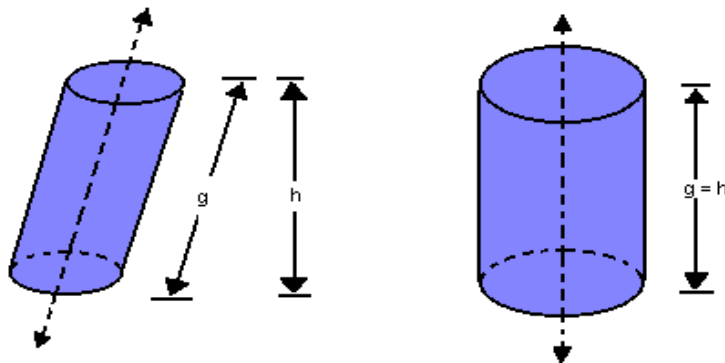
Altura: a distância h entre os planos α e β .

Geratriz: qualquer segmento de extremidades nos pontos das circunferências das bases (por exemplo, $\overline{AA'}$) e paralelo à reta r .

CLASSIFICAÇÃO DO CILINDRO

Um cilindro pode ser classificado de duas formas: circular oblíquo e circular reto

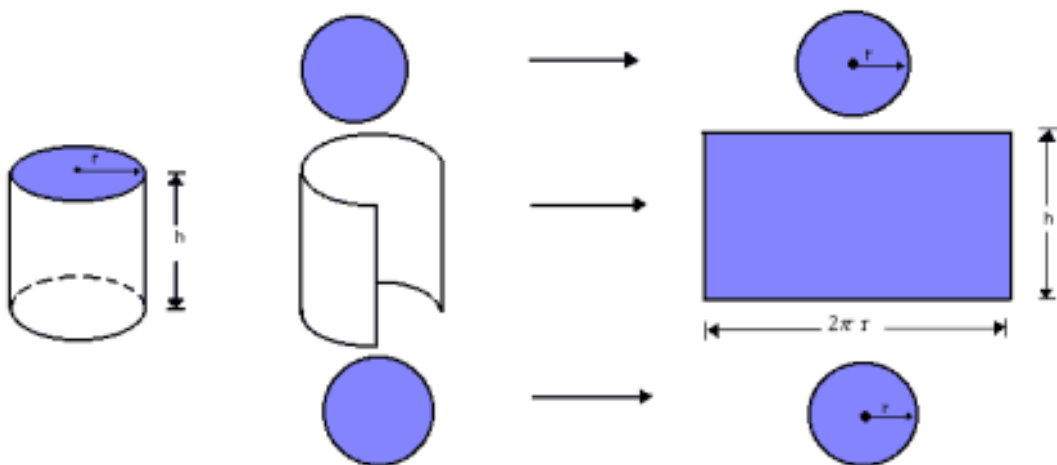
- **circular oblíquo:** quando as geratrizes são oblíquas às bases;
- **circular reto:** quando as geratrizes são perpendiculares às bases.



ÁREA DE UM CILINDRO

Em um cilindro, consideramos as seguintes áreas: área lateral, área da base e área total.

- **Área lateral:** Podemos observar a área lateral de um cilindro fazendo a sua planificação:



Assim, a área lateral do cilindro reto cuja altura é h e cujos raios dos círculos das bases são r é um retângulo de dimensões $2\pi r$ e h :

$$A_L = 2\pi r h$$

- **Área da base (AB):** área do círculo de raio r .

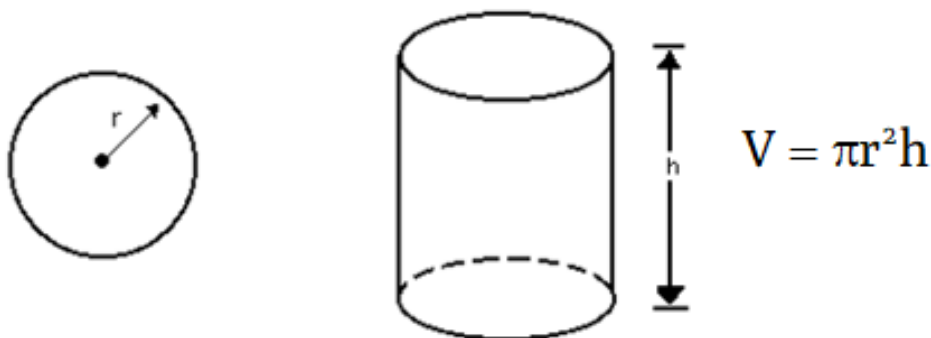
$$A_B = \pi r^2$$

- **Área total (AT):** soma da área lateral com as áreas das bases.

$$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

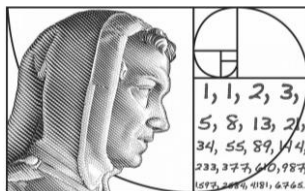
VOLUME DE UM CILINDRO

O volume de um cilindro é $V = A_B \cdot h$, e, como a base de um cilindro é círculo, temos que:



ATIVIDADES

1. Um reservatório cilíndrico possui raio igual a 2 metros e altura de 10 metros. Qual é a quantidade de água que cabe nesse reservatório em m^3 ?
2. Calcule o volume de um cilindro cuja área da base seja de 3 cm^2 e tenha altura de 9 cm .
3. O raio do círculo da base mede 17 cm , e a altura mede 6 cm . Qual é o volume do cilindro, dado: $\pi = 3,14$?
4. Um clube adquiriu 2 tanques de água com formato cilíndrico. Sabe-se que ambos os tanques medem 6 m de altura. A base do primeiro tem 6 m de diâmetro e o segundo tem 2 m de raio. Qual é o volume dos dois tanques?
5. Quais são os elementos de um cilindro?
6. Defina um cilindro com palavras e com um desenho.
7. O cilindro pode ser classificado de duas formas. Escreva a diferença e faça dois desenhos representando as duas formas de classificação.



AULA 116

GRANDEZAS PROPORCIONAIS



esta aula, estudaremos as grandezas proporcionais.

Para isso, precisamos entender o que é uma grandeza, primeiramente.

A palavra grandeza é a palavra grande acrescido do sufixo eza. Sendo assim, a palavra grande tem sua origem etimológica no termo em latim *grandis*, que significa “de muito tamanho, abundante, sublime”.

Na matemática definimos grandeza da seguinte forma:

Definição: Uma grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou calculado.

Cada grandeza possui uma unidade padrão de medida, e essa é definida através do Sistema Internacional de Unidades (SI). Podemos ver na imagem abaixo, exemplos de unidade padrão de algumas grandezas.

Unidades fundamentais do SI		
Grandeza	Unidade	Símbolo
comprimento	metro	m
massa	quilograma	kg
tempo	segundos	s
corrente elétrica	ampère	A
temperatura termodinâmica	Kelvin	K
quantidade de matéria	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

As grandezas podem se relacionar, e essa relação pode ser proporcional ou não.

Definição: Quando duas grandezas se relacionam de uma forma proporcional, são chamadas de grandezas proporcionais

Exemplos:

1. Se um automóvel percorre 80 km a uma velocidade de 40 km/h , então, percorrerá 160 km a uma velocidade de 80 km/h . Observe a tabela:

Velocidade	40 km/h	80 km/h
Distância	80 km	160 km

As razões entre velocidade e distância possuem o mesmo resultado:

$$\frac{40}{80} = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$$

Portanto, são grandezas proporcionais.

2. Ao relacionarmos as grandezas peso e altura, temos que não são proporcionais, pois uma grandeza não depende da outra, já que existem milhares de pessoas com determinada altura e pesos diferentes.

3. Verifique se as razões $3 : 4$ e $12 : 22$ são proporcionais.

Resolução: Verificando primeiramente se as razões são proporcionais, temos que:

$$\frac{3}{4} \neq \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$$

Portanto, as razões $3 : 4$ e $12 : 22$ não são proporcionais.

ATIVIDADES

1. Maurício foi a uma quitanda e viu que três alcachofras custavam R\$ 11,70. Decidiu comprar 8. Quanto ele pagou no total?

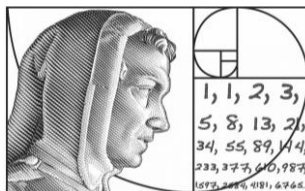
2. Um prêmio de loteria, no valor de R\$ 1.530.000,00, será dividido igualmente pelo total de acertadores.

a) Quanto cada acertador receberá, se o prêmio for dividido entre 5 ganhadores?

b) E se fossem 6 ganhadores?

c) Faça um quadro relacionando as quantidades 1, 2, 5 e 6 de acertadores e o valor do prêmio correspondente.

d) Conforme o número de acertadores aumenta, o que acontece com o valor do prêmio?



AULA 120

VELOCIDADE MÉDIA



esta aula, estudaremos a velocidade média.

Na disciplina de Física, estuda-se e muito o conceito de velocidade média. A velocidade é definida como uma grandeza que identifica o deslocamento de um corpo em determinado tempo.

Com isso, a velocidade média (V_m) mede num intervalo de tempo médio a rapidez da deslocação de um corpo.

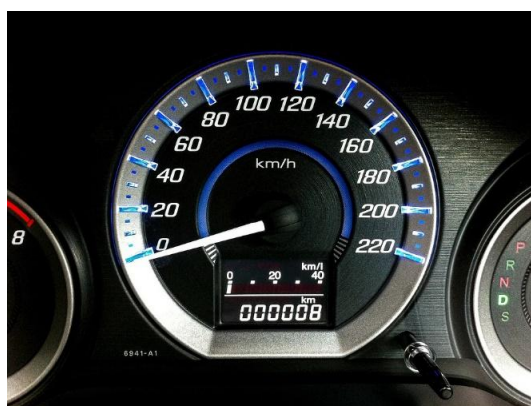
Podemos definir matematicamente a velocidade média da seguinte forma:

Definição: velocidade média é a razão entre a distância total percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

$$V_m = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}$$

UNIDADE DE MEDIDA

No sistema Internacional de Unidades (SI) a velocidade é dada em metros por segundo (m/s). Contudo, outra maneira de medir a velocidade, é em quilômetros por hora (km/h), como podemos notar, no nosso dia a dia, nas velocidades marcadas pelos carros e nas placas de trânsito.



Assim se faz necessário destacar a conversão entre **m/s** em **km/h** e **km/h** em **m/s**.

Para a converter **m/s** em **km/h**, multiplica-se por **3,6**, e por outro lado, para transformar **km/h** em **m/s**, divide-se o valor por **3,6**, visto que 1 **km** são 1000 **m** e 1 hora corresponde a 3600 **s**.

$$\text{m/s} \begin{array}{c} \xrightarrow{\times 3,6} \\ \xleftarrow{: 3,6} \end{array} \text{km/h}$$

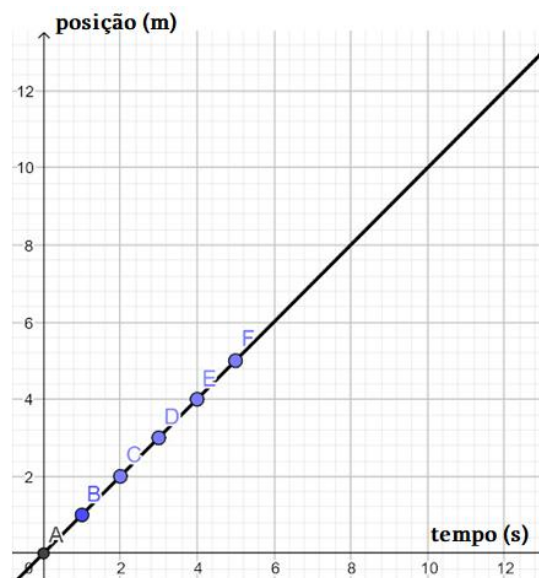
Exemplos:

1. Um carro percorre a distância de 453 **km** em 4 horas. Qual foi a velocidade média do carro nesse percurso?

Resolução: A velocidade média do carro foi de 112,50 **km/h**.

$$V_m = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{450 \text{ km}}{4 \text{ h}} = 112,50 \text{ km/h}$$

2. É possível encontrar a velocidade média por meio da reta tangente de um gráfico da posição em função do tempo, como veremos a seguir.



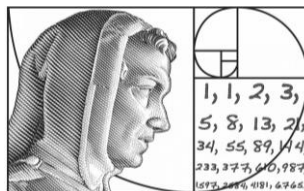
Quanto mais inclinada for a reta, maior será a velocidade média. Nessa situação, a velocidade pode ser chamada de coeficiente angular da reta.

Para encontrá-la, basta pegar 2 pontos no eixo **y** e no eixo **x**:

$$V_m = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{e - c}{e - c} = \frac{4 - 2 \text{ m}}{4 - 2 \text{ s}} = 1 \text{ m/s}$$

ATIVIDADES

1. Dê a definição de velocidade média.
2. Transforme em km/h :
 - a) $72 m/s$
 - b) $187,2 m/s$
 - c) $200 m/s$
3. Transforme em m/s :
 - a) $5 km/h$
 - b) $30 km/h$
 - c) $120 km/h$
4. Um ônibus parte às $15 h$ de São Paulo com destino ao Rio de Janeiro e previsão de chegada às $21 h$. Calcule a velocidade média (m/s) dessa viagem que dista $450 km$?
5. Um ônibus sai do Rio de Janeiro às $8 h$ e chega a Rio das Ostras, que dista $174 km$ da capital, às $11 h$. No trecho de Rio Bonito a Silva Jardim, de aproximadamente $45 km$, a sua velocidade constante era igual a $90 km/h$. Calcule a velocidade média, em km/h , no trajeto Rio de Janeiro-Rio das Ostras e o tempo entre Rio Bonito e Silva Jardim.
6. Uma família viaja de São Paulo para o Rio de Janeiro, para passar ali as férias. A viagem tem uma duração de 6 horas em um percurso de $435 km$. Qual é a velocidade média do automóvel da família?
7. Antigamente, o trajeto São Paulo-Rio podia ser feito por trem. À velocidade média de $50 km/h$, o trem fazia essa viagem em 8 horas. Se ele desenvolvesse a velocidade de $80 km/h$, em quanto tempo faria o mesmo trajeto?
8. Um automóvel percorreu uma distância de $455 km$ em 7 horas. Qual foi a velocidade média desse automóvel nesse percurso?
9. Leia as informações: a distância entre a Terra e o Sol é de, aproximadamente, $150\,000\,000 km$; a luz do sol, para atingir a Terra, leva em torno de 500 segundos. Responda:
 - a) Qual é a velocidade da luz no vácuo?
 - b) Quantos minutos a luz do sol leva para chegar à Terra?



AULA 124

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Nesta aula, estudaremos as grandezas inversamente proporcionais.

Definição: Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma razão da primeira.

Exemplos:

1. Um automóvel faz um percurso em:

- 1 hora com a velocidade de $120 \frac{km}{h}$.
- 2 horas com a velocidade de $60 \frac{km}{h}$.
- 3 horas com a velocidade de $40 \frac{km}{h}$.

Observe a tabela:

Tempo	1 h	2 h	3 h
Velocidade	120 km/h	60 km/h	40 km/h

Os produtos entre os elementos correspondentes são iguais.

$$1 \cdot 120 = 2 \cdot 60 = 3 \cdot 40$$

Portanto, as grandezas tempo e velocidade são inversamente proporcionais.

3,78 cmA professora de um colégio, tem 24 livros para distribuir entre os seus melhores alunos, dando a mesma quantidade de livros para cada aluno.

- O melhor aluno receberá 24 livros.
- Cada um dos 2 melhores alunos receberá 12 livros.
- Cada um dos 3 melhores alunos receberá 8 livros.
- Cada um dos 4 melhores alunos receberá 6 livros.
- Cada um dos 6 melhores alunos receberá 4 livros.

Escolhidos	Número de livros
1	24
2	12
3	8
4	6
6	4

Pela tabela, a quantidade de alunos escolhidos e o número de livros que cada aluno receberá, são grandezas que variam sendo que uma depende da outra e se relacionam da seguinte forma:

- Se o número de alunos dobra, o número de livros que cada um vai receber cai para a metade.
- Se o número de alunos triplica, o número de livros que cada aluno vai receber cai para a terça parte.
- Se o número de alunos quadruplica, o número de livros que cada aluno vai receber cai para a quarta parte.
- Se o número de alunos sextuplica, o número de livros que cada aluno vai receber cai para a sexta parte.

Sob estas condições, as grandezas envolvidas (número de alunos escolhidos e número de livros distribuídos) são grandezas inversamente proporcionais.

ATIVIDADES

1. Qual é a característica entre as grandezas e sequências que são inversamente proporcionais?

2. A sequência x, y é inversamente proporcional a 5, 6, e sabe-se que a constante de proporcionalidade é 120. Qual é o valor da soma de x e y ?

3. Classifique a relação entre as grandezas como Diretamente Proporcionais, Inversamente Proporcionais ou Não Proporcionais:

a)

Volume do combustível (litros)	1	2	5	10	20
Preço do combustível (R\$)	0,60	1,20	3,00	6,00	12,00

b)

Altura do prédio (m)	10,5	14	17,5	21	24,5
Número de Andares	3	4	56	7	8

c)

Hora do dia	0	4	8	12	16
Temperatura (°C)	10	5	10	15	17

d) Numa caminhada de 6 km (600 000 cm)

Metros por minuto	60	75	80	100	120
Tempo de caminhada (min)	100	80	75	60	50

e)

Comprimento do passo (cm)	50	60	75	80	100
Número de passos	12.000	10.000	8.000	7.500	6.000

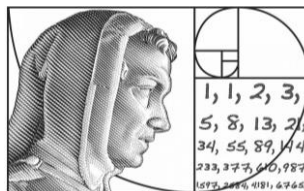
4. Denomina-se velocidade média V_m , a razão entre a distância d percorrida e o tempo t gasto para percorrê-lo, ou seja, $V_m = \frac{d}{t}$.

a) João percorreu 450 km em 5 horas. Qual foi a sua velocidade média?

b) Na corrida de São Silvestre, Jonas correu por aproximadamente 42 km em quase duas horas. Qual foi sua velocidade média?

5. Considere uma jarra com 2 L de suco (o que corresponde a 2000 mL) que será dividido entre algumas pessoas. Quanto mais pessoas houver, menos suco cada uma receberá. Os dados estão anotados abaixo. Diga se são proporcionais e encontre a constante de proporcionalidade.

Quantidade de pessoas	1	2	4	5	10
Quanto cada um recebe	2000 mL	1000 mL	500 mL	400 mL	200 mL



AULA 125

REGRA DE TRÊS SIMPLES



esta aula, iniciaremos o estudo da regra de três simples.

Definição: Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

A regra de três nos ajuda a resolver problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. Nesta aula, o objetivo será resolver, através da regra de três simples, problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais. Antes de resolvermos esses problemas, iremos estudar como realizamos a regra de três.

Para realizarmos o processo da regra de três simples, devemos seguir três passos:

1º passo: Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2º passo: Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

3º passo: Montar a proporção e resolver a equação.

Exemplos:

1. Augusto comprou 3 camisetas e pagou R\$ 120,00. Quanto ele pagaria se comprasse 5 camisetas do mesmo tipo e preço?

Resolução: Primeiramente iremos montar a tabela:

Camisetas	Preço (R\$)
3	120
5	x

Essas duas grandezas são diretamente proporcionais, pois, se aumentarmos a quantidade de camisetas, o preço irá aumentar também.

Montando a proporção, temos que:

$$\frac{3}{5} = \frac{120}{x}$$

$$3x = 5 \cdot 120$$

$$x = \frac{600}{3}$$

$$x = 200$$

Portanto, Augusto pagaria **R\$ 200,00** pelas 5 camisetas.

2. Com uma área de absorção de raios solares de $1,2 \text{ m}^2$, uma lancha com motor movido a energia solar consegue produzir 400 watts por hora de energia. Aumentando-se essa área para $1,5 \text{ m}^2$, qual será a energia produzida?

Resolução: Primeiramente iremos construir a tabela:

Área (m^2)	Energia (<i>Watts</i>)
1,2	400
1,5	x

Essas duas grandezas são diretamente proporcionais, pois, se aumentarmos a área de absorção de raios solares, iremos produzir mais energia.

Montando a proporção, temos que:

$$\frac{1,2}{1,5} = \frac{400}{x}$$

$$1,2x = 1,5 \cdot 400$$

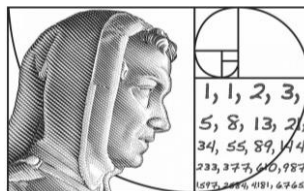
$$x = \frac{600}{1,2}$$

$$x = 500 \text{ watts}$$

Portanto, a energia produzida em uma área de absorção de raios solares de $1,5 \text{ m}^2$ equivale a **500 watts** por hora.

ATIVIDADES

1. O que é uma regra de três simples? Por que ela recebe este nome?
2. Se 3,5 litros de água custam **R\$ 4,55**, quanto custarão 6,5 litros?
3. Atualmente 1 dólar americano corresponde a 4,08 do real brasileiro. Quantos dólares são possíveis obter com **R\$ 129,00**? Quantos reais são possíveis obter com 55 dólares?
4. Um conjunto de três impressoras industriais, todas iguais, é capaz de imprimir 2 400 folhas em uma hora, caso as três máquinas trabalhem juntas. Quantas folhas serão produzidas se forem utilizadas sete dessas impressoras?
5. Um atleta dá 6 voltas numa pista, mantendo velocidade constante, em 24 minutos. Quantas voltas ele dará em duas horas?



AULA 129

EXPERIMENTO ALEATÓRIO



este volume, estudaremos Análise Combinatória, Probabilidade e Estatística.

Iniciaremos o nosso estudo pela Probabilidade, apresentando, primeiramente, o conceito de experimento aleatório.

Em nosso cotidiano, nos deparamos com vários experimentos; mas será que sabemos o que significa um experimento?

A palavra experimento tem origem no termo latino EXPERIMENTUM, que significa ação ou efeito de experimentar.

No dia a dia, encontramos vários experimentos, como, por **Exemplo:** fazer um bolo, lançar uma moeda e ver se sai cara ou coroa, lançar um dado e ver que número sai, soltar uma bolinha de pula-pula e ver quanto tempo ela leva para bater no chão, experimentar uma roupa nova, entre outros.

Os experimentos podem ser divididos duplamente: **Experimento Determinístico** e **Experimento Aleatório**.

Definição: os **Experimentos Determinísticos** são os experimentos que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados previstos, determinados.

Exemplos

1. Se soltarmos uma moeda de uma altura x , ela irá levar y tempo para tocar o chão. Se soltarmos novamente esta moeda, nas mesmas condições, isto é, da mesma altura, quanto tempo levará para a moeda tocar o chão?

Este experimento é determinístico, pois eu consigo prever o tempo que a moeda levará para tocar o chão, pois, nas mesmas condições, isto é, soltando a mesma moeda, da mesma altura, ela levará o mesmo tempo para tocar o chão, ou seja, y tempo.

Nesta aula, o nosso objetivo são os Experimentos Aleatórios e não os Experimentos Determinísticos.

Definição: os **Experimentos Aleatórios** são experimentos cujos resultados não se podem prever.

O Experimento Aleatório é aquele que, repetido em idênticas condições, produz resultados que não podem ser previstos, ou seja, em um Experimento Aleatório não conseguimos dizer ao certo o que vai acontecer, qual será o resultado.

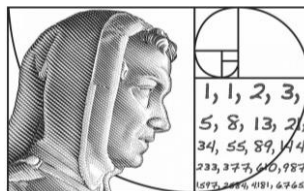
Exemplos:

1. Lançar uma moeda e observar a face de cima.
2. Lançar um dado e observar o número da face de cima.
3. Lançar duas moedas e observar as sequências de cara e coroa obtidas.
4. Lançar duas moedas e observar o número de caras obtidas.
5. De um lote de 80 peças boas e 20 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de peças defeituosas.
6. De uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas brancas, selecionar uma bola e observar sua cor.
7. De um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.
8. Numa cidade onde 10% dos habitantes possuem determinada moléstia, selecionar 20 pessoas e observar o número de portadores da moléstia.
9. Observar o tempo que certo aluno gasta para ir de ônibus desde sua casa até a escola.
10. Injetar uma dose de insulina em uma pessoa e observar a quantidade de açúcar que diminui.
11. Sujeitar uma barra metálica à tração e observar sua resistência.

Observação: as variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos **acazos**.

ATIVIDADES

1. Qual é o significado da palavra experimento?
2. Defina experimento determinístico e dê dois exemplos.
3. Defina experimento aleatório e dê dois exemplos.



AULA 133

ANAGRAMA



esta aula, estudaremos alguns problemas de contagem chamados anagrama.

A palavra anagrama vem do latim *ANAGRAMMA*, que significa trocar letras. Na Matemática, o anagrama de uma palavra é estudado no conteúdo de análise combinatória, e este estudo se baseia em contar todas as possibilidades em que podemos formar palavras (com ou sem sentido) mudando a posição das letras.

Existem dois tipos de anagramas: o anagrama que não possui letras repetidas e o anagrama que possui letras repetidas. O objetivo desta aula é estudar os anagramas que não possuem letras repetidas.

Definição: Os anagramas das palavras que não possuem letras repetidas podem ser calculados através do Princípio Fundamental da Contagem.

Exemplos:

1. Quantos anagramas possui a palavra AZUL?

Resolução: A palavra AZUL tem 4 letras e qualquer dessas letras pode assumir a primeira posição na palavra. Escolhida essa letra, sobram outras 3 letras para a segunda posição. Em seguida, há 2 letras disponíveis, e, escolhida essa 3ª letra, restará apenas uma para a 4ª letra.

$$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 24 \text{ possibilidades}$$

Portanto, temos 24 anagramas da palavra AZUL.

2. Quantos são os anagramas da palavra CÉU?

Resolução: A palavra CÉU não possui repetição de letras. Assim, usaremos o P.F.C.:

$$\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6 \text{ possibilidades}$$

Portanto, temos 6 anagramas da palavra CÉU.

3. Quantos são os anagramas da palavra AMOR?

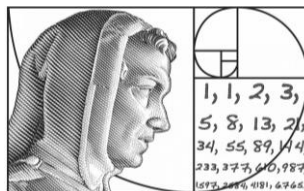
Resolução: A palavra AMOR não possui repetição de letras. Logo, temos que:

$$\underline{4}.\underline{3}.\underline{2}.\underline{1}=24 \text{ possibilidades}$$

Portanto, temos 24 anagramas da palavra AMOR.

ATIVIDADES

1. Uma sorveteria dispõe de 18 sabores de sorvete que podem ser combinados com 4 caldas diferentes (morango, chocolate, caramelo e leite condensado). De quantas maneiras é possível combinar uma bola de sorvete e uma calda?
2. Na criação da senha de uma conta bancária, o cliente é informado que deve ser feita uma combinação de seis números sem repetição. Os números utilizados devem ser os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Determine o número possível de senhas que podem ser criadas.
3. Quantos anagramas possui a palavra ROMA?
4. Quantos anagramas possui a palavra QUARTO?
5. Quantos anagramas possui a palavra CLAUDIO?
6. Quantos anagramas possui a palavra MURILO?
7. De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?



AULA 139

MODA



esta aula, estudaremos a medida de tendência central moda.

Quando surge uma tendência em roupas, cortes de cabelo, estilo musical, diz-se que este ou aquele “está na moda”. Assim, dizemos que algo está na moda quando aparece com muita frequência, mais vezes do que qualquer outra tendência.

Definição: a **moda** de uma amostra será o dado com maior frequência absoluta, ou seja, o que aparece mais vezes, e é indicada por *Mo*.

Exemplo

1. O time Ipatinga realizou 8 jogos em um campeonato de futebol. A seguir temos uma tabela contendo a quantidade de gols realizado pelo time Ipatinga durante esse campeonato. Vejamos quantas vezes cada quantidade de gol foi realizada.

	1° jogo	2° jogo	3° jogo	4° jogo	5° jogo	6° jogo	7° jogo	8° jogo
Gols	1	1	0	2	1	4	0	3

0 gol: 2 vezes.

1 gol: 3 vezes.

2 gols: 1 vez.

3 gols: 1 vez.

4 gols: 1 vez.

A quantidade 1 gol na partida apareceu com maior frequência nos jogos do Ipatinga. Desta forma, dizemos que $Mo = 1$.

2. Encontre a moda dos seguintes conjuntos de valores:

$$5 - 8 - 11 - 8 - 3 - 4 - 8$$

Resolução: A moda é $Mo = 8$, pois o número oito aparece com maior frequência no conjunto de valores.

3. Encontre a moda dos seguintes conjuntos de valores:

$$2 - 3 - 9 - 3 - 4 - 2 - 6$$

Resolução: Há duas modas, o número 2 e o número 3, pois os números dois e três aparecem com maior frequência e, desta forma, dizemos que se trata de uma distribuição bimodal.

Observação: Se duas informações aparecem com a mesma frequência absoluta e mais vezes do que todas as outras informações, dizemos que a amostra é **bimodal**.

4. Encontre a moda dos seguintes conjuntos de valores:

$$1 - 3 - 4 - 6 - 9 - 11 - 2$$

Resolução: Nesse caso, todos os valores “aparecem” com a mesma frequência unitária. Sendo assim, dizemos que não há moda nessa distribuição, ou seja, é uma distribuição amodal.

Observação: Se três ou mais informações aparecem com a mesma frequência absoluta e mais vezes do que todas as outras informações, dizemos que a amostra é multimodal.

ATIVIDADES

1. Sara fez três provas de Matemática no primeiro bimestre. Suas notas foram 7, 8 e 2. Determine sua média em Matemática neste bimestre.
2. Analise o quadro a seguir.

3	4	4	5	5	7	9
12	12	21	21	21	21	30
31	31	31	33	35	42	45
45	60	72	72	78	89	89

Assinale a opção que apresenta a moda dos dados do quadro acima.

- a) 9
 - b) 21
 - c) 30
 - d) 30,5
 - e) 31
3. Uma empresa no primeiro semestre de 2016.

Mês	Faturamento (R\$)
jan	4.000
fev	12.000
mar	8.500
abr	7.500
maio	10.000
jun	12.000

Determine:

a) a média mensal de faturamento;

b) o faturamento total do segundo semestre para que o faturamento médio mensal no ano de 2016 seja R\$ 10 000,00.

4. Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
Que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
Que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

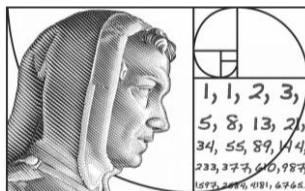
- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5
- e) 6

5. No verão de 2018, uma grande loja de eletrodomésticos registrou o número de unidades de ventiladores vendidas durante 10 dias consecutivos, conforme a tabela abaixo. Com isso, foi possível verificar qual o volume de vendas por dia e a variação do número de vendas de um dia para o dia seguinte.

Número de unidades vendidas por dia									
Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5	Dia 6	Dia 7	Dia 8	Dia 9	Dia 10
46	53	38	45	49	53	47	47	51	53

Qual é a moda das variações do número de vendas diárias no período considerado?

- a) 53
- b) 15
- c) 7
- d) 4
- e) 2

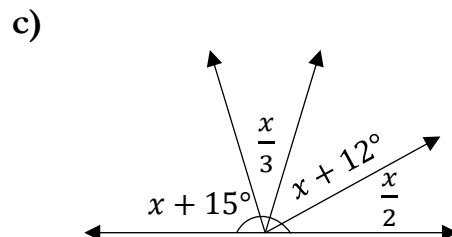
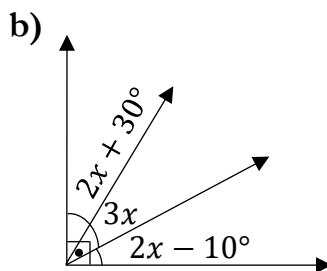
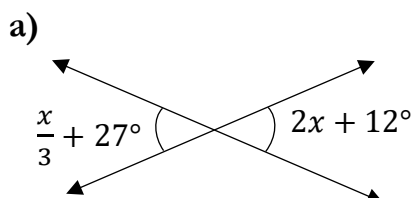


AULA 144

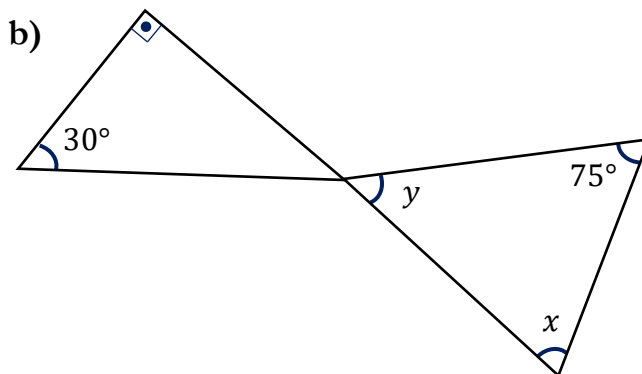
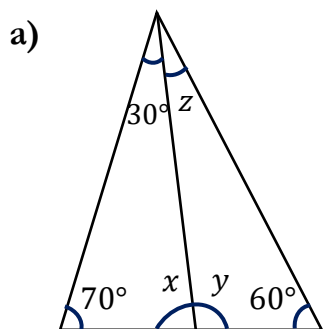
AVALIAÇÃO GERAL - PARTE II

Nesta aula, daremos continuidade à avaliação geral contemplando todos os assuntos estudados ao longo dos volumes 5, 6, 7, 8 e 9.

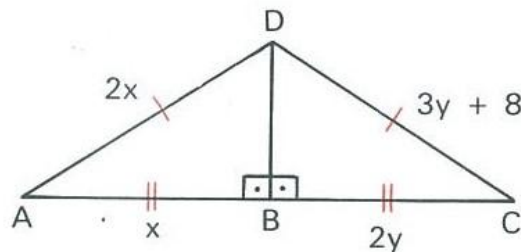
1. Defina bissetriz e faça a construção de uma bissetriz em um ângulo dado.
2. Calcule x :



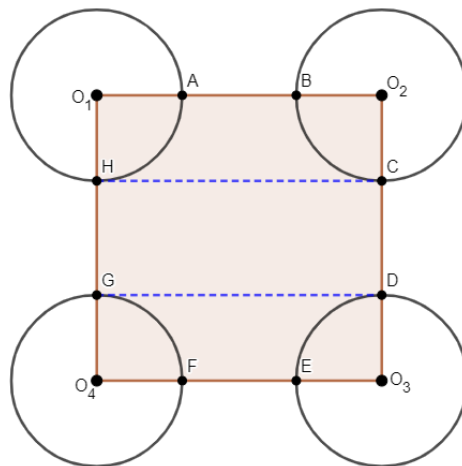
3. Calcule os ângulos indicados pelas letras:
4. Sabendo que o raio de um círculo mede 6 cm , calcule a área desse círculo.



5. Defina reta secante na circunferência e dê dois exemplos.
6. Na figura abaixo, o triângulo ABD é congruente ao triângulo CBD . Calcule x e y e os lados do triângulo ACD .



7. Na figura seguinte $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{GH}$, e as circunferências de centros O_1 , O_2 , O_3 e O_4 têm o mesmo raio. Sabendo que a medida do segmento $\overline{AB}$ é 7 cm e que o comprimento de cada raio é 4 cm , determine:



- O perímetro do quadrado $O_1O_2O_3O_4$.
- A área do mesmo quadrado.
- O perímetro do retângulo $CDGH$.

8. Sem construir o plano cartesiano, analise os pontos a seguir e indique em que quadrante o ponto está localizado:

- $A = (3, -5)$
- $B = (-7, -1)$
- $C = (-4, 4)$
- $D = (2, 2)$

9. Uma família viaja de São Paulo ao Rio de Janeiro, para passar ali as férias. A viagem tem duração de 6 horas em um percurso de 435 km . Qual é a velocidade média do automóvel da família?

10. Um livro tem 150 páginas, cada página tem 36 linhas, e cada linha tem 50 letras. Se quisermos escrever o mesmo texto em 250 páginas, quantas letras deverá haver em cada linha para que cada página tenha 30 linhas?



Nossa Senhora Auxiliadora, rogai por nós!

Santíssima Virgem Maria a quem Deus constituiu
Auxiliadora dos Cristãos,
nós vos escolhemos como Senhora e
Protetora desta casa.

Dignai-vos mostrar aqui Vosso auxílio poderoso.
Preservai esta casa de todo perigo: do incêndio, da
inundação, do raio, das tempestades,
dos ladrões, dos malfeitores, da guerra e de todas as
outras calamidades que conheceis.

Abençoi, protegei, defendei, guardai como coisa vossa
as pessoas que vivem nesta casa.

Sobretudo concedei-lhes a graça mais importante,
a de viverem sempre na amizade de Deus,
evitando o pecado.

Dai-lhes a fé que tivestes na Palavra de Deus,
e o amor que nutristes para com Vosso Filho Jesus e
para com todos aqueles pelos quais
Ele morreu na Cruz.

Maria, Auxílio dos Cristãos, rogai por todos que
moram nesta casa que Vos foi consagrada.

Amém.