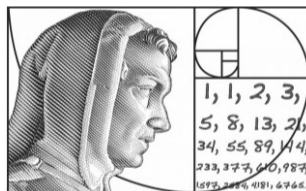

ENSINO FUNDAMENTAL – 9º ANO – MATEMÁTICA VOLUME I

Apostila do 9º ano do Ensino Fundamental, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



MATEMÁTICA



AULA 04

POTENCIAÇÃO

Definição: Potência é um produto de fatores iguais.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

O número real ***a*** é chamado **base da potência** e o número natural ***n*** é chamado **expoente da potência**.

Exemplos:

- 1) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$
- 2) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$
- 3) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
- 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

CASOS PARTICULARES

Existem três casos particulares em relação às potências de base real que iremos estudar:

1º caso: Toda potência de expoente 1 é igual à base.

$$a^1 = a$$

Exemplos:

- 1) $10^1 = 10$
- 2) $(-3)^1 = -3$
- 3) $\left(\frac{4}{7}\right)^1 = \left(\frac{4}{7}\right)$
- 4) $(\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$

2º caso: Toda potência de expoente zero é igual a 1.

$$a^0 = 1$$

Exemplos:

- 1) $25^0 = 1$
- 2) $(-9)^0 = 1$

$$3) \left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

$$4) (\sqrt{5})^0 = 1$$

3º caso: Toda potência de expoente negativo é igual ao inverso da potência de expoente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Exemplos:

$$1) 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

$$2) (-9)^{-2} = \frac{1}{(-9)^2} = \frac{1}{81}$$

$$3) \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

ATIVIDADES

1. Calcule:

$$a) 7^2$$

$$f) (-9)^2$$

$$k) (+3)^4$$

$$b) 4^3$$

$$g) (-5)^3$$

$$l) (-1)^{56}$$

$$c) 2^5$$

$$h) (-1)^7$$

$$m) (-10)^5$$

$$d) 8^1$$

$$i) (-15)^1$$

$$n) (-0,1)^2$$

$$e) 9^0$$

$$j) (-10)^0$$

$$o) \pi^0$$

2. Calcule:

$$a) -3^4$$

$$e) 2^4$$

$$i) -(-5)^3$$

$$b) 2^5$$

$$f) (-2)^4$$

$$j) -(+2)^6$$

$$c) (-2)^5$$

$$g) -2^4$$

$$d) -2^5$$

$$h) -(-3)^4$$

3. Calcule

a) $(\frac{3}{4})^2$

d) $(-\frac{4}{5})^0$

g) $(-\frac{1}{2})^5$

b) $(-\frac{1}{2})^4$

e) $(-\frac{5}{9})^1$

h) $(-\frac{4}{3})^2$

c) $(-\frac{1}{3})^3$

f) $(+\frac{7}{8})^1$

i) $(1\frac{1}{2})^2$

4. Calcule:

a) $-(-5)^{-2}$

d) 2^{-4}

g) $-(-3)^{-2}$

b) 7^{-2}

e) 2^{-5}

c) 5^{-3}

f) $(-3)^{-2}$

5. Calcule:

a) $(\frac{5}{2})^{-2}$

d) $(\frac{2}{3})^{-2}$

g) $(-\frac{1}{2})^{-4}$

b) $(\frac{3}{2})^{-2}$

e) $(-\frac{1}{4})^{-2}$

c) $(\frac{1}{2})^{-3}$

f) $(\frac{5}{2})^{-3}$

6. Calcule:

a) $(-4)^2 - 3$

e) $(-2)^2 + (-3)^3 + 1$

b) $1 + (-2)^3$

f) $(-9)^2 - 2 - (-3) - 6$

c) $-2 + (-5)^2$

g) $(-2) \cdot (-7) + (-3)^2$

d) $15 + (-1)^7 - 2$

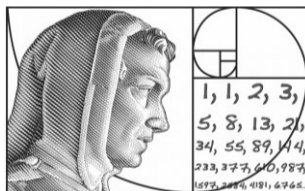
h) $(-1)^3 + 3 + (-2) \cdot (-5)$

7. Calcule o valor das expressões:

a) $(-\frac{4}{3})^2 - 1$

b) $\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2})^2 - 8$

c) $(1 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$



AULA 08

POTÊNCIA COM EXPOENTE FRACIONÁRIO

Definição: Se a é um número real positivo e $\frac{m}{n}$ é um número racional, com m e n inteiros e $n > 0$, então temos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

$$1) 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$$

$$3) 8^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{8^5}$$

$$5) 35^{\frac{2}{9}} = \sqrt[9]{35^2}$$

$$2) 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

$$4) 10^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{10^2}$$

Observação: Podemos resumir a relação de expoente fracionário com radiciação, da seguinte forma:

$$\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}} \rightarrow \begin{matrix} \text{expoente do radicando} \\ \text{índice da raiz} \end{matrix}$$

O mesmo processo pode ser invertido para transformar radicais em potências:

Exemplos:

$$1) \sqrt[4]{81^1} = 81^{\frac{1}{4}}$$

$$2) \sqrt[10]{12^3} = 12^{\frac{3}{10}}$$

$$3) \sqrt[7]{2^5} = 2^{\frac{5}{7}}$$

$$4) \sqrt[60]{3^{30}} = 3^{\frac{30}{60}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3^1} = \sqrt{3}$$

ATIVIDADES

1. Escreva em forma de potência com expoente fracionário:

a) $\sqrt[3]{7^2}$

e) $\sqrt{x^5}$

b) $\sqrt[5]{a^3}$

f) $\sqrt[3]{m}$

c) $\sqrt{10}$

g) $\sqrt[3]{y^4}$

d) $\sqrt[4]{a^3}$

h) $\sqrt{z}$

2. Escreva em forma de radical:

a) $5^{\frac{3}{4}}$

f) $6^{\frac{1}{2}}$

b) $5^{\frac{1}{2}}$

g) $x^{\frac{5}{8}}$

c) $a^{\frac{2}{5}}$

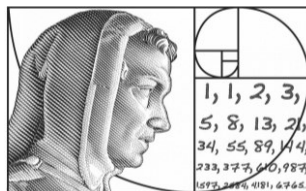
h) $y^{\frac{1}{7}}$

d) $a^{\frac{1}{3}}$

i) $2^{0,5}$

e) $2^{\frac{6}{7}}$

j) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$



AULA 10

SIMPLIFICAÇÃO DE RADICAIS

Definição: Simplificar um radical significa escrevê-lo sob a forma mais simples e equivalente ao radical dado.

Estudaremos os três casos de simplificação de radicais:

1º CASO: O ÍNDICE E O EXPOENTE DO RADICANDO SÃO DIVISÍVEIS POR UM MESMO NÚMERO (DIFERENTE DE ZERO)

Um radical não se altera quando o expoente do radicando e o índice do radical são divididos pelo mesmo número.

Exemplos

$$1) \sqrt[12]{3^{10}} = \sqrt[12:2]{3^{10:2}} = \sqrt[6]{3^5}$$

$$2) \sqrt[9]{7^{12}} = \sqrt[9:3]{7^{12:3}} = \sqrt[3]{7^4}$$

2º CASO: O EXPOENTE DO RADICANDO É UM MÚLTIPLO DO ÍNDICE

O radicando pode ser colocado fora do radical com um expoente igual ao quociente do expoente anterior pelo índice.

Exemplos

$$1) \sqrt{9^{10}} = 9^5 \text{ (Dividimos 10 por 2)}$$

$$2) \sqrt[3]{5^{12}} = 5^4 \text{ (Dividimos 12 por 3)}$$

$$3) \sqrt[4]{3^{20}} = 3^5 \text{ (Dividimos 20 por 4)}$$

$$4) \sqrt{x^6} = x^3 \text{ (Dividimos 6 por 2)}$$

$$5) \sqrt{y^{18}} = y^9 \text{ (Dividimos 18 por 2)}$$

3º CASO: O EXPOENTE DO RADICANDO É MAIOR QUE O ÍNDICE

Decompomos o radicando em fatores de modo que um dos fatores tenha expoente múltiplo do índice.

Exemplos:

$$1) \sqrt{a^{11}} = \sqrt{a^{10} \cdot a} = a^5 \cdot \sqrt{a}$$

$$2) \sqrt[4]{b^7} = \sqrt[4]{b^4 \cdot b^3} = b \cdot \sqrt[4]{b^3}$$

$$3) \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

ATIVIDADES

1. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[4]{5^6}$

e) $\sqrt[12]{5^9}$

i) $\sqrt[10]{x^5}$

b) $\sqrt[8]{7^6}$

f) $\sqrt[6]{x^{10}}$

j) $\sqrt[8]{a^4}$

c) $\sqrt[6]{3^9}$

g) $\sqrt[10]{a^6}$

d) $\sqrt[10]{8^{12}}$

h) $\sqrt[15]{m^{10}}$

2. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{7^8}$

f) $\sqrt[4]{6^8}$

k) $\sqrt[3]{a^{15}}$

b) $\sqrt[3]{5^9}$

g) $\sqrt{9^{20}}$

l) $\sqrt[4]{a^8}$

c) $\sqrt[4]{7^{12}}$

h) $\sqrt{x^2}$

m) $\sqrt{a^4 x^2}$

d) $\sqrt[5]{9^{15}}$

i) $\sqrt{x^4}$

n) $\sqrt{a^6 x^6}$

e) $\sqrt[3]{3^{15}}$

j) $\sqrt{a^6}$

o) $\sqrt{a^8 x^4}$

3. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{a^7}$

e) $\sqrt[7]{a^9}$

i) $\sqrt[4]{7^9}$

b) $\sqrt[3]{m^7}$

f) $\sqrt{7^5}$

j) $\sqrt[5]{6^8}$

c) $\sqrt[4]{m^7}$

g) $\sqrt{2^9}$

d) $\sqrt[5]{x^6}$

h) $\sqrt[3]{5^{10}}$

4. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[3]{x^3 \cdot a^5}$

d) $\sqrt{a^2 \cdot m^7}$

b) $\sqrt{a^2 \cdot m^3}$

e) $\sqrt[3]{a^6 \cdot m^7}$

c) $\sqrt{a^4 \cdot x^5}$

5. Fatore o radicando e simplifique os radicais:

a) $\sqrt{8}$

c) $\sqrt[3]{81}$

e) $\sqrt{50}$

b) $\sqrt{27}$

d) $\sqrt[4]{32}$

f) $\sqrt{80}$

6. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{25x^3}$

d) $\sqrt[3]{8a^4}$

g) $\sqrt[3]{8m^{10}}$

b) $\sqrt{49m^3}$

e) $\sqrt[4]{16m^5}$

h) $\sqrt{4a^5}$

c) $\sqrt{9m^5}$

f) $\sqrt[3]{27a^8}$

i) $\sqrt{25a^4x}$

7. Qual o valor de x?

a) $\sqrt{x} = 4$

d) $\sqrt{x} = 20$

g) $\sqrt[3]{x} = -2$

b) $\sqrt{x} = 7$

e) $\sqrt[3]{x} = 5$

h) $\sqrt[5]{x} = -1$

c) $\sqrt{x} = 13$

f) $\sqrt[4]{x} = 3$

8. Calcule:

a) $\sqrt{36} - \sqrt{49}$

e) $\sqrt[5]{1} + \sqrt{9} - \sqrt[3]{8}$

b) $\sqrt[3]{8} + \sqrt{64}$

f) $\sqrt{100} + \sqrt[5]{-32} + \sqrt[6]{0}$

c) $-\sqrt{100} - \sqrt[3]{64}$

g) $\sqrt[4]{16} + \sqrt[7]{1} - \sqrt[5]{-1}$

d) $-\sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{-1}$

h) $2\sqrt{49} - 3\sqrt[5]{1} + \sqrt[5]{0}$

9. Determine as raízes:

a) $\sqrt{\frac{49}{25}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$

b) $-\sqrt{\frac{121}{100}}$

e) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

c) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$

f) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$

10. Encontre o valor da seguinte expressão:

a) $\frac{\frac{1}{2}+5,5}{\sqrt{9}}$

11. Qual é o valor da expressão $64^{\frac{3}{2}}$?

12. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{12}$

d) $\sqrt{8}$

g) $\sqrt{98}$

b) $\sqrt{18}$

e) $\sqrt{72}$

h) $\sqrt{99}$

c) $\sqrt{50}$

f) $\sqrt{75}$

i) $\sqrt{200}$

13. Simplifique os radicais (as variáveis são positivas):

a) $\sqrt{25x^2}$

d) $\sqrt{9x^2y^2}$

g) $\sqrt[3]{8m^4}$

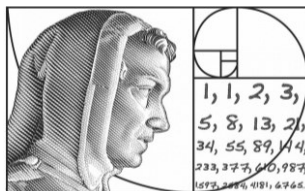
b) $\sqrt{81x^4}$

e) $\sqrt{81x^4y^2}$

h) $\sqrt{49a^4x}$

c) $\sqrt{(a+b)^2}$

f) $\sqrt[3]{27x^6}$



AULA 15

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES



esta aula iremos estudar a racionalização dos denominadores. Para conseguirmos racionalizar, precisamos primeiramente descobrir o conjugado ou fator racionalizante de cada número.

CONJUGADO

Definição: Uma expressão com radical é chamada conjugado de outra quando o produto delas é uma expressão sem radical.

Exemplos:

Qual é o conjugado de $\sqrt{7}$?

Resolução: O conjugado de $\sqrt{7}$ é $\sqrt{7}$, pois o produto é uma expressão sem radical.

$$\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7^2} = 7$$

Qual é o conjugado de $5\sqrt{3}$?

Resolução: O conjugado de $5\sqrt{3}$ é $\sqrt{3}$, pois o produto é uma expressão sem radical.

$$5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3^2} = 5 \cdot 3 = 15$$

Qual é o fator racionalizante de $\sqrt[5]{7^3}$?

Resolução: O fator racionalizante de $\sqrt[5]{7^3}$ é $\sqrt[5]{7^2}$, pois o produto é uma expressão sem radical.

$$\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{7^5} = 7$$

Qual é o fator racionalizante de $\sqrt{5} + \sqrt{2}$?

Resolução: O fator racionalizante de $(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ é $(\sqrt{5} - \sqrt{2})$, pois o produto é uma expressão sem radical.

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2}).(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$$

Observação: Notem que, no produto da soma pela diferença, aplicamos a regra:

$$(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$$

Qual é o conjugado de $3\sqrt{5} - 2$?

Resolução: O conjugado de $(3\sqrt{5} - 2)$ é $(3\sqrt{5} + 2)$, pois o produto é uma expressão sem radical.

$$(3\sqrt{5} - 2).(3\sqrt{5} + 2) = (3\sqrt{5})^2 - (2)^2 = 9.5 - 4 = 45 - 4 = 41$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Definição: Racionalizar o denominador de uma fração é obter uma fração equivalente com denominador racional.

Antes de adentrarmos nos casos de racionalização de denominadores, devemos recordar uma propriedade fundamental das frações:

Definição: Uma fração não se altera quando o numerador e o denominador são multiplicados por um mesmo número, diferente de zero.

Vamos estudar os casos mais comuns de racionalização.

1º CASO: O DENOMINADOR É UM RADICAL DE ÍNDICE 2

Basta multiplicar o numerador e o denominador por seu conjugado que neste caso será propriamente a raiz do denominador.

Exemplos:

1. Racionalize o denominador de $\frac{3}{\sqrt{5}}$?

Resolução:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

2. Racionalize o denominador de $\frac{5}{3\sqrt{7}}$?

Resolução:

$$\frac{5}{3\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{3\sqrt{7}.\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{3\sqrt{7^2}} = \frac{5\sqrt{7}}{3.7} = \frac{5\sqrt{7}}{21}$$

2º CASO: O DENOMINADOR É UM RADICAL COM ÍNDICE DIFERENTE DE 2

Neste caso, o conjugado será uma raiz com o mesmo índice, e o radicando deverá ser uma potência de mesma base com o expoente completando até chegar ao valor do índice.

Exemplos:

Racionalize o denominador de $\frac{7}{\sqrt[5]{6^3}}$?

Resolução:

$$\frac{7}{\sqrt[5]{6^3}} = \frac{7\sqrt[5]{6^2}}{\sqrt[5]{6^3} \cdot \sqrt[5]{6^2}} = \frac{7\sqrt[5]{36}}{\sqrt[5]{6^5}} = \frac{7\sqrt[5]{36}}{6}$$

Racionalize o denominador de $\frac{8}{\sqrt[3]{5}}$?

Resolução:

$$\frac{8}{\sqrt[3]{5}} = \frac{8\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{8\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{8\sqrt[3]{25}}{5}$$

3º CASO: O DENOMINADOR É UMA SOMA OU DIFERENÇA DE DOIS TERMOS, SENDO PELO MENOS UM DOS TERMOS UM RADICAL.

Basta multiplicar o numerador e o denominador por seu conjugado, que neste caso será propriamente o mesmo denominador com a operação inversa.

Exemplos:

Racionalize o denominador de $\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$.

Resolução:

$$\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{3}$$

Racionalize o denominador de $\frac{5}{3 - \sqrt{2}}$.

Resolução:

$$\frac{5}{3 - \sqrt{2}} = \frac{5(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2})} = \frac{5(3 + \sqrt{2})}{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{5(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{5(3 + \sqrt{2})}{7}$$

ATIVIDADES

1. Escreva o fator racionalizante de cada expressão:

- | | |
|----------------|-----------------|
| a) $\sqrt{5}$ | d) $3\sqrt{7}$ |
| b) $\sqrt{10}$ | e) $8\sqrt{3}$ |
| c) $\sqrt{12}$ | f) $6\sqrt{11}$ |

2. Escreva o fator racionalizante de cada expressão:

- | | |
|--------------------|---------------------|
| a) $\sqrt[3]{5}$ | d) $8\sqrt[3]{7^2}$ |
| b) $\sqrt[5]{6^2}$ | e) $4\sqrt[5]{8^3}$ |
| c) $\sqrt[4]{9}$ | f) $9\sqrt[6]{2^5}$ |

3. Escreva o fator racionalizante de cada expressão:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ | d) $\sqrt{3} + 1$ |
| b) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ | e) $5 + 2\sqrt{7}$ |
| c) $\sqrt{7} - 5$ | f) $2\sqrt{3} - \sqrt{5}$ |

4. Efetue as multiplicações:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$ | d) $8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ |
| b) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$ | e) $4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$ |
| c) $3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$ | |

5. Efetue as multiplicações:

- | | |
|--|---|
| a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}$ | d) $4\sqrt[6]{8^4} \cdot \sqrt[6]{8^2}$ |
| b) $\sqrt[5]{6^2} \cdot \sqrt[5]{6^3}$ | e) $5\sqrt[7]{2^4} \cdot \sqrt[7]{2^3}$ |
| c) $8\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}$ | |

6. Efetue as multiplicações:

- | | |
|--|--|
| a) $(\sqrt{8} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{5})$ | c) $(\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} - 1)$ |
| b) $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2})$ | d) $(5 + 2\sqrt{7}) \cdot (5 - 2\sqrt{7})$ |

7. Racionalize os denominadores das frações

a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{7}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

e) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

f) $\frac{5}{2\sqrt{6}}$

g) $\frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{3}}$

h) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$

8. Racionalize os denominadores das frações:

a) $\frac{7}{\sqrt[3]{7}}$

b) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^4}}$

d) $\frac{10}{\sqrt[5]{4^2}}$

e) $\frac{5}{\sqrt[3]{6}}$

f) $\frac{8}{5^4\sqrt[4]{3^2}}$

g) $\frac{7}{3^4\sqrt[4]{10}}$

9. Racionalize os denominadores das frações:

a) $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

c) $\frac{4}{5-\sqrt{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

f) $\frac{6}{5-3\sqrt{2}}$

g) $\frac{7}{3\sqrt{5}-2}$

h) $\frac{4+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

i) $\frac{3}{5+\sqrt{7}}$

10. Racionalize os denominadores das frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{8}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

d) $\frac{7}{3\sqrt{5}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{a}}$

f) $\frac{a^s}{\sqrt{a}}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{7}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

i) $\frac{7}{\sqrt[3]{3}}$

j) $\frac{1}{5^3\sqrt{4}}$

k) $\frac{4}{3^3\sqrt{2}}$

11. Racionalize os denominadores das frações:

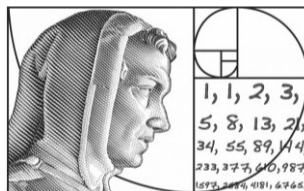
a) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-2}$

c) $\frac{10}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

e) $\frac{3}{3-2\sqrt{3}}$



AULA 19

QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS



esta aula, estudaremos o quadrado da diferença de dois termos. Esse produto notável é definido da seguinte forma:

Definição: sejam dois termos $a, b \in \mathbb{R}$; o quadrado da diferença desses dois termos é:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Em outras palavras podemos dizer que o quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

Vimos que a definição do quadrado da diferença de dois termos é $x^2 - 2xy + y^2$. Essa igualdade ocorre por causa da definição de potência e da propriedade distributiva, como veremos a seguir:

$$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y) = x^2 - 2xy + y^2$$

Exemplos:

1. Calcule $(x - 1)^2$.

Resolução: Primeiramente iremos utilizar a definição de potência.

$$(x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (x - 1)$$

Aplicando a distributiva temos que:

$$(x - 1)^2 = (x - 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 2x + 1$$

Portanto, $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

2. Calcule $(2x - 8)^2$.

Resolução: Usando a definição do quadrado da diferença de dois termos, temos que:

$$(2x - 8)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 8 + 8^2 = 4x^2 - 32x + 64$$

Portanto, $(2x - 8)^2 = 4x^2 - 32x + 64$.

3. Calcule $(2m - 3n)^2$.

Resolução: Usando a definição do quadrado da diferença de dois termos, temos que:

$$(2m - 3n)^2 = (2m)^2 - 2 \cdot (2m) \cdot (3n) + (3n)^2 = 4m^2 - 12mn + 9n^2$$

Portanto, $(2m - 3n)^2 = 4m^2 - 12mn + 9n^2$.

ATIVIDADES

1. Desenvolva o quadrado da diferença de dois termos:

a) $(x - 2a)^2$

b) $(a - 10)^2$

c) $(5x - 3)^2$

d) $(9x - 4y)^2$

e) $(-2x - 5a)^2$

f) $(3x - 2y)^2$

g) $\left(m - \frac{1}{2}a\right)^2$

h) $(6a - 4b)^2$

i) $(\sqrt{2}a - \sqrt{5}b)^2$

j) $\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{4}n\right)^2$

2. Se $y = 5m^2 - 2$, determine o valor de $y^2 - 3y + 1$.

3. A diferença entre o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois números reais é igual:

a) à diferença dos quadrados dos dois números.

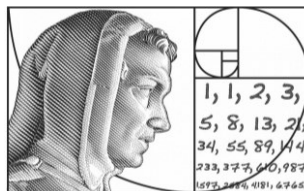
b) à soma dos quadrados dos dois números.

c) à diferença dos dois números.

d) ao dobro do produto dos números.

e) ao quádruplo do produto dos números

4. Qual é o valor numérico da expressão $(x - 2y)^2$, sabendo-se que $x^2 + 4y^2 = 30$ e $xy = 5$.



AULA 21

CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS



esta aula, estudaremos o cubo da soma de dois termos. Esse produto notável é definido da seguinte forma:

Definição: sejam dois termos $a, b \in \mathbb{R}$; o cubo da soma desses dois termos é:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Em outras palavras, podemos dizer que o cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro termo mais três vezes o primeiro termo ao quadrado vezes o segundo termo mais três vezes o primeiro termo pelo segundo termo ao quadrado mais o cubo do segundo termo.

Vimos que a definição do cubo da soma de dois termos é $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$. Essa igualdade ocorre por causa da definição de potência, do quadrado da diferença de dois termos e da propriedade distributiva, como veremos a seguir:

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y) \cdot (x + y)^2 = (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2) \\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

Exemplos:

1. Calcule $(x + 3)^3$.

Resolução: Primeiramente iremos utilizar a definição de potência.

$$(x + 3)^3 = (x + 3) \cdot (x + 3)^2$$

Desenvolvendo o quadrado da soma de dois termos, temos que:

$$(x + 3)^3 = (x + 3) \cdot (x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x^2 + 6x + 9)$$

Aplicando a distributiva temos que:

$$\begin{aligned}(x + 3)^3 &= (x + 3) \cdot (x^2 + 6x + 9) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3x^2 + 18x + 27 \\ &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27\end{aligned}$$

Portanto, $(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.

2. Calcule $(3x + 1)^3$.

Resolução: Usando a definição do cubo da soma de dois termos, temos que:

$$\begin{aligned}(3x + 1)^3 &= (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (3x) \cdot 1^2 + 1^3 \\ &= 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1\end{aligned}$$

Portanto, $(3x + 1)^3 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$.

3. Calcule $(2a + 3b)^3$.

Resolução: Usando a definição do cubo da soma de dois termos, temos que:

$$\begin{aligned}(2a + 3b)^3 &= (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot (3b) + 3 \cdot (2a) \cdot (3b)^2 + (3b)^3 \\ &= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3\end{aligned}$$

Portanto, $(2a + 3b)^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$.

ATIVIDADES

1. Calcule:

a) $(a + b)^3$

b) $\left(2a + \frac{1}{2}\right)^3$

c) $(3x + 3y)^3$

d) $(4m + 2a)^3$

e) $\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b\right)^3$

f) $(\sqrt{2}x + y)^3$

g) $\left(\frac{1}{5}x + 2y\right)^3$

h) $(5x + 2y)^3$

i) $(2 + 3b)^3$

j) $(3 + 6a)^3$

2. Calcule:

a) $(2a + 2b)^3$

b) $(1 + 3y)^3$

c) $(2y + 4)^3$

d) $(2y + x)^3$

e) $(6m + 2)^3$

f) $(m + 3)^3$

g) $(3b + 4c)^3$

h) $(m + 2n)^3$

i) $(3a + 2b)^3$

j) $(5m + 2)^3$

3. Desenvolva os seguintes produtos aplicando as regras:

a) $(7a + 1)^3$

b) $(2 + 9x)^3$

c) $\left(3x + \frac{2}{3}a\right)^3$

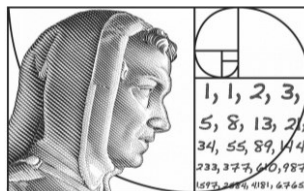
d) $(10a + bc)^3$

e) $(a^4 + m^4)^3$

f) $(a^3 + 6y^2)^3$

g) $(a^3 + 2a)^3$

h) $(5 + b^3c^3)^3$



AULA 27

TRINÔMIO DO QUADRADO PERFEITO



esta aula, estudaremos a fatoração do trinômio do quadrado perfeito; aprenderemos que determinados trinômios podem formar um quadrado perfeito.

Para entendermos essa fatoração, iremos retomar alguns conceitos importantes.

Definição: Para que uma expressão algébrica seja considerada um trinômio, ela deverá conter exatamente três monômios.

Exemplos:

- 1) $x^2 + x - 1$ é um trinômio.
- 2) $x + y + z$ é um trinômio.
- 3) $x^4 - 2x^2 - y$ é um trinômio.
- 4) $2x^2 - 3x + 5$ é um trinômio.
- 5) $x^2 + x - 1$ é um trinômio.

Observação: Nem todos os trinômios podem ser escritos como um quadrado perfeito. Ao longo desta aula, aprenderemos a verificar se um trinômio pode ser escrito como um quadrado perfeito.

Definição: O quadrado perfeito é o produto de uma multiplicação de fatores iguais.

Exemplos:

- 1) 81 é um quadrado perfeito, pois $81 = 9 \cdot 9$.
- 2) x^2 é um quadrado perfeito, pois $x^2 = x \cdot x$.

Vejamos a definição da fatoração do trinômio do quadrado perfeito:

Definição: O trinômio do quadrado perfeito é uma técnica de fatoração, ele consiste de expressões que possuem três termos e que podem ser escritas como um quadrado perfeito.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Para verificarmos a fatoração do trinômio do quadrado perfeito, basta aplicarmos a definição de potência e a propriedade distributiva na fatoração e encontraremos o trinômio do quadrado perfeito novamente, como podemos ver abaixo:

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = (x - y) \cdot (x - y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Observação: Notem que a fatoração do trinômio do quadrado perfeito sempre resulta no quadrado da soma de dois termos ou no quadrado da diferença da soma de dois termos, dependendo do sinal do termo central do trinômio.

Exemplos:

1) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

2) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

3) $y^2 + 10y + 25 = (y + 5)^2$.

4) $m^4 - 2m^2 + 1 = (m^2 - 1)^2$.

PROCESSO DE FATORAÇÃO

Agora, estudaremos como transformar um trinômio em um quadrado perfeito, quando possível.

O processo de fatoração de um trinômio quadrado perfeito consiste em reescrever a expressão inicial como um quadrado perfeito da seguinte forma:

1º passo: Primeiramente escreva o trinômio com os termos em quadrados nas extremidades.

$$x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{e} \quad x^2 - 2xy + y^2$$

2º Passo: Extraia a raiz quadrada dos termos nos extremos.

3º Passo: Multiplique os valores encontrados no segundo passo por 2 ou por -2, dependendo do sinal do termo central.

4º Passo: Verifique se o termo central é igual ao valor encontrado no terceiro passo; se forem iguais, o trinômio é um quadrado perfeito.

5º Passo: Pegue os valores das raízes e escreva o quadrado da soma delas; se o valor do termo central for positivo ou se o valor do termo central for negativo escreva o quadrado da diferença dos valores das raízes.

Exemplos:

1. Verifique se o trinômio $x^2 + 9 - 6x$ é um quadrado perfeito e se for escreva-o.

Resolução: Primeiramente escrevemos o trinômio $x^2 + 9 - 6x$ na ordem correta.

$$x^2 + 9 - 6x = x^2 - 6x + 9$$

Agora, iremos extrair a raiz dos extremos.

$$\sqrt{x^2} = x \text{ e } \sqrt{9} = 3$$

Multiplicando os valores encontrados por -2 , pois, o termo central $-6x$ é negativo, temos que:

$$-2 \cdot x \cdot 3 = -6x$$

Como o valor dessa multiplicação corresponde ao termo central do trinômio, temos que $x^2 - 6x + 9$ é um quadrado perfeito.

$$\text{Portanto, } x^2 + 9 - 6x = (x - 3)^2.$$

2. Verifique se o trinômio $2x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x + 4$ é um quadrado perfeito e se for escreva-o.

Resolução: Como o trinômio $2x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x + 4$ está na ordem correta, iremos extrair a raiz dos extremos.

$$\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} \text{ e } \sqrt{4} = 2$$

Multiplicando os valores encontrados por 2 , pois, o termo central é positivo, temos que:

$$2 \cdot x\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2} \cdot x$$

Como o valor dessa multiplicação corresponde ao termo central do trinômio, temos que $2x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x + 4$ é um quadrado perfeito.

$$\text{Portanto, } 2x^2 + 4\sqrt{2} \cdot x + 4 = (x\sqrt{2} + 2)^2.$$

3. Verifique se o trinômio $m^2 - 10m + 25$ é um quadrado perfeito e se for escreva-o.

Resolução: Como o trinômio $m^2 - 10m + 25$ está na ordem correta, iremos extrair a raiz dos extremos.

$$\sqrt{m^2} = m \text{ e } \sqrt{25} = 5$$

Multiplicando os valores encontrados por -2 , pois, o termo central é negativo, temos que:

$$(-2) \cdot m \cdot 5 = -10m$$

Como o valor dessa multiplicação corresponde ao termo central do trinômio, temos que $m^2 - 10m + 25$ é um quadrado perfeito.

$$\text{Portanto, } m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2.$$

ATIVIDADES

1. Coloque na forma fatorada as expressões:

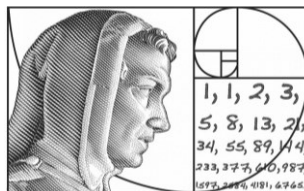
- a) $x^2 + 4x + 4$
- b) $x^2 - 4x + 4$
- c) $a^2 + 2a + 1$
- d) $x^2 - 2a + 1$
- e) $x^2 - 8x + 16$
- f) $a^2 + 6a + 9$
- g) $a^2 - 6a + 9$
- h) $1 - 6a + 9a^2$

2. Fatore as expressões

- a) $m^2 - 12m + 36$
- b) $a^2 + 14a + 49$
- c) $4 + 12x + 9x^2$
- d) $9a^2 - 12a + 4$
- e) $9x^2 - 6xy + y^2$
- f) $x^2 + 20x + 100$
- g) $a^2 - 12ab + 36b^2$
- h) $9 + 24a + 16a^2$
- i) $64a^2 - 176a + 121$
- j) $a^4 - 22a^2 + 121$
- k) $36 + 12xy + x^2y^2$

3. Calcule:

- a) $a^2 + 2ab + b^2$
- b) $m^2 + 2m + 1$
- c) $4y^2 - 4y + 1$
- d) $g^2 + 2gh + h^2$
- e) $m^2 - 12m + 36$
- f) $9b^2 + 6b + 1$
- g) $a^3 + 2a^2 + a$



AULA 30

FATORANDO MAIS DE UMA VEZ



esta aula, estudaremos alguns polinômios que precisam ser fatorados mais de uma vez para serem representados como um produto de fatores irredutíveis.

Não necessariamente precisamos utilizar a mesma técnica para fatorar as duas vezes, podemos fatorar primeiramente com uma técnica e na segunda usar outra técnica.

Vamos ver alguns exemplos.

Exemplos:

1. Fatore $x^4 - 81$.

Resolução: Primeiramente iremos aplicar a técnica da diferença de quadrados.

$$x^4 - 81 = (x^2 + 9) \cdot (x^2 - 9)$$

Agora, novamente iremos aplicar a mesma técnica para fatorar pela segunda vez.

$$x^4 - 81 = (x^2 + 9) \cdot (x^2 - 9) = (x^2 + 9) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$$

2. Fatore $a^3 - 20a^2 + 100a$.

Resolução: Primeiramente iremos aplicar a técnica do fator comum em evidência.

$$a^3 - 20a^2 + 100a = a \cdot (a^2 - 20a + 100)$$

Agora, iremos aplicar a técnica do trinômio do quadrado perfeito.

$$a^3 - 20a^2 + 100a = a \cdot (a^2 - 20a + 100) = a \cdot (a - 10)^2$$

3. Fatore $x^4y + xy^4$.

Resolução: Primeiramente iremos aplicar a técnica do fator comum em evidência.

$$x^4y + xy^4 = xy \cdot (x^3 + y^3)$$

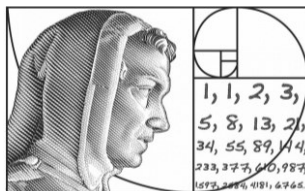
Agora, iremos aplicar a técnica da soma de dois cubos.

$$x^4y + xy^4 = xy \cdot (x^3 + y^3) = xy \cdot (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$$

ATIVIDADES

1. Fatore o polinômio $ax^3 - ax + bx^3 - bx$.

2. Fatore o polinômio $x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$ e determine o seu valor numérico, sabendo que $xy = 12$ e $x + y = -7$.
3. Qual é a fatoração da expressão $ab^2 - ac^2 + b^3 - bc^2$?
4. Encontre a forma fatorada completa do polinômio $5x^2 - 5y^2$.
5. Qual a forma fatorada completa do polinômio $m^4 - n^4$?
6. Fatore o polinômio $7x^2 + 14xy + 7y^2$.
7. Fatore o polinômio $4x^3 - 20x^2 + 25x$.
8. Encontre a forma fatorada completa do polinômio $18x^3 + 60x^2y + 50xy^2$.
9. Qual a forma fatorada completa do polinômio $2x^2 - 50y^2$?
10. Qual a forma fatorada completa do polinômio $3a^2 - 3b^2$?
11. Encontre a forma fatorada completa do polinômio $x^2 - 10xy + 25y^2 - 4$.



AULA 34

EQUAÇÃO DO 1º GRAU



esta aula, estudaremos a equação do 1º grau.

Definição: A equação do 1º grau é uma equação que possui incógnita com grau 1.

Exemplos:

1. A equação $7x + 17 = 8$ é uma equação do 1º grau com uma incógnita, x .

2. A equação $5y - 14 = 0$ é uma equação do 1º grau com uma incógnita, y .

3. A equação $2x - 3y + 5 = 0$ é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, x e y .

Observação: As equações de primeiro grau podem apresentar várias incógnitas, porém, todas elas possuem expoente 1, sendo assim, denominadas equações do 1º grau.

Devemos relembrar que para resolvermos uma equação do 1º grau, utilizamos o conceito da operação inversa, que é quando passamos um número de um lado para o outro. Sendo assim, temos que a operação inversa da adição é a subtração, e vice-versa, e a operação inversa da multiplicação é a divisão, e vice-versa.

Ao passar um número de um lado para o outro, acabamos fazendo na prática, a mudança do número para o outro lado do sinal de igual e invertemos a operação que esse número tinha.

Exemplos:

1. Calcule a equação $x + 5 = 12$.

Resolução: Passando o número 5 para o outro lado devemos inverter a operação soma para subtração, ficando -5 ao invés de 5.

$$x + 5 = 12$$

$$x = 12 - 5$$

$$x = 7$$

Portanto, $x = 7$.

2. Calcule a equação $6x = 18$.

Resolução: Passando o número 6 para o outro lado devemos inverter a operação multiplicação para divisão.

$$6x = 18$$

$$x = \frac{18}{6}$$

$$x = 3$$

Portanto, $x = 3$.

3. Calcule a equação $\frac{a}{5} - 8 = 27$.

Resolução:

$$\frac{a}{5} - 8 = 27$$

$$\frac{a}{5} = 27 + 8$$

$$a = 35 \cdot 5$$

$$a = 175$$

Portanto, $a = 175$.

4. Calcule a equação $3y + 7y - 3 = 2y + 1$.

Resolução: Passando o número 6 para o outro lado devemos inverter a operação multiplicação para divisão.

$$3y + 7y - 3 = 2y + 1$$

$$10y = 2y + 1 + 3$$

$$10y - 2y = 4$$

$$8y = 4$$

$$y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $y = \frac{1}{2}$.

ATIVIDADES

1. Resolva as equações:

a) $b + 7 = 13$

b) $3x = 21$

c) $4y = -24$

d) $-2x = -12$

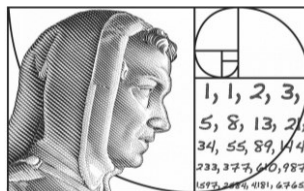
e) $\frac{a}{-5} = 12$

f) $18x - 43 = 65$

g) $23x - 16 = 14 - 17x$

h) $10y - 5(1 + y) = 3(2y - 2) - 20$

i) $\frac{5}{b} + 2 = 10 - 2$



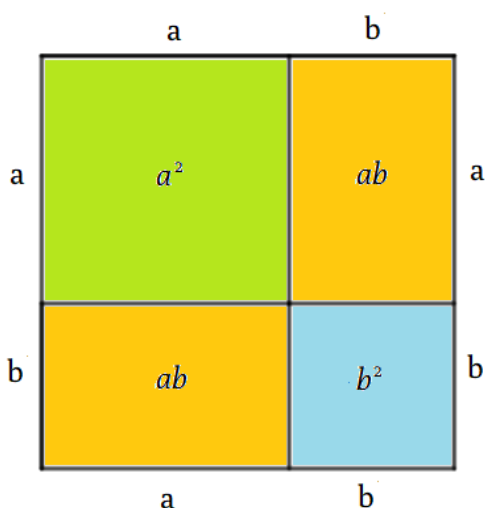
AULA 40

O PROCESSO DE COMPLETAR QUADRADOS



matemático árabe al-Khowarizmi, no século *IX*, estabeleceu um processo geométrico para a resolução de equações de 2º grau com uma incógnita, baseando-se na interpretação geométrica dada pelos gregos à expressão $(a + b)^2$.

Vejamos a figura que representa geometricamente a expressão $(a + b)^2$.



Pela figura, temos que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A interpretação geométrica é:

$a^2 + 2ab + b^2$
 ↳ área de um dos retângulos de lados a e b
 ↳ área do quadrado de lado b
 ↳ área do quadrado de lado a

Baseados nessa interpretação, vamos estudar alguns exemplos que nos mostrarão como al-Khowarizmi desenvolveu seus estudos.

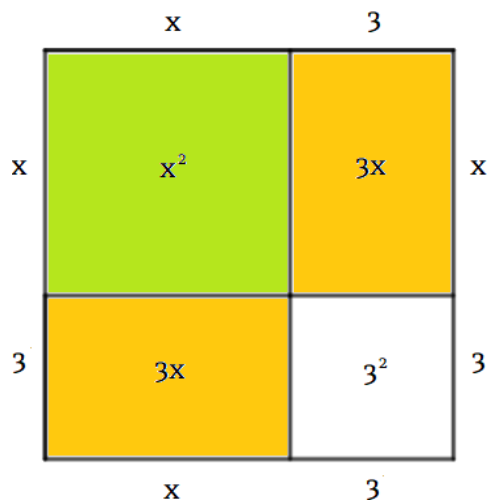
Exemplos:

1. Consideremos a expressão $x^2 + 6x$. Fazendo uma interpretação geométrica dessa expressão, temos

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot (3x)$$

↳ área de um retângulo cujos lados medem 3 e x
 ↳ área de um quadrado cujo lado mede x

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada, temos:



Pela figura, notamos que para completar o quadrado se deve acrescentar um quadrado de lado 3, ou seja, de área 3^2 . Assim, se adicionarmos 3^2 à expressão $x^2 + 6x$, obteremos $x^2 + 6x + 3^2$, que é um trinômio quadrado perfeito; daí, podemos escrever:

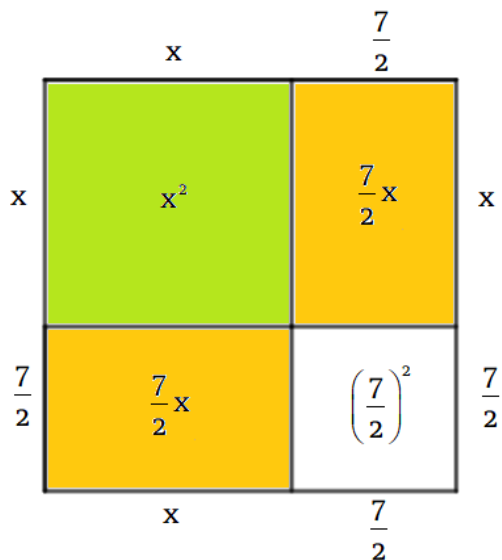
$$x^2 + 6x + 3^2 = \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{Trinômio do quadrado perfeito}} = \underbrace{(x + 3)^2}_{\text{forma fatorada ou trinômio}}$$

2. Consideremos a expressão $x^2 + 7x$. Fazendo uma interpretação geométrica dessa expressão, temos

$$x^2 + 7x = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{7}{2} x \right)$$

↙ área de um retângulo cujos lados medem $\frac{7}{2}$ e x
↘ área de um quadrado cujo lado mede x

Construindo a figura de acordo com a interpretação geométrica dada, temos:



Pela figura, notamos que para completar o quadrado se deve acrescentar um quadrado de lado $\frac{7}{2}$, ou seja, de área $\left(\frac{7}{2}\right)^2$. Assim, se adicionarmos $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ à expressão $x^2 + 7x$, obteremos $x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2$, que é um trinômio quadrado perfeito; daí, podemos escrever:

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \underbrace{x^2 + 7x + \frac{49}{4}}_{\text{Trinômio do quadrado perfeito}} = \underbrace{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2}_{\text{forma fatorada ou trinômio}}$$

Aplicando esses conhecimentos, vamos resolver as seguintes equações de 2º grau com uma incógnita:

Exemplos:

1. Encontre as raízes de $x^2 + 6x + 5 = 0$ através do processo de complemento de quadrados.

Resolução: Considere-se, então, a expressão $x^2 + 6x$, e teremos:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot (3x)$$

$\downarrow$ área de um retângulo cujos lados medem 3 e x
 $\downarrow$ área de um quadrado cujo lado mede x

Pela figura, observamos que devemos acrescentar à expressão dada o número 3^2 , ou seja, 9, para obter um quadrado.

Descoberto geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + 6x$, vamos voltar à equação dada:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x^2 + 6x = -5$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{Trinômio do quadrado perfeito}} = -5 + 9$$

$$(x + 3)^2 = 4$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{4}$$

$$x + 3 = \pm 2$$

Para + 2

$$x + 3 = 2$$

$$x = -1$$

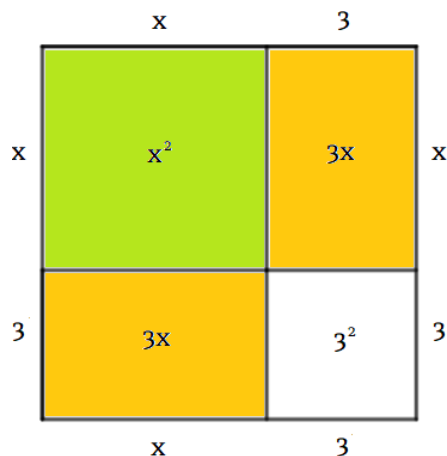
Para - 2

$$x + 3 = -2$$

$$x = -5$$

Logo, $S = \{-5, -1\}$ e os números -5 e -1 são raízes da equação.

2. Encontre as raízes de $x^2 + 7x + \frac{24}{4} = 0$ através do processo de complemento de quadrados.



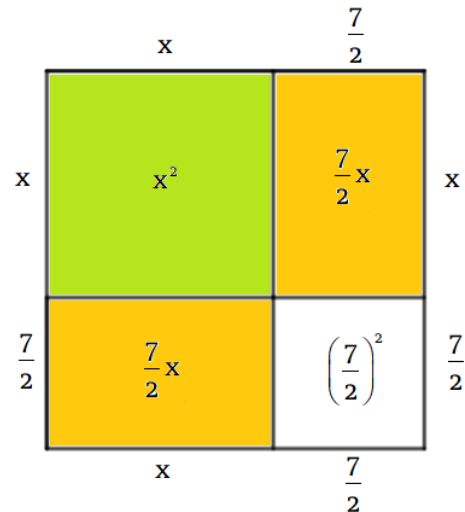
Resolução: Considere-se, então, a expressão $x^2 + 7x$, e teremos:

$$x^2 + 7x = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{7}{2}x\right)$$

$\hookrightarrow$ área de um retângulo cujos lados medem $\frac{7}{2}$ e x
 $\hookrightarrow$ área de um quadrado cujo lado mede x

Pela figura, observamos que devemos acrescentar à expressão dada o número $\left(\frac{7}{2}\right)^2$, ou seja, $\frac{49}{4}$, para obter um quadrado.

Descoberto geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + 7x$, vamos voltar à equação dada:



$$\begin{aligned}
 x^2 + 7x + \frac{24}{4} &= 0 \\
 x^2 + 7x &= -\frac{24}{4} \\
 x^2 + 7x + \frac{49}{4} &= -\frac{24}{4} + \frac{49}{4} \\
 \underbrace{x^2 + 7x + \frac{49}{4}}_{\text{Trinômio do quadrado perfeito}} &= \frac{25}{4}
 \end{aligned}$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm \frac{5}{2}$$

Para $+\frac{5}{2}$

$$x + \frac{7}{2} = +\frac{5}{2}$$

$$x = +\frac{5}{2} - \frac{7}{2}$$

$$x = -\frac{2}{2} = -1$$

Para $-\frac{5}{2}$

$$x + \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2} - \frac{7}{2}$$

$$x = -\frac{12}{2} = -6$$

Logo, $S = \{-6, -1\}$ e os números -6 e -1 são raízes da equação.

3. Encontre as raízes de $8x^2 + 2x - 1 = 0$ através do processo de complemento de quadrados.

Resolução: Vamos dividir a equação por 8:

$$\frac{8}{8}x^2 + \frac{2}{8}x - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$$

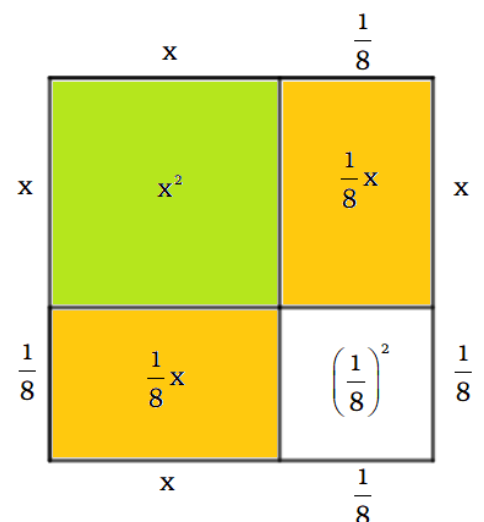
Considere-se, então, a expressão $x^2 + \frac{1}{4}x$, e teremos:

$$x^2 + \frac{1}{4}x = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{8}x\right)$$

$\downarrow$ área de um retângulo cujos lados medem $\frac{1}{8}$ e x
 $\downarrow$ área de um quadrado cujo lado mede x

Pela figura, observamos que devemos acrescentar à expressão dada o número $\left(\frac{1}{8}\right)^2$, ou seja, $\frac{1}{64}$, para obter um quadrado.

Descoberto geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + \frac{1}{4}x$, vamos voltar à equação dada:



$$x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}$$

$$x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{64} = \frac{1}{8} + \frac{1}{64}$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{64}}_{\text{Trinômio do quadrado perfeito}} = \frac{9}{64}$$

$$\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$x + \frac{1}{8} = \pm \sqrt{\frac{9}{64}}$$

$$x + \frac{1}{8} = \pm \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}}$$

$$x + \frac{1}{8} = \pm \frac{3}{8}$$

Para $+\frac{3}{8}$

$$x + \frac{1}{8} = +\frac{3}{8}$$

$$x = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Para $-\frac{3}{8}$

$$x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}$$

$$x = -\frac{3}{8} - \frac{1}{8}$$

$$x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$ e os números $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ são raízes da equação.

Para não termos de repetir sempre o desenho, podemos usar a seguinte definição.

Definição: a expressão $ax^2 + bx$, com $a = 1$, torna-se um trinômio quadrado perfeito quando adicionamos a ela a expressão $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Exemplos:

1. Resolva a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$ sendo $U = \mathbb{R}$.

Resolução:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 8$$

Usando a definição, temos que:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Aplicando a definição na equação, temos que:

$$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1$$

$$(x - 1)^2 = 9 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x - 1 = \pm 3 \begin{cases} x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 \\ x - 1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Logo, $S = \{-2, 4\}$ e os números -2 e 4 são raízes da equação.

ATIVIDADES

1. Qual é o número que deve ser adicionado a cada uma das seguintes expressões para que tenhamos um trinômio quadrado perfeito?

a) $x^2 + 6x$

e) $x^2 - 5x$

b) $x^2 - 10x$

f) $x^2 + 9x$

c) $x^2 - 2x$

g) $x^2 - 12x$

d) $x^2 + 8x$

h) $x^2 + x$

2. Usando o processo do complemento de quadrados, determine o conjunto solução das seguintes equações do 2º grau, no conjunto $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

g) $x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^2 - 10x + 9 = 0$

h) $2x^2 - 9x + 4 = 0$

c) $x^2 + 8x + 16 = 0$

i) $x^2 - 10x + 24 = 0$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

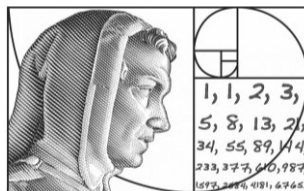
j) $6x^2 + x - 2 = 0$

e) $x^2 - x - 6 = 0$

k) $x^2 - 8x + 7 = 0$

f) $x^2 - 3x + 2 = 0$

l) $4x^2 - 4x + 1 = 0$



AULA 44

SOMA E PRODUTO



esta aula, estudaremos duas técnicas muito importantes que usamos para encontrar as raízes da equação de 2º grau sem utilizarmos a fórmula de Bhaskara. Essas técnicas são chamadas de **soma** e **produto**.

SOMA DAS RAÍZES

Antes de definirmos a fórmula da soma das raízes de uma equação de 2º grau, vamos somar as duas raízes e descobrir se existe alguma relação entre essa soma e os coeficientes de uma equação de segundo grau. Para isso, usaremos a fórmula do termo geral da equação de 2º grau.

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos que as raízes dessa equação são da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Calculando a soma das raízes temos que:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta}) + (-b - \sqrt{\Delta})}{2a} \\ &= \frac{-b - b + \sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos definir a soma das raízes de uma equação de 2º grau da seguinte forma:

Definição: a soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, é igual a $-\frac{b}{a}$.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Exemplos:

1. Encontre a soma das raízes da equação $2x^2 + 10x + 3 = 0$.

Resolução: Aplicando a fórmula da soma de raízes temos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{10}{2} = -5$$

2. Encontre a soma das raízes da equação $5x^2 - 12x - 4 = 0$.

Resolução: Aplicando a fórmula da soma de raízes temos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-12)}{5} = \frac{12}{5}$$

PRODUTO DAS RAÍZES

Antes de definirmos a fórmula do produto das raízes de uma equação de 2º grau, vamos multiplicar as duas raízes e descobrir se existe alguma relação entre essa multiplicação e os coeficientes de uma equação de segundo grau. Para isso, usaremos a fórmula do termo geral da equação de 2º grau.

Seja dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ temos que as raízes dessa equação são da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Calculando o produto das raízes temos que:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{(-b+\sqrt{\Delta}) \cdot (-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos definir o produto das raízes de uma equação de 2º grau da seguinte forma:

Definição: o produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, é igual a $\frac{c}{a}$.

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemplos:

1. Encontre o produto das raízes da equação $x^2 - 7x + 3 = 0$.

Resolução: Aplicando a fórmula do produto de raízes temos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{1} = 3$$

2. Encontre o produto das raízes da equação $2x^2 + 5x - 4 = 0$.

Resolução: Aplicando a fórmula do produto de raízes temos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-4}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

APLICAÇÕES DE SOMA E PRODUTO

Estudaremos duas aplicações de soma e produto das raízes de uma equação de 2º grau: encontrar as raízes da equação através de uma equação dada e encontrar a equação tendo as raízes.

Primeiramente estudaremos a forma de encontrar as raízes da equação através da soma e do produto.

Definição: Através da soma e do produto e tendo uma equação de 2º grau dada, podemos encontrar as raízes dessa equação sem o auxílio da fórmula do Bhaskara.

Exemplos:

1. Encontre as raízes da equação $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Resolução: Encontraremos as raízes dessa equação através da soma e do produto. Calculando a soma e o produto temos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = \frac{8}{1} = 8$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{15}{1} = 15$$

Após encontramos os resultados da soma e do produto das raízes, devemos encontrar quais números somados resultam em 8 e multiplicados resultam em 15. Os números procurados são 3 e 5.

Portanto, as raízes da equação $x^2 - 8x + 15 = 0$ são 3 e 5.

Prova real através da fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15$$

$$\Delta = 64 - 60$$

$$\Delta = 4$$

Encontrando as raízes, temos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{8 \pm 2}{2}$$

Portanto, as raízes são:

$$x_1 = \frac{8+2}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{8-2}{2} = 3$$

2. Encontre as raízes da equação $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Resolução: Encontraremos as raízes dessa equação através da soma e do produto. Calculando a soma e o produto temos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{1} = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-15}{1} = -15$$

Após encontramos os resultados da soma e do produto das raízes, devemos encontrar quais números somados resultam em -2 e multiplicados resultam em -15 . Os números procurados são 3 e -5 .

Portanto, as raízes da equação $x^2 + 2x - 15 = 0$ são 3 e -5 .

Observação: Quando não conseguirmos encontrar as raízes da equação através de soma e produto, devemos aplicar a fórmula de Bhaskara.

Agora, estudaremos a forma de encontrar uma equação que satisfaça as duas raízes dadas.

Definição: Através das duas raízes dadas de uma equação de 2° grau e da soma e produto conseguimos encontrar uma equação de 2° grau que tenha como solução essas duas raízes.

Exemplos:

1. Encontre uma equação que tenha as seguintes raízes: -1 e $-\frac{2}{3}$.

Resolução: Calculando a soma e o produto, temos que:

$$x_1 + x_2 = -1 + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{1} - \frac{2}{3} = \frac{-3-2}{3} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Como $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ então, temos que:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

Com esses resultados podemos concluir que $a = 3$, $b = 5$ e $c = 2$.

Portanto, uma equação de 2º grau que possui as raízes -1 e $-\frac{2}{3}$ é

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

2. Encontre uma equação que tenha as seguintes raízes: 2 e 3.

Resolução: Calculando a soma e o produto, temos que:

$$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6$$

Como $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ então, temos que:

$$-\frac{b}{a} = 5 \Rightarrow -b = 5a \Rightarrow b = -5a$$

$$\frac{c}{a} = 6 \Rightarrow c = 6a$$

Com esses resultados podemos concluir que $a = a$, $b = -5a$ e $c = 6a$. Logo, podemos assumir um valor qualquer para, desde que $a \neq 0$.

Portanto, uma equação de 2º grau que possui as raízes -1 e $-\frac{2}{3}$ é

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ATIVIDADES

1. Sem resolver, dê a soma e o produto das raízes de cada equação.

a) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

e) $-2x^2 - 11x - 3 = 0$

b) $2x^2 + 11x - 2 = 0$

f) $11x^2 - 7 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

g) $8x^2 + 5x = 0$

d) $7x^2 - 5x - 3 = 0$

h) $x + 1 = 2x^2$

2. Sendo p e q as raízes da equação $x^2 - x - 5 = 0$, calcule o valor de $(p + q)^{2pq}$

3. Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $5x^2 - 7x - 11 = 0$, calcule o valor de cada uma das expressões:

a) $x_1 + x_2$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b) $x_1 \cdot x_2$

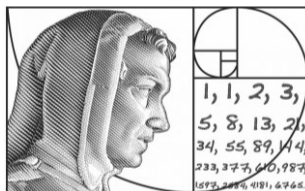
d) $(1 + x_1)(1 + x_2)$

4. Dada a equação $2x^2 + (k - 4)x + (6k - 2) = 0$, determine:

a) Para que valor de k as raízes têm soma 11?

b) Para que valor de k o número 0 é raiz?

5. Demonstre porque a soma das raízes é $-\frac{b}{a}$ e porque o produto das raízes é $\frac{c}{a}$.



AULA 48

AVALIAÇÃO

1. Resolva as equações:

a) $x^2 - 2x = 0$

b) $x^2 + 5x = 0$

c) $3x^2 - x = 0$

d) $2x^2 + x = 0$

e) $-x^2 + 4x = 0$

f) $-2x^2 - 7x = 0$

g) $4x^2 - 5x = 0$

h) $3x^2 + 7x = 0$

i) $\frac{x^2}{4} + \frac{2x}{3} = 0$

2. Demonstre a fórmula de Bhaskara.

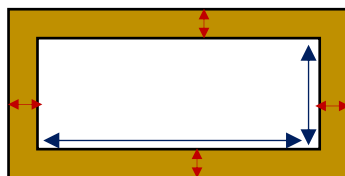
3. Demonstre como encontramos a fórmula da soma e do produto de raízes.

4. A soma S dos n primeiros números inteiros positivos é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$$

Agora, responda: quando essa soma dá 210?

5. A tela de um quadro tem a forma retangular e mede 50 cm por 30 cm . Nessa tela, foi colocada uma moldura, também retangular, de largura x uniforme. Calcule essa largura sabendo que o quadro todo passou a ocupar uma área de 2400 cm^2 .



6. Sem resolver, dê a soma e o produto das raízes de cada equação.

a) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

b) $2x^2 + 11x - 2 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $7x^2 - 5x - 3 = 0$

e) $-2x^2 - 11x - 3 = 0$

f) $11x^2 - 7 = 0$

g) $8x^2 + 5x = 0$

h) $x + 1 = 2x^2$

7. Fatore os seguintes trinômios:

a) $x^2 - 7x + 10$

b) $x^2 + 4x + 3$

c) $x^2 - 5x - 6$

d) $3x^2 - 7x + 2$

8. Resolva as equações abaixo:

a) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $9y^2 - 24y + 16 = 0$

d) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

e) $t^2 - t - 1 = 0$

f) $-x^2 + 11x - 28 = 0$

g) $4x^2 + 16x + 15 = 0$

h) $8x^2 - 10x + 3 = 0$

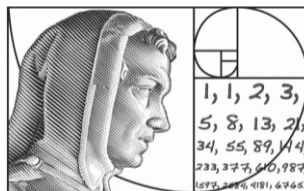
i) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

j) $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{4}{9} = 0$

9. Encontre a solução para a equação:

$$(t^2 + 2t)(t^2 - 2t) = 45$$

10. Se a um número real x adicionarmos o número real $\sqrt{x+2}$, vamos obter 10. Sabendo disto, qual é o valor do número x ?



AULA 51

SISTEMA DE INEQUAÇÕES

Nesta aula, estudaremos o sistema de inequações.

Para resolver um sistema de inequação devemos seguir três passos:

1º Passo: Resolva cada inequação separadamente.

2º Passo: Represente os resultados através da notação geométrica.

3º Passo: Faça a intersecção entre os resultados.

Observação: A intersecção entre os resultados é o conjunto formado pelos elementos em comum dos dois resultados e representado por $\cap$.

$$a \cap b \rightarrow \text{Lê-se “}a \text{ intersecção } b\text{”}.$$

Vejamos alguns exemplos de intersecção entre conjuntos:

Exemplos:

1. Dados o conjunto $A = \{0, 1, 3, 5, 6\}$ e o conjunto $B = \{2, 3, 4, 6\}$, encontre $A \cap B$.

Resolução: Se queremos encontrar $A \cap B$, precisamos analisar os elementos de ambos os conjuntos. Pertencem à intersecção aqueles que aparecem nos dois conjuntos ao mesmo tempo. Assim, temos que $A \cap B = \{3, 6\}$.

2. Qual é a intersecção entre o Conjunto dos Naturais e o Conjunto dos Racionais?

Resolução: $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$.

3. Dados o conjunto $A = \{\text{Pares}\}$ e o conjunto $B = \{\text{Ímpares}\}$, encontre $A \cap B$.

Resolução: Ao realizarmos a intersecção entre o conjunto dos números pares com o conjunto dos números ímpares não encontraremos nenhum número que esteja em ambos os conjuntos, sendo assim, temos um conjunto sem elemento, ou melhor, um conjunto vazio e representamos como $A \cap B = \{ \}$ ou $A \cap B = \{\emptyset\}$.

Após entendermos melhor a intersecção entre conjuntos, iremos resolver alguns sistemas de inequações e encontrar suas soluções.

Exemplos:

1. Calcule:

$$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ 2x - 11 < 1 \end{cases}$$

Resolução: Primeiramente devemos resolver cada inequação separadamente.

$$x - 5 > 0$$

$$2x - 11 < 1$$

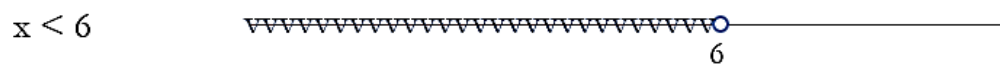
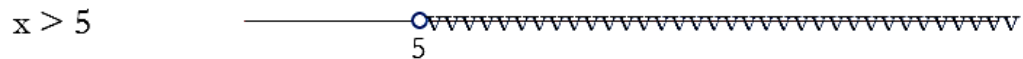
$$x > 0 + 5$$

$$2x < 1 + 11$$

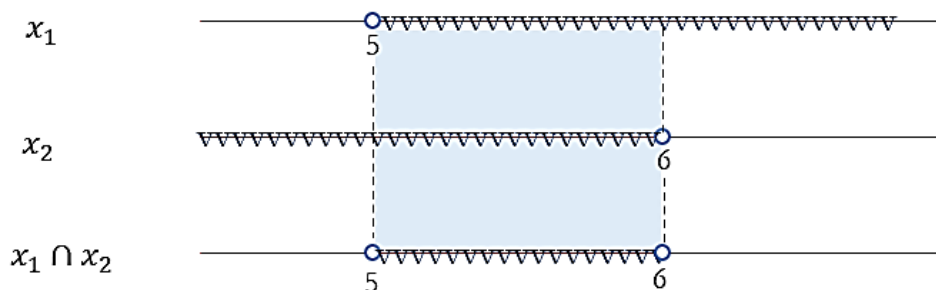
$$x > 5$$

$$x < 6$$

Agora iremos representar os resultados de cada inequação na notação geométrica.



Aplicando a intersecção nos resultados, temos que:



Portanto, a solução desse sistema de inequações é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$.

2. Calcule:

$$\begin{cases} x + 1 > 2x - 7 \\ x + 1 < 1 - 2x \end{cases}$$

Resolução: Calculando cada inequação separadamente, temos que:

$$x + 1 > 2x - 7$$

$$x + 1 < 1 - 2x$$

$$x - 2x > -7 - 1$$

$$x + 2x < 1 - 1$$

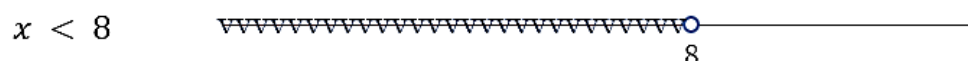
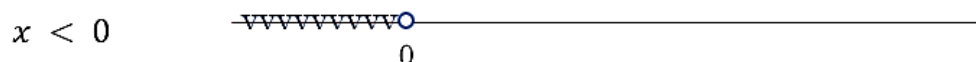
$$(-x > -8) \cdot (-1)$$

$$3x < 0$$

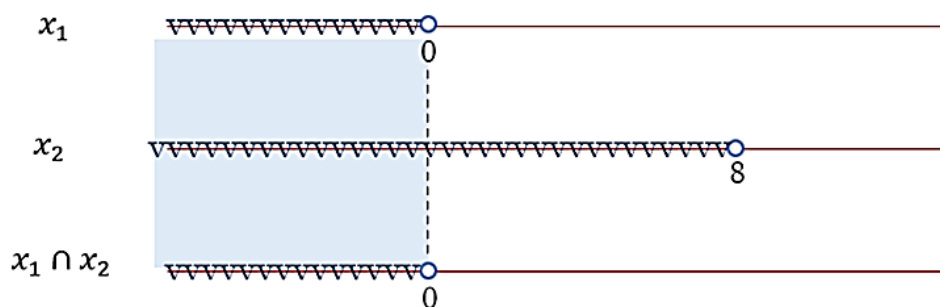
$$x < 8$$

$$x < 0$$

Agora iremos representar os resultados de cada inequação na notação geométrica.



Aplicando a intersecção nos resultados, temos que:



Portanto, a solução desse sistema de inequações é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

3. Calcule:

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq x \\ x \leq 1 + 3x \end{cases}$$

Resolução: Calculando cada inequação separadamente, temos que:

$$2x - 3 \leq x$$

$$x \leq 1 + 3x$$

$$2x - x \leq 3$$

$$x - 3x \leq 1$$

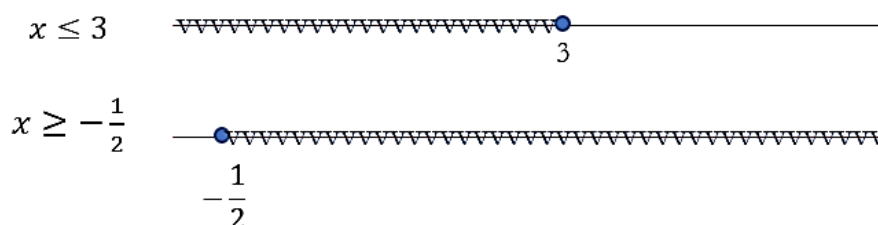
$$x \leq 3$$

$$-2x \leq 1$$

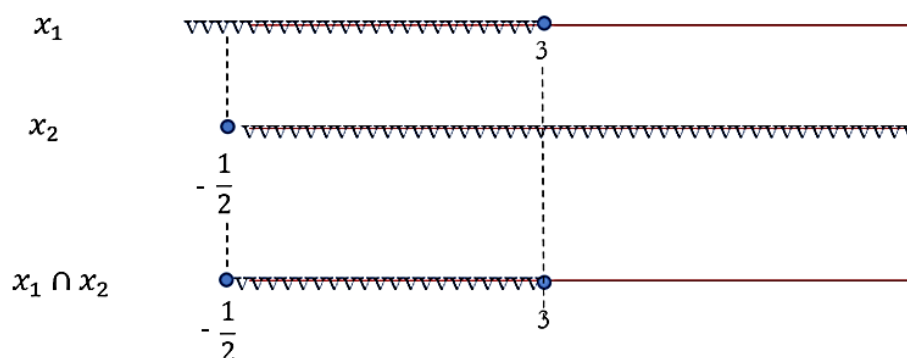
$$2x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

Agora iremos representar os resultados de cada inequação na notação geométrica.



Aplicando a intersecção nos resultados, temos que:



Portanto, a solução desse sistema de inequações é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$.

4. Calcule:

$$\begin{cases} x + 4 > 4 \\ 3x + 1 \leq 7 \end{cases}$$

Resolução: Calculando cada inequação separadamente, temos que:

$$x + 4 > 4$$

$$3x + 1 \leq 7$$

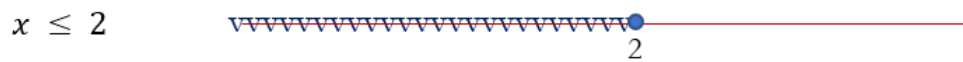
$$x > 4 - 4$$

$$3x \leq 6$$

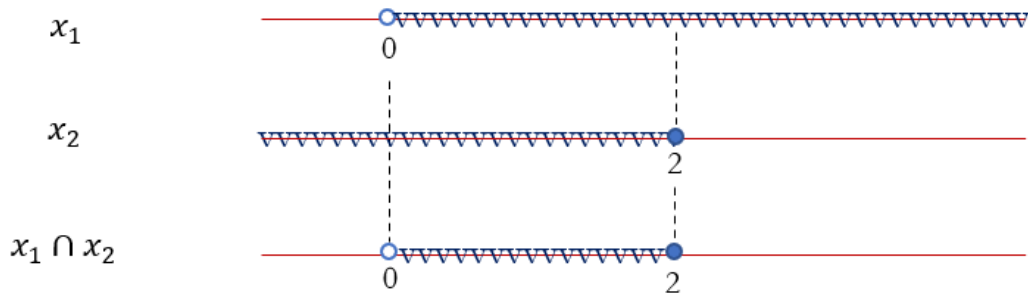
$$x > 0$$

$$x \leq 2$$

Agora iremos representar os resultados de cada inequação na notação geométrica.



Aplicando a intersecção nos resultados, temos que:



Portanto, a solução desse sistema de inequações é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$.

5. Calcule:

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 1 \\ 2x + 12 \geq 3x + 9 \\ x - 3 > -1 \end{cases}$$

Resolução: Notem que o sistema possui três inequações. Assim, temos que a solução do sistema será a intersecção das três inequações. Calculando cada inequação separadamente, temos que:

$$2x + 1 \geq 1$$

$$2x + 12 \geq 3x + 9$$

$$x - 3 > -1$$

$$2x \geq 1 - 1$$

$$2x - 3x \geq 9 - 12$$

$$x > -1 + 3$$

$$2x \geq 0$$

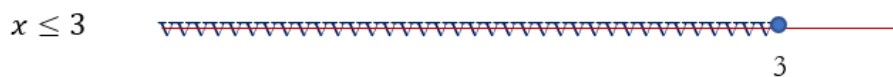
$$-x \geq -3$$

$$x > 2$$

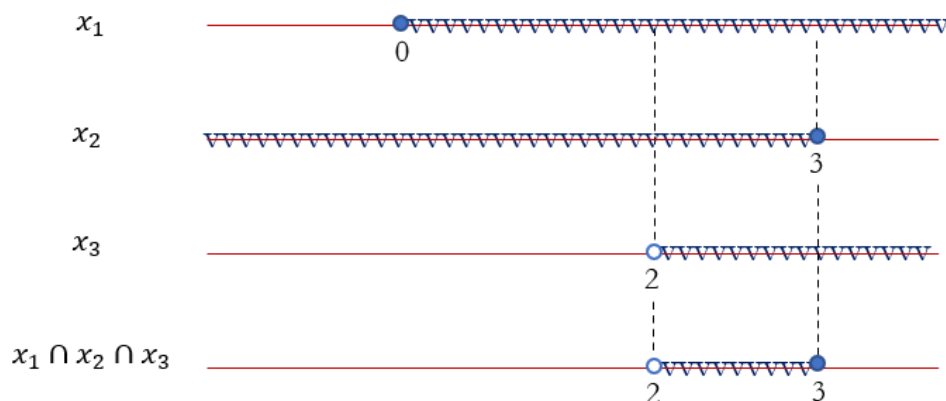
$$x \geq 0$$

$$x \leq 3$$

Agora iremos representar os resultados de cada inequação na notação geométrica.



Aplicando a intersecção nos resultados, temos que:



Portanto, a solução desse sistema de inequações é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$.

6. Resolva o sistema abaixo.

$$\begin{cases} 2x + 6 \leq 2 \\ 6x + 9 > 39 \end{cases}$$

Resolução: Calculando cada inequação separadamente, temos que:

$$2x + 6 \leq 2$$

$$6x + 9 > 39$$

$$2x \leq 2 - 6$$

$$6x > 39 - 9$$

$$2x \leq -4$$

$$6x > 30$$

$$x \leq -2$$

$$x > 5$$

Agora iremos representar os resultados de cada inequação na notação geométrica.



Aplicando a intersecção nos resultados, temos que:



Portanto, a solução desse sistema de inequações é $S = \{\}$.

ATIVIDADES

1. Responda:

- a) Qual é a intersecção entre o Conjunto dos Naturais e o Conjunto dos Inteiros?
- b) Qual é a intersecção entre o Conjunto dos Racionais e o Conjunto dos Irracionais?
- c) Qual é a intersecção entre o Conjunto dos Naturais, Inteiros e Racionais?

2. Encontre $A \cap B$ dos itens abaixo:

- a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 5, 8, 11\}$
- b) $A = \{\mathbb{Z} - \mathbb{N}\}$ e $B = \{\mathbb{Q}\}$

3. Resolva os sistemas de inequações a seguir:

- a) $\begin{cases} 2x + 12 \leq x - 4 \\ 3x - 2 \leq 2x \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 0 < 4x - 20 \\ 3 > 6x - 33 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} > \frac{3x-5}{4} \\ x \geq 2x - 5 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} 5x \geq 0 \\ 6x + 21 \geq 9x + 12 \\ \frac{x}{3} > \frac{2}{3} \end{cases}$

4. Qual é o menor número natural tal que seu dobro seja menor que seu quádruplo menos 17?

5. Qual é o maior inteiro que satisfaz a inequação $\frac{x}{3} + \frac{5}{6} < 2$?

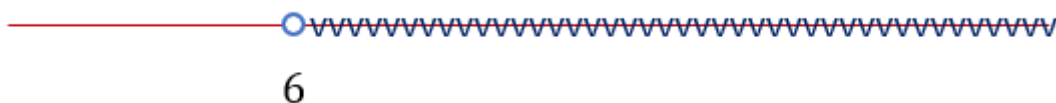
6. Resolva: $x(\sqrt{9} - 1) < 2^{-1}$.

7. Quantos são os números inteiros e negativos que satisfazem a seguinte inequação:

$$6 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} \right) \leq \frac{3x+9}{4}$$

8. Descreva, utilizando a notação matemática, o conjunto-solução apresentado em cada item:

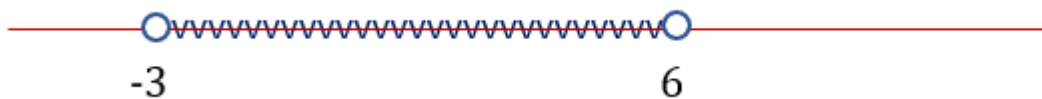
a)



b)



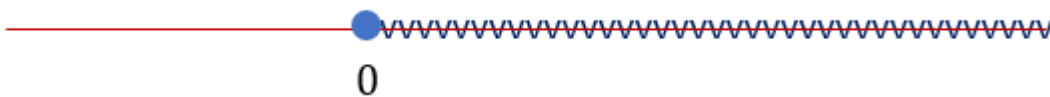
c)



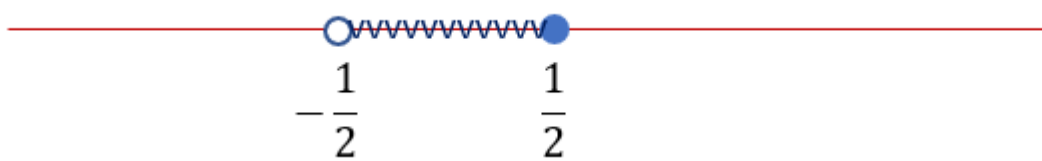
d)



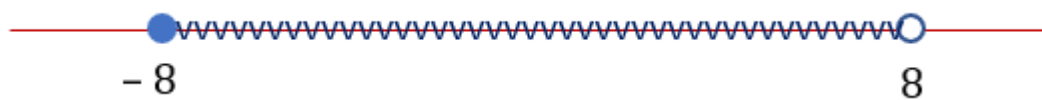
e)



f)



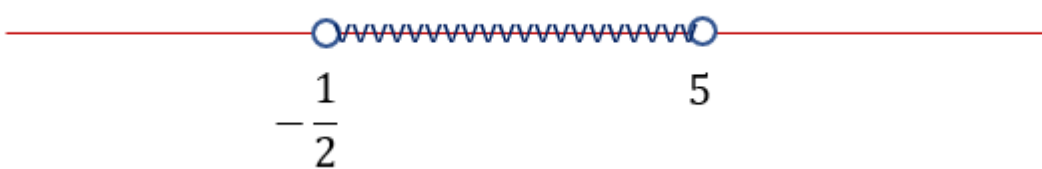
g)

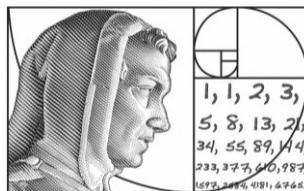


h)



i)





AULA 55

DIAGRAMA DE FLECHAS

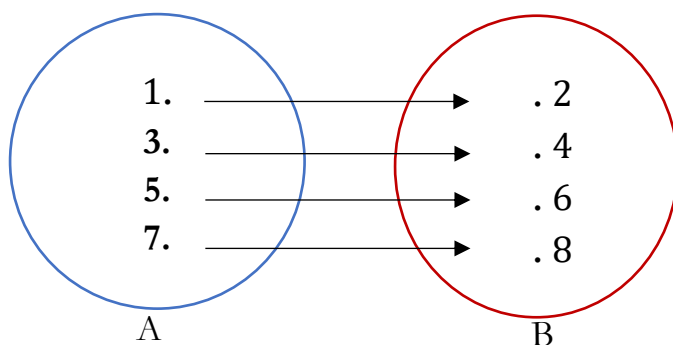


esta aula, estudaremos o diagrama de flechas.

Definição: O diagrama de flechas é a representação de dois conjuntos em forma de elipses cujos elementos de cada conjunto se encontram no interior da elipse e a correspondência entre esses elementos é representada por uma flecha.

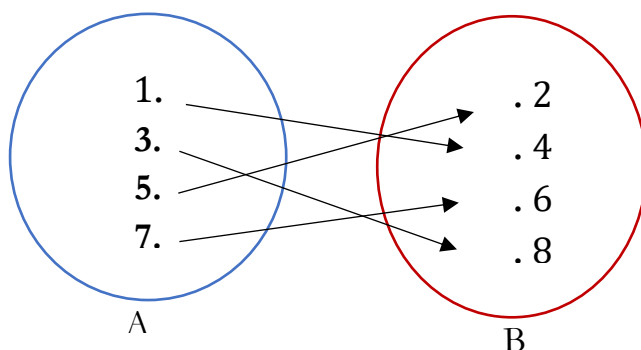
Exemplos:

1. Seja o conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e o conjunto $B = \{2, 4, 6, 8\}$. A relação entre esses conjuntos é dado pela soma de uma unidade dos elementos do conjunto A .



Com isso, formamos os seguintes pares ordenados: $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$ e $(7,8)$.

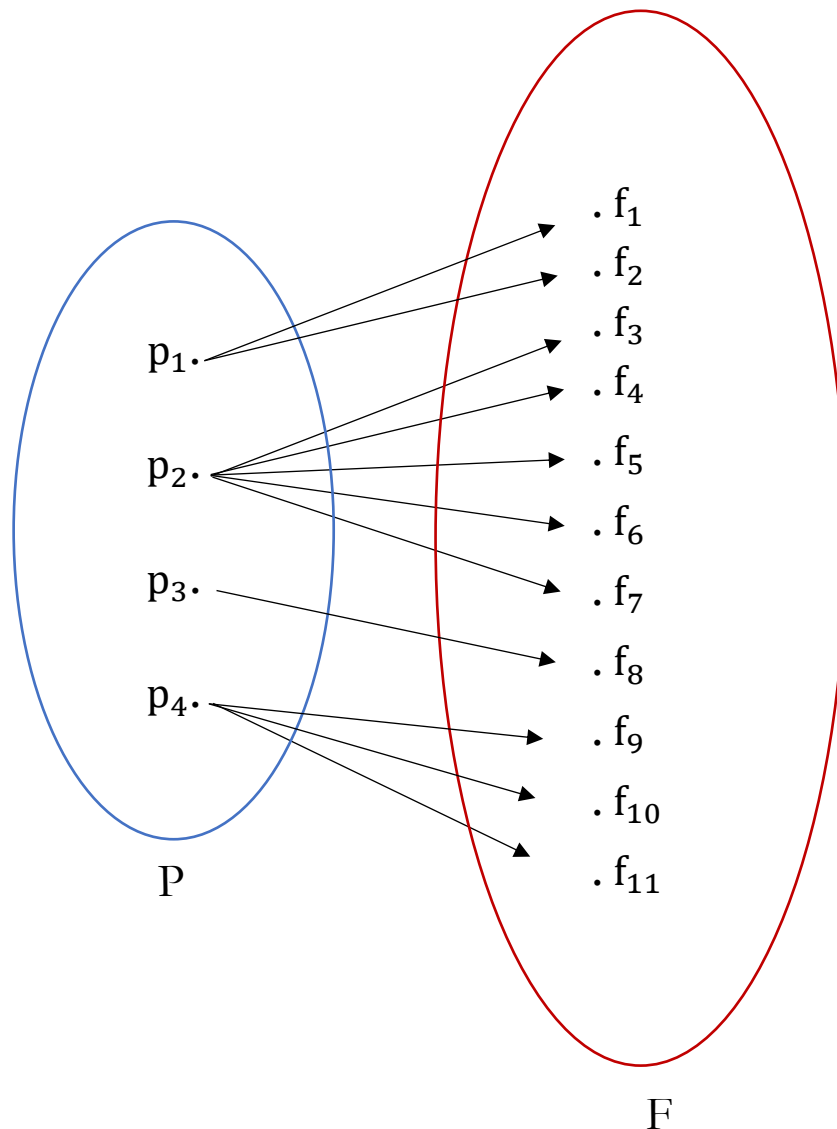
2. Seja o conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e o conjunto $B = \{2, 4, 6, 8\}$ vejamos uma outra relação com esses conjuntos através do diagrama de flechas.



Com isso, formamos os seguintes pares ordenados: $(1,4)$, $(3,8)$, $(5,2)$ e $(7,6)$.

3. Seja o conjunto P o conjunto dos pais, dados por $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, onde p_1 é o pai 1, p_2 é o pai 2 e assim por diante, e o conjunto F é o conjunto dos filhos que é dado por $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}\}$. O pai 1 possui dois filhos, o pai 2 possui 5 filhos, o pai 3 possui 1 filho e o pai 4 possui 3 filhos. Considerando o conjunto dos pais e dos filhos, monte as seguintes relações com o diagrama de flechas.

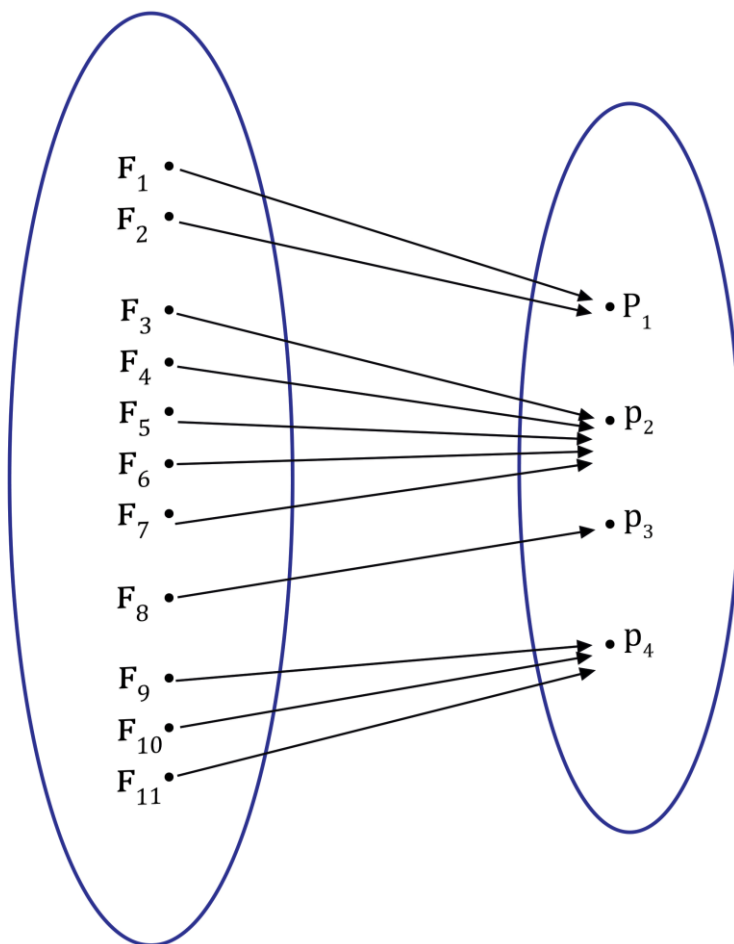
a) A que associa cada pai com o seu filho.



Considerando f_1 e f_2 sendo filhos do pai 1; f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 sendo filhos do pai 2; f_8 sendo filho do pai 3; e f_9, f_{10}, f_{11} sendo filhos do pai 4; podemos formar os seguintes pares ordenados:

$$(p_1, f_1), (p_1, f_2), (p_2, f_3), (p_2, f_4), (p_2, f_5), (p_2, f_6), (p_2, f_7), (p_3, f_8), (p_4, f_9), \\ (p_4, f_{10}), (p_4, f_{11})$$

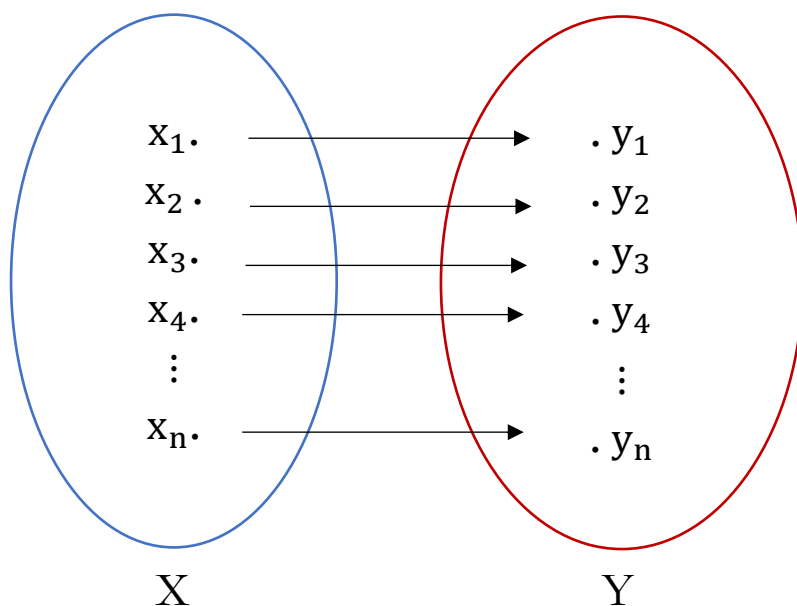
b) A que associa cada filho com o seu pai.



Temos os seguintes pares ordenados:

$(f_1, p_1), (f_2, p_1), (f_3, p_2), (f_4, p_2), (f_5, p_2), (f_6, p_2), (f_7, p_2), (f_8, p_3), (f_9, p_4),$
 $(f_{10}, p_4), (f_{11}, p_4)$

4. Seja os conjuntos $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n\}$.
 Vejamos uma relação entre esses conjuntos através do diagrama de flechas.



Com isso, formamos os seguintes pares ordenados: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) ..., (x_n, y_n) .

Observação: Os diagramas das flechas nos ajudam a entender melhor os conceitos de: domínio, contradomínio, imagem e função que estudaremos ao longo deste volume.

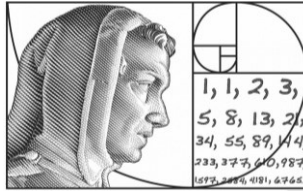
ATIVIDADES

1. Construa um diagrama de flechas relacionando o conjunto A com o conjunto B tal que $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ e B o conjunto dos números primos até o número 20. A relação desses conjuntos é dada pelo primeiro par flechando o primeiro primo; o segundo par flechando o segundo primo e assim por diante.

2. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, represente pelo diagrama de flechas a relação dos elementos de A flechando todos os elementos de B que são maiores do que eles.

3. Seja $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, represente pelo diagrama de flechas a relação do conjunto B sendo flechado por todos os divisores que pertencem ao conjunto A .

4. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, represente pelo diagrama de flechas a relação dos elementos de A flechando os elementos iguais acrescidos de dois.



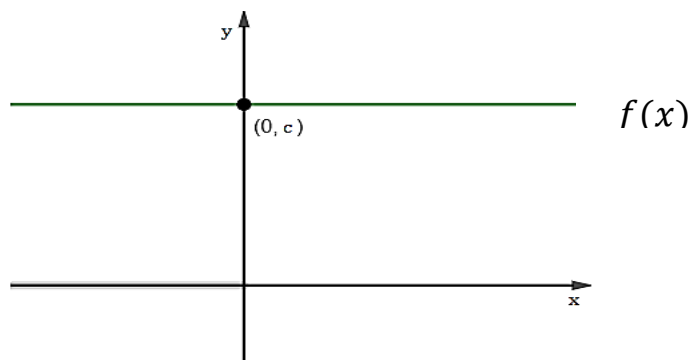
AULA 59

FUNÇÕES LINEARES

Nesta aula, estudaremos três tipos de funções: a função constante, a função identidade e a função linear.

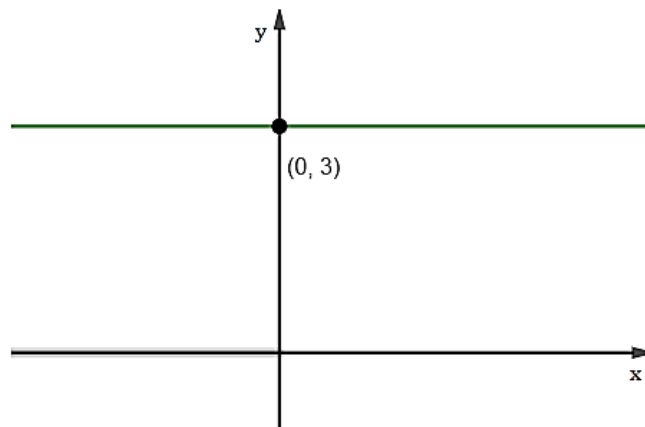
FUNÇÃO CONSTANTE

Definição: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função constante quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o mesmo elemento $c \in \mathbb{R}$.

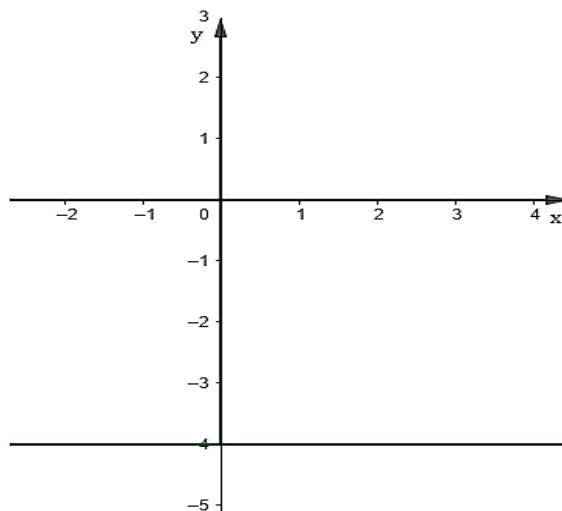


Exemplos:

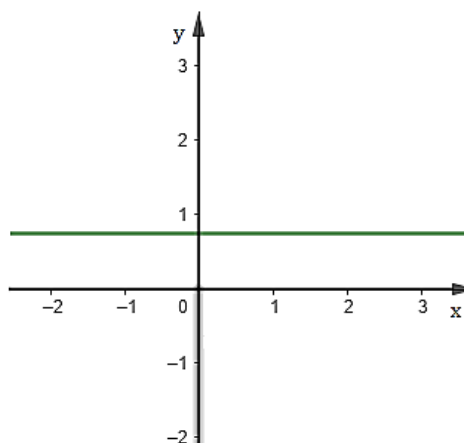
1. Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3$.



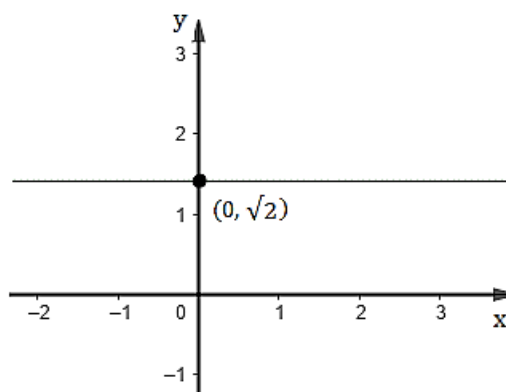
2. Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -4$.



3. Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{3}{4}$.



4. Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{2}$.



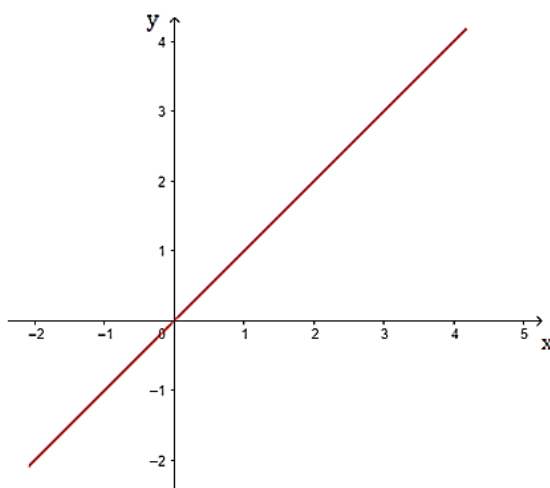
A função constante é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo eixo y no ponto $(0, c)$, sendo c o valor constante.

E a imagem desta função será sempre fixa, pois todos os valores de x associam sempre ao mesmo valor c (constante), ou seja, $Im(f) = \{c\}$.

FUNÇÃO IDENTIDADE

Definição: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função identidade quando $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x$$



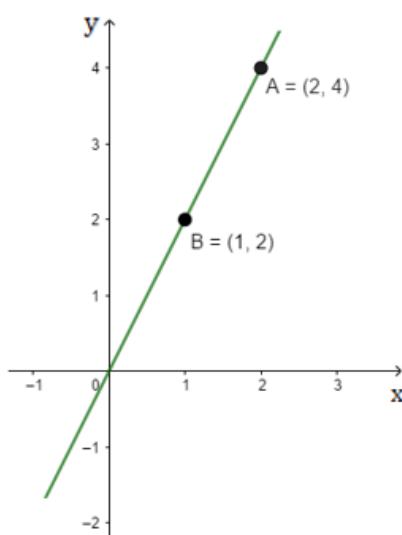
FUNÇÃO LINEAR

Definição: Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função linear quando existe um número real a tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

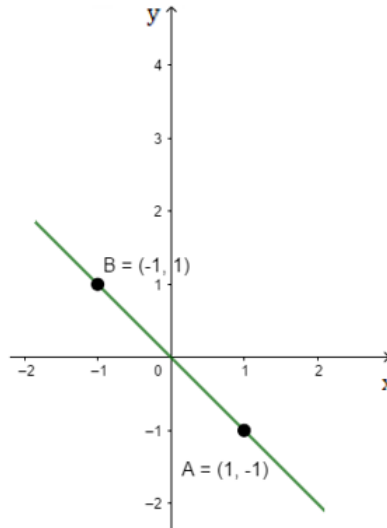
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = ax$$

Exemplos:

1. Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$.



2. Seja uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x$.



Observação: No exemplo 2, o número real a é igual a -1 .

Na função linear, os gráficos apresentam uma reta não vertical passando sempre pela origem, que é o ponto $(0, 0)$.

ATIVIDADES

1. Construa o gráfico das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

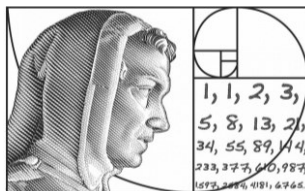
- a) $y = 2$
- b) $y = \sqrt{2}$
- c) $y = -3$
- d) $y = 0$

2. Construa, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

- a) $y = x$
- b) $y = 2x$
- c) $y = 3x$
- d) $y = \frac{x}{2}$

3. Construa, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

- a) $y = -x$
- b) $y = -2x$
- c) $y = -3x$
- d) $y = -\frac{x}{2}$



AULA 64

AVALIAÇÃO

1. Calcule:

a) $2 - 2x \geq 3 - 3x$

b) $\begin{cases} 2x + 12 \leq x - 4 \\ 3x - 2 \leq 2x \end{cases}$

c) $2x - 7 < x + 1 < 1 - 2x$

d) $2x + 3 > x + 1 > 5 - x$

2. Duas variáveis x e y estão relacionadas pela fórmula $5x + 3y = 20$.

a) Se $x = 10$, calcule y .

b) Se $y = 15$, calcule x .

c) Expresse x em função de y .

d) Expresse y em função de x .

3. Dada a função $f(x) = 5x - 1$, preencha a tabela abaixo:

x	$f(x)$
0	
1	
5	
	2
	- 4

4. Três amigos conversavam sobre suas matérias preferidas entre quatro: matemática (M), português (P), história (H) e geografia (G), sendo que Alberto (A) prefere matemática, Beto (B) prefere português e Carlos (C) prefere geografia (G). Sejam os conjuntos $T = \{A, B, C\}$, formado pelos três amigos, e $Q = \{M, P, G, H\}$, formado pelas matérias em discussão, pode-se dizer que a função $f: T \rightarrow Q$ é:

a) Injetora.

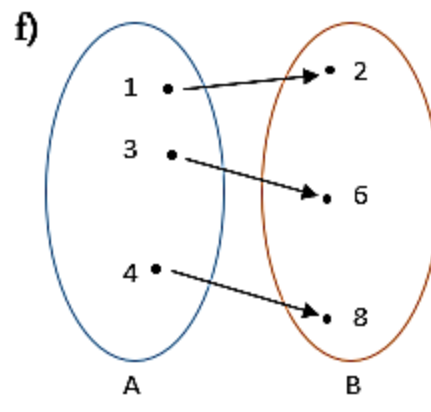
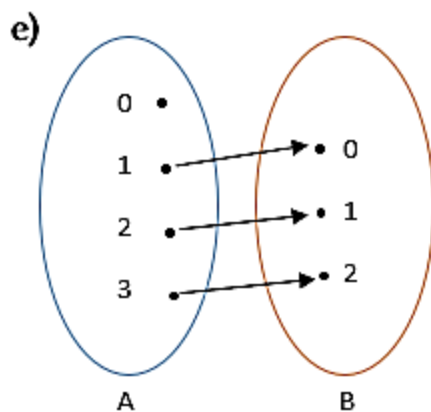
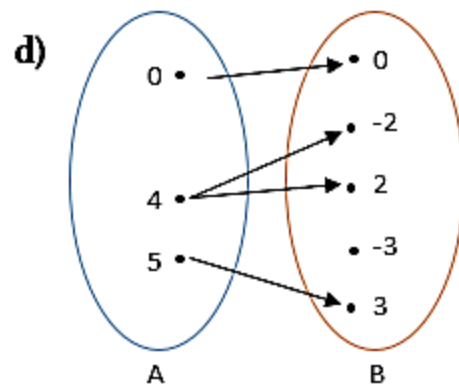
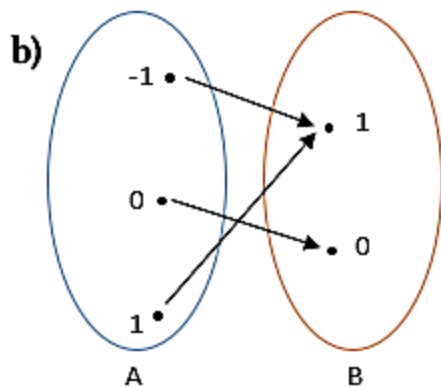
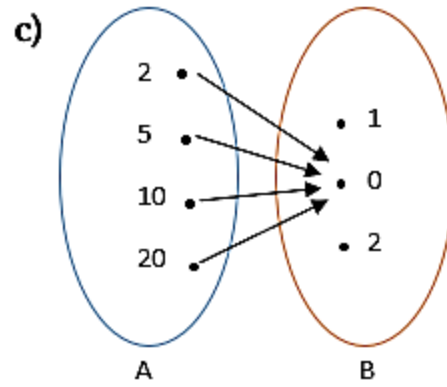
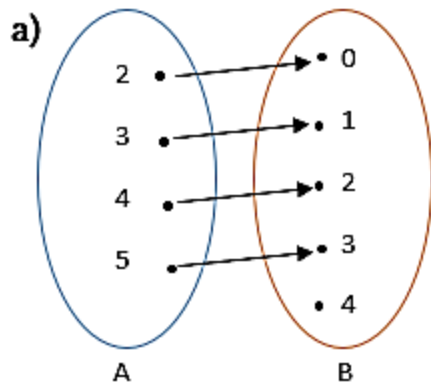
b) Sobrejetora.

c) Bijetora.

d) Nem injetora nem sobrejetora.

Determine qual é o domínio, qual é o contradomínio e qual é a imagem.

5. Quais dos seguintes diagramas representam uma função de **A** em **B**. Identifique o domínio, o contradomínio e a imagem, e classifique-os como injetora, sobrejetora e bijetora.



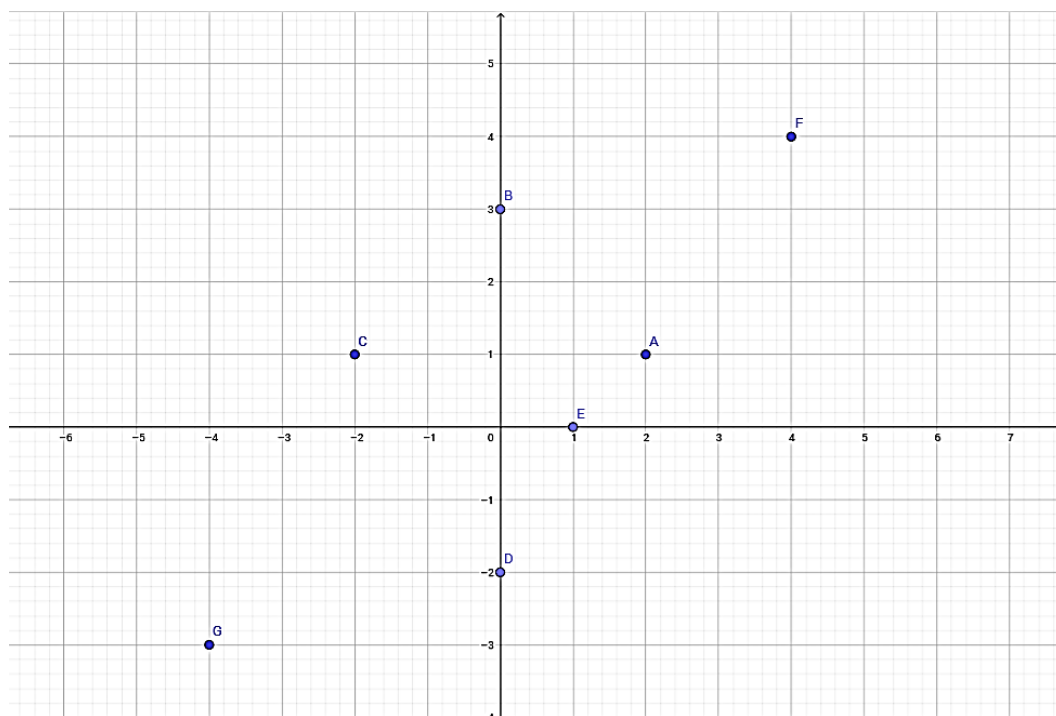
6. Sobre o plano cartesiano responda:

a) Quais são os nomes dados ao eixo X e ao eixo Y?

b) Quais os sinais de x e y no 1º quadrante? E no 2º quadrante? E no 3º quadrante? E no 4º quadrante?

c) Por convenção, como os números do eixo X estão dispostos? E os do eixo Y?

7. Dados os pontos abaixo, indique quais são suas coordenadas:



8. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetora, sobrejetora ou bijetora:

a) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x - 4$$

b) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-1, 2, 5, 8\}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x - 4$$

9. Classifique cada função como crescente, decrescente ou constante. Indique também qual é a taxa de variação, e o valor em que a reta intercepta o eixo Y e o eixo X. Depois, trace o gráfico de cada uma.

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = 6$

c) $f(x) = -2x + 1$

d) $f(x) = 6 - 3x$

e) $f(x) = -4 + 2x$

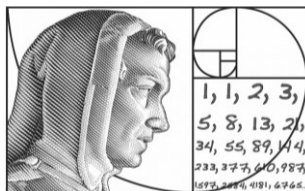
f) $f(x) = 1 - \sqrt{5}$

10. Faça o gráfico de cada função abaixo:

a) $f(x) = -x + 2$

b) $f(x) = 5$

c) $f(x) = -2x - 1$



AULA 67

ÂNGULOS CONSECUTIVOS E ÂNGULOS ADJACENTES

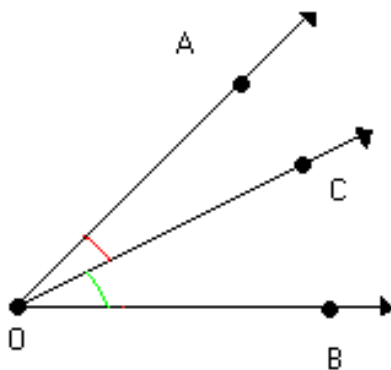
Nesta aula, estudaremos os ângulos consecutivos e os ângulos adjacentes.

ÂNGULOS CONSECUTIVOS

Definição: dois ângulos são consecutivos quando possuem o mesmo vértice e um lado comum.

Exemplos:

1. Observando a figura abaixo, mostre que os ângulos $\hat{A}\hat{O}C$ e $\hat{C}\hat{O}B$ são consecutivos.



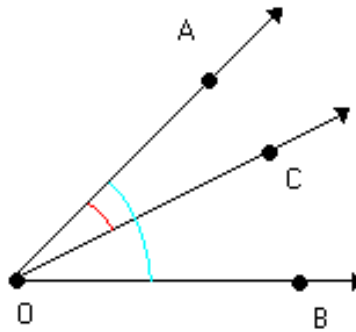
Resolução: Os ângulos $\hat{A}\hat{O}C$ e $\hat{C}\hat{O}B$ possuem:

Vértice comum: O

Lado Comum: $\overrightarrow{OC}$

Portanto, os ângulos $\hat{A}\hat{O}C$ e $\hat{C}\hat{O}B$ são consecutivos.

2. Observando a figura abaixo, mostre que os ângulos $\hat{A}\hat{O}C$ e $\hat{A}\hat{O}B$ são consecutivos.



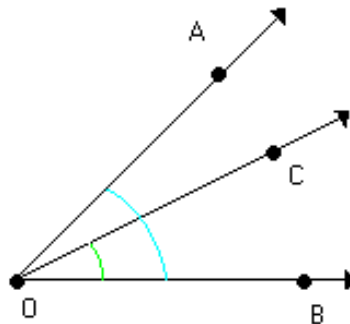
Resolução: Os ângulos $\widehat{AOC}$ e $\widehat{AOB}$ possuem:

Vértice comum: O

Lado Comum: $\overrightarrow{OA}$

Portanto, os ângulos $\widehat{AOC}$ e $\widehat{AOB}$ são consecutivos.

3. Observando a figura abaixo, mostre que os ângulos $\widehat{COB}$ e $\widehat{AOB}$ são consecutivos.



Resolução: Os ângulos $\widehat{COB}$ e $\widehat{AOB}$ possuem:

Vértice comum: O

Lado Comum: $\overrightarrow{OB}$

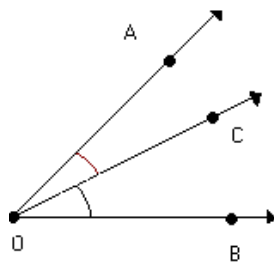
Portanto, os ângulos $\widehat{COB}$ e $\widehat{AOB}$ são consecutivos.

ÂNGULOS ADJACENTES

Definição: dois ângulos são **adjacentes** quando são consecutivos e não possuem pontos internos.

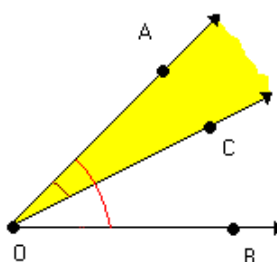
Exemplos:

1. Observando a figura abaixo, vemos que os ângulos $\widehat{AOC}$ e $\widehat{COB}$ são consecutivos e não possuem pontos internos em comum.



Portanto, os ângulos $\widehat{AOC}$ e $\widehat{COB}$ são adjacentes.

2. Observando a figura abaixo, vemos que os ângulos $\widehat{AOC}$ e $\widehat{AOB}$ são consecutivos e possuem pontos internos em comum.

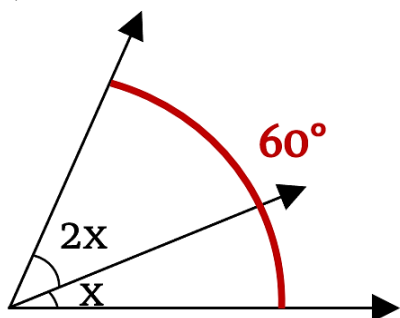


Portanto, os ângulos $\widehat{AOC}$ e $\widehat{AOB}$ não são adjacentes.

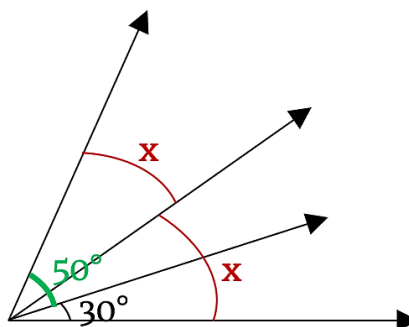
ATIVIDADES

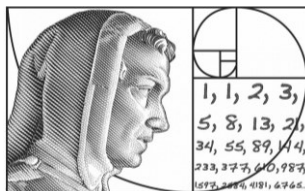
1. Defina o que são ângulos consecutivos e dê dois exemplos.
2. Defina o que são ângulos adjacentes e dê dois exemplos.
3. Dois ângulos opostos pelo vértice medem $3x - 75^\circ$ e $x + 15^\circ$. Determine o valor de x ?
4. Determine o valor de x :

a)



b)





AULA 69

ÂNGULOS ALTERNOS

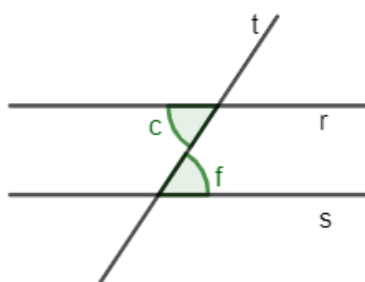


esta aula, estudaremos os ângulos alternos, que se dividem duplamente: internos e externos.

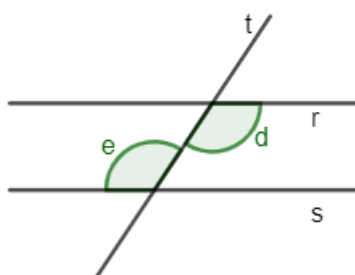
Definição: ângulos alternos são pares de ângulos não adjacentes que estão em lados opostos em relação à reta transversal.

Exemplos:

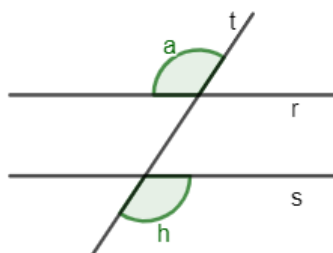
1. Os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{f}$ são alternos internos.



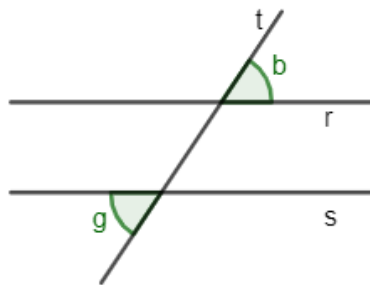
2. Os ângulos $\hat{d}$ e $\hat{e}$ são alternos internos.



3. Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{h}$ são alternos externos.

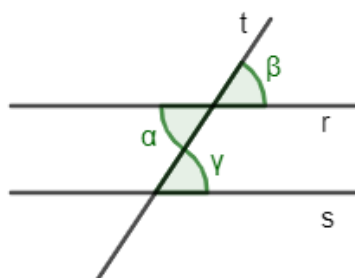


4. Os ângulos $\hat{b}$ e $\hat{g}$ são alternos externos.



Agora, determinaremos as relações entre os ângulos alternos formados por duas retas paralelas e uma transversal entre elas.

1º Caso: Sejam duas retas r e s paralelas e uma reta transversal t . Vamos determinar as relações entre os ângulos abaixo:



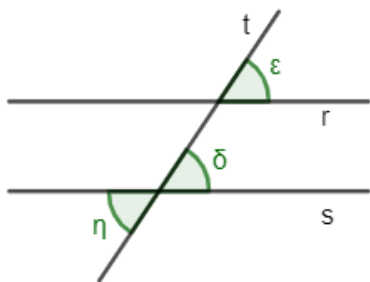
Inicialmente, podemos relacionar os ângulos com o O.P.V. e correspondência, e então, temos que:

$$\alpha = \beta \text{ (ângulos O.P.V.)}$$

$$\beta = \gamma \text{ (ângulos correspondentes)}$$

Como $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma$, então, temos que $\alpha = \gamma$ (alternos internos).

2º Caso: Sejam duas retas r e s paralelas e uma reta transversal t . Vamos determinar as relações entre os ângulos abaixo:



Inicialmente, podemos relacionar os ângulos com o O.P.V. e correspondência, e então, temos que:

$$\eta = \delta \text{ (ângulos O.P.V.)}$$

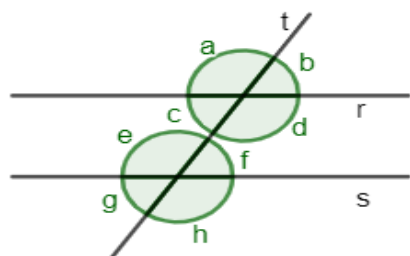
$$\delta = \varepsilon \text{ (ângulos correspondentes)}$$

Como $\eta = \delta$ e $\delta = \varepsilon$, então, temos que $\eta = \varepsilon$ (alternos externos).

Podemos definir a congruência entre ângulos alternos da seguinte forma:

Definição: duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal determinam **ângulos alternos congruentes** (internos ou externos).

Pela definição, temos que:



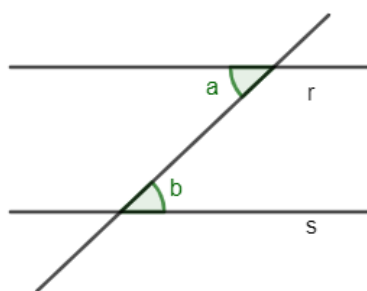
Se $r // s$, então:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{c} = \hat{f} \\ \hat{d} = \hat{e} \end{array} \right\} \text{alternos internos}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{a} = \hat{h} \\ \hat{b} = \hat{g} \end{array} \right\} \text{alternos externos}$$

Exemplo:

Na figura abaixo temos dois ângulos, $a = 4x - 38^\circ$ e $b = x + 4^\circ$. Qual é a medida em graus dos ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$, sendo $r // s$?



Resolução: Como $r // s$ e os ângulos a e b são alternos internos, então:

$$4x - 38 = x + 4$$

$$3x = 42$$

$$x = 14^\circ$$

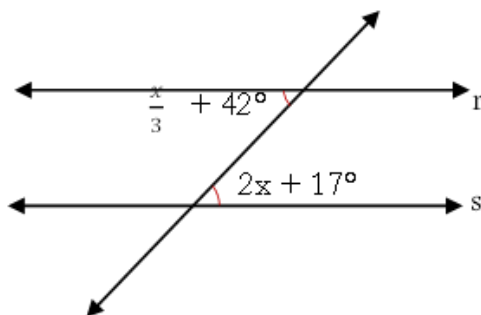
Agora, vamos calcular o $\hat{b}$:

$$b = x + 4 = 14 + 4 = 18^\circ$$

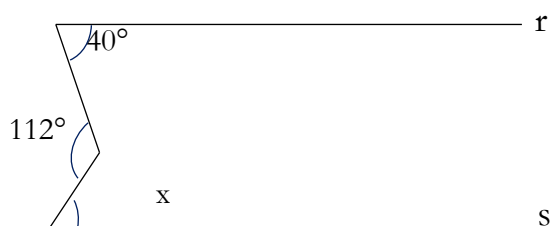
Portanto, $a = 18^\circ$ e $b = 18^\circ$.

ATIVIDADES

1. Na figura a seguir, determine o valor de x , sabendo que $r \parallel s$.



2. (Unimontes-MG) Se $r \parallel s$, então o valor de x , na figura abaixo, é:



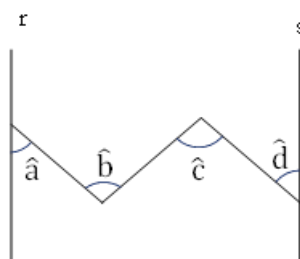
a) 52°

c) 72°

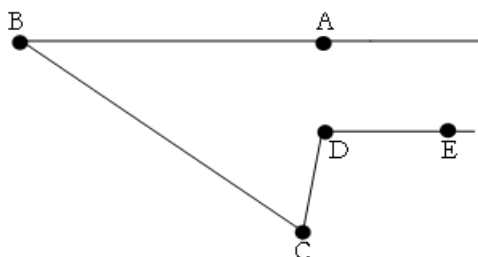
b) 68°

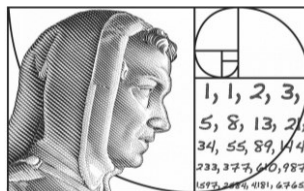
d) 58°

3. Na figura, as retas r e s são paralelas. O ângulo $\hat{a}$ mede 42° , o ângulo $\hat{b}$ mede 71° e o ângulo $\hat{d}$ mede 33° . Determine a medida do ângulo $\hat{c}$.



4. Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Sendo $B\hat{C}D = 68^\circ$ e $A\hat{B}C = 34^\circ$, calcule a medida do ângulo $C\hat{D}E$.





AULA 76

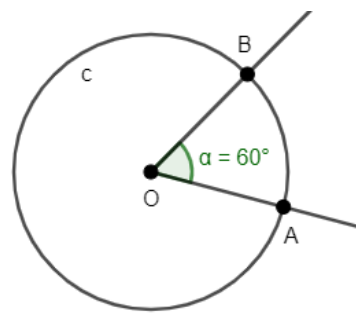
ÂNGULOS CENTRAL E ÂNGULO INSCRITO

Nesta aula, estudaremos o ângulo central e o ângulo inscrito na circunferência.

ÂNGULO CENTRAL

Definição: qualquer ângulo que tenha o vértice no centro de uma circunferência é denominado **ângulo central**.

Quando traçamos um ângulo central na circunferência, podemos notar que este ângulo determina um arco na circunferência. A medida deste arco corresponde ao valor do ângulo central, isto é, a medida do arco na circunferência pode ser dada em graus.

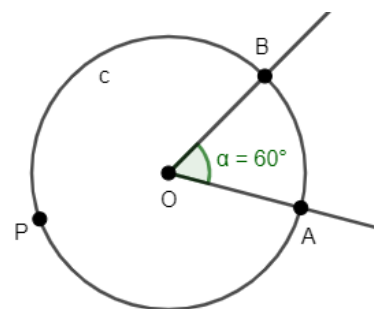


Exemplos:

1. Na figura abaixo, $\widehat{AB}$ é o arco determinado na circunferência pelos lados do ângulo central $A\hat{O}B$.

Temos que:

- A medida do arco menor $\widehat{AB}$ é 60° , pois o ângulo central $A\hat{O}B$ mede 60° .
- A medida do arco $\widehat{APB}$ é 300° , pois $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

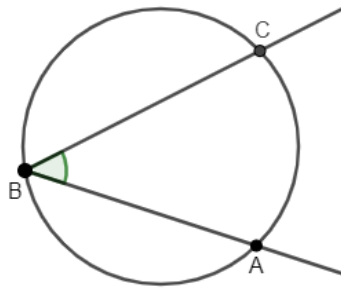


ÂNGULO INSCRITO

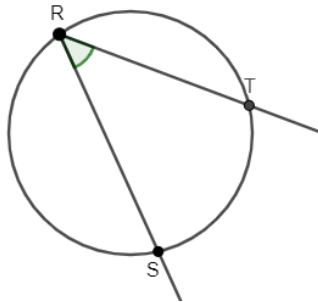
Definição: **ângulo inscrito** é todo ângulo que tem o vértice na circunferência e seus lados secantes a ela.

Exemplos:

1. Na figura, $\widehat{ABC}$ é um ângulo inscrito. Ele determina na circunferência o arco $\widehat{AC}$.

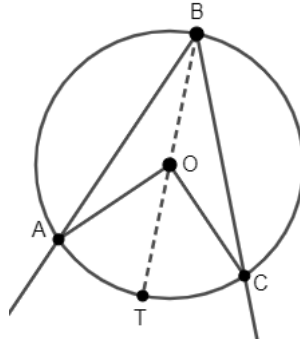


2. Na figura, $\widehat{SRT}$ é um ângulo inscrito. Ele determina na circunferência o arco $\widehat{ST}$.



A todo ângulo inscrito corresponde um ângulo central, que determina na circunferência o mesmo arco determinado pelo ângulo inscrito.

Na figura a seguir, temos:

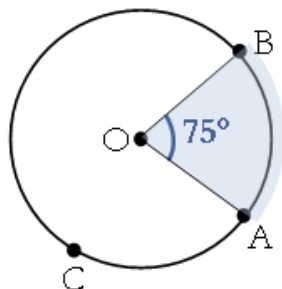


- i) $\widehat{ABC}$ é um ângulo inscrito.
- ii) $\widehat{AOC}$ é um ângulo central correspondente.
- iii) Ambos determinam o mesmo arco $\widehat{AC}$.

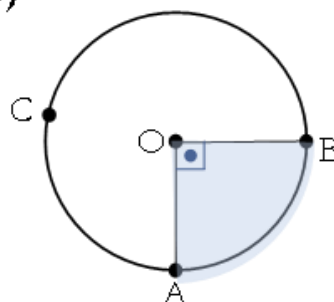
ATIVIDADES

1. Em cada uma das figuras, dê a medida do arco $\widehat{AB}$ e a do arco $\widehat{ACB}$:

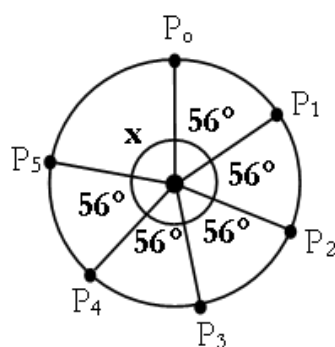
a)



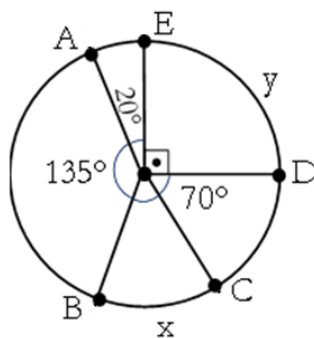
b)



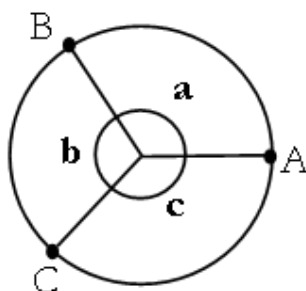
2. Observando a figura, dê o valor da medida x .



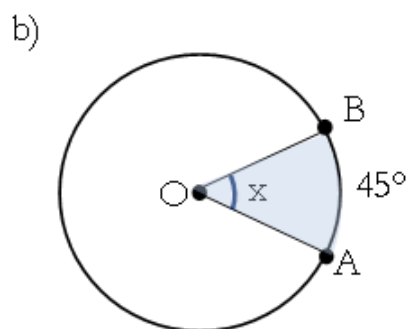
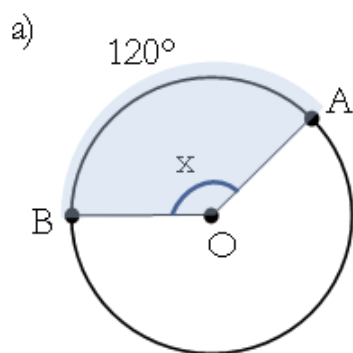
3. Na figura a seguir, calcule o valor de x (medida do arco $\widehat{BC}$) e o valor de y (medida do arco $\widehat{DE}$).



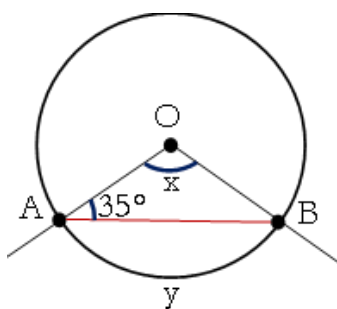
4. Na figura, temos que $a = b = c$, em que a , b e c são as medidas dos ângulos centrais associados a cada arco. Determine a medida dos arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ e $\widehat{CA}$.



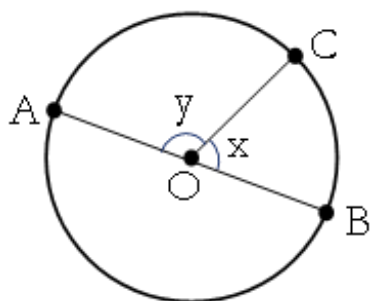
5. Em cada uma das figuras a seguir, calcule a medida x do ângulo central associado ao arco menor $\widehat{AB}$.



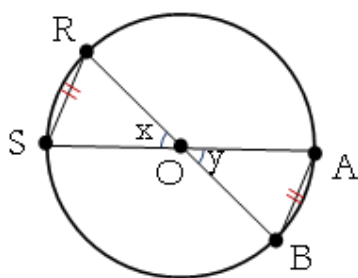
6. Sabendo que o triângulo ΔOAB da figura é isósceles, determine a medida x do ângulo central $\widehat{AOB}$ e a medida y do arco $\widehat{AB}$ associado a esse ângulo central.



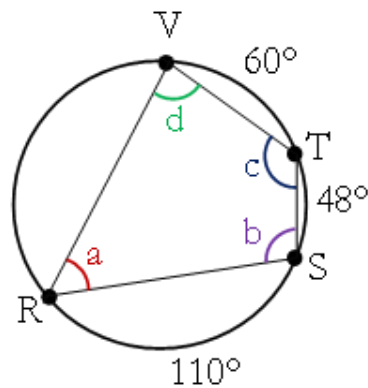
7. Sabendo que o arco $\widehat{BC}$ mede 80° , calcule o valor da expressão $y - x$.



8. Na figura a seguir, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{RS}$ são congruentes. Você pode afirmar que os triângulos ΔAOB e ΔROS são congruentes? Em caso afirmativo, que caso de congruência justifica sua resposta?



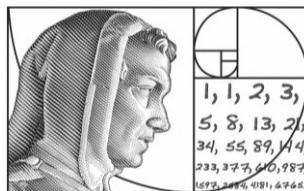
9. Determine as medidas a , b , c e d , indicadas na figura.



10. Em uma circunferência a medida do arco $\widehat{AB}$ é $med(\widehat{AB}) = 2x$; a medida do arco $\widehat{BC}$ é $med(\widehat{BC}) = 3x$; a medida do arco $\widehat{CD}$ é $med(\widehat{CD}) = x + 3$; e a medida do arco $\widehat{DA}$ é $med(\widehat{DA}) = x + 50^\circ$. Determine a medida do ângulo inscrito:

a) $\widehat{BAC}$;

b) $\widehat{BCD}$.



AULA 77

RELAÇÃO ENTRE ÂNGULOS INSCRITOS E MEDIDA DO ÂNGULO CENTRAL



esta aula, estudaremos a relação entre a medida de um ângulo inscrito e a medida do ângulo central correspondente.

Teorema: a medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.

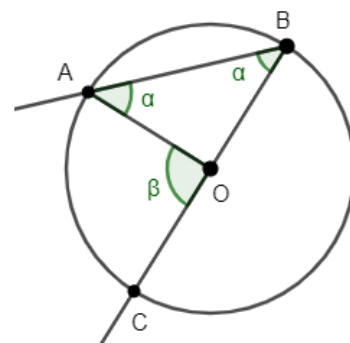
Demonstração: Vamos demonstrar esta relação considerando três

casos:

1º caso: O centro O pertence a um dos lados do ângulo inscrito.

Na figura:

- i) α é a medida do ângulo inscrito;
- ii) β é a medida do ângulo central correspondente.



Note que o triângulo ΔOAB é isósceles, pois $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ (raio) e $\overline{AB}$ é a base. Portanto, os ângulos da base medem α .

Como β representa a medida do ângulo externo do triângulo ΔOAB , temos:

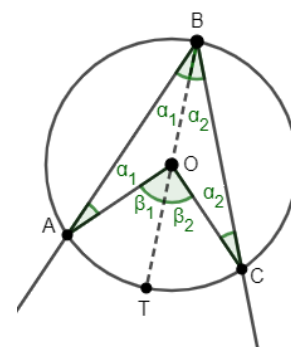
$$\beta = \alpha + \alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}$$

2º caso: O centro O é interno ao ângulo inscrito.

Vamos, novamente, indicar por:

- i) α a medida do ângulo inscrito;
- ii) β a medida do ângulo central correspondente.

Traçando, pelo vértice B, um diâmetro da circunferência, dividimos o ângulo inscrito em dois ângulos de medidas α_1 e α_2 ($\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$) e o ângulo central corresponde em dois ângulos de medidas β_1 e β_2 ($\beta_1 + \beta_2 = \beta$).



De acordo com o 1º caso, temos que:

$$\beta_1 = 2\alpha_1 \text{ (considerando o triângulo AOB).}$$

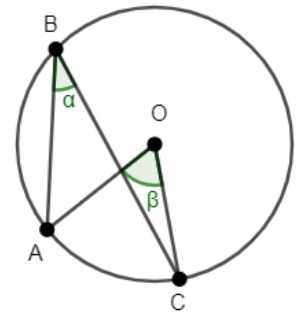
$$\beta_2 = 2\alpha_2 \text{ (considerando o triângulo COB).}$$

Adicionando membro a membro, temos que:

$$\beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow \underbrace{\beta_1 + \beta_2}_{\beta} = 2 \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\alpha} \Rightarrow \beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}$$

3º caso: O centro O é externo ao ângulo inscrito.

Denominando α a medida do ângulo inscrito e β a medida do ângulo central correspondente, é possível demonstrar, de acordo com a figura abaixo, que é válida a relação $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

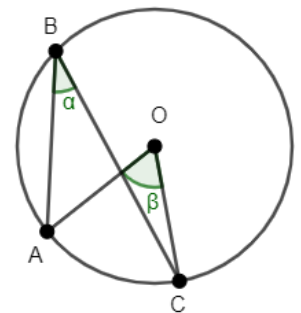


Como o ângulo central tem a mesma medida do arco determinado por ele na circunferência, existe uma relação entre a medida do ângulo inscrito e a medida do arco correspondente.

Definição: a medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco determinado por ele na circunferência.

Na figura seguinte, temos:

- i) α é a medida do ângulo inscrito $\widehat{ABC}$;
- ii) $\widehat{AC}$ é o arco determinado pelo ângulo inscrito $\widehat{ABC}$.

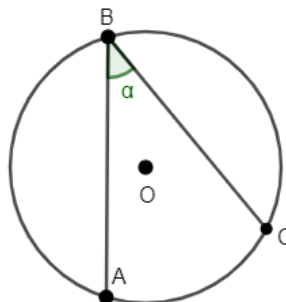


Então, temos que:

$$\alpha = \frac{\text{medida do arco } \widehat{AC}}{2}$$

Exemplos:

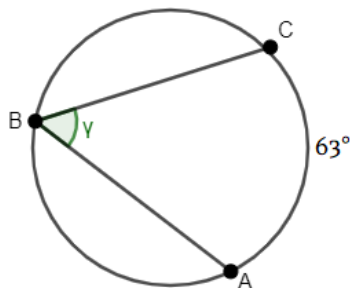
1. Determine a medida α do ângulo inscrito $\widehat{ABC}$ na figura a seguir.



Resolução: Como a medida do arco $\widehat{AC}$ é 40° , então, temos que:

$$\alpha = \frac{\text{medida do arco } \widehat{AC}}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

2. Na figura a seguir, γ é a medida do arco $\widehat{AC}$, associado ao ângulo inscrito $\widehat{ABC}$. Determine o valor de γ .



Resolução: Conforme os dados na figura, temos que:

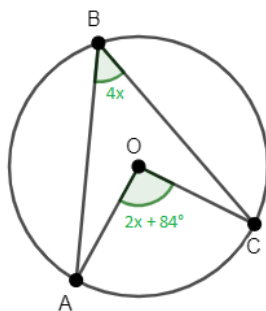
γ é a medida do arco $\widehat{AC}$.

55° é a medida do ângulo inscrito $\widehat{ABC}$.

Então, temos que:

$$55^\circ = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \gamma = 110^\circ$$

3. Encontre o valor da medida de x na figura abaixo.



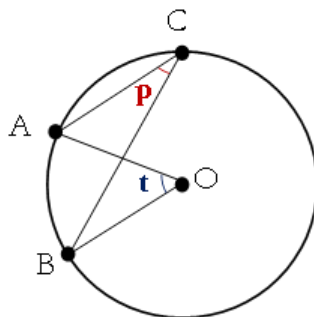
Resolução: Pela figura, temos que o ângulo $\widehat{AOC}$ é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $\widehat{ABC}$.

Então, temos que:

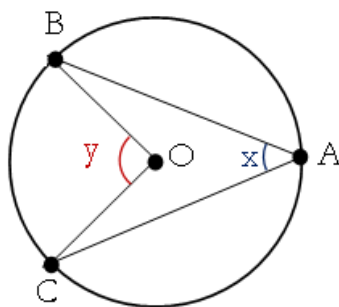
$$4x = \frac{2x + 84^\circ}{2} \Rightarrow 8x = 2x + 84^\circ \Rightarrow 6x = 84^\circ \Rightarrow x = 14^\circ$$

ATIVIDADES

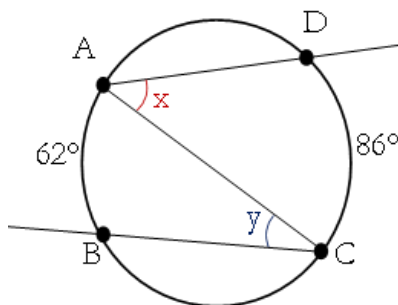
1. Qual é a relação de igualdade entre as medidas dos ângulos p e t indicados na figura?



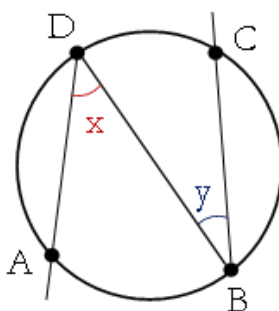
2. A medida do arco $\widehat{BC}$ é 92° . Determine as medidas x e y indicadas na figura.



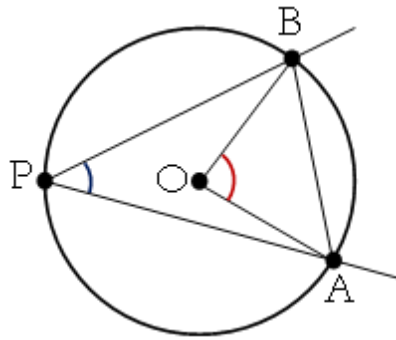
3. Considerando a figura abaixo, calcule o valor da expressão $x - y$.



4. A medida do arco $\widehat{AB}$ corresponde a $\frac{1}{5}$ da medida da circunferência (em graus), enquanto a medida do arco $\widehat{CD}$ corresponde a $\frac{1}{6}$ da medida da circunferência (em graus). Determine as medidas x e y indicadas na figura.



5. Na circunferência da figura abaixo, a corda $\overline{AB}$ determina um arco que mede 82° .

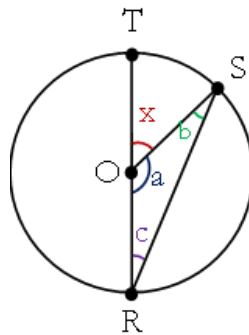


Sabendo que O é o centro e P um ponto qualquer da circunferência, determine a medida do ângulo:

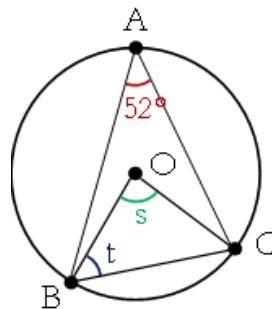
a) $\widehat{AOB}$

b) $\widehat{APB}$

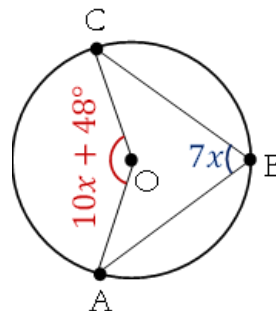
6. Sabendo que $\overline{RS}$ mede 140° , calcule o valor de x , a , b e c .



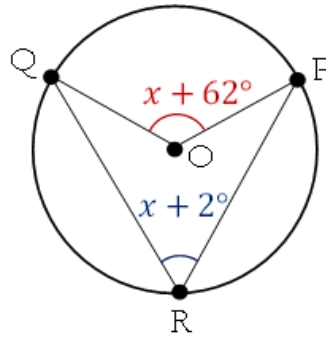
7. Observando a circunferência da figura, determine as medidas s e t indicadas.



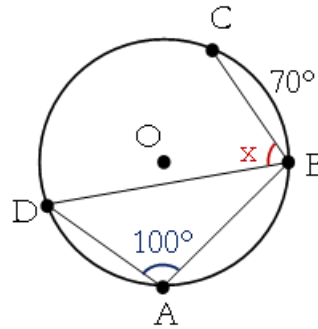
8. Dada a circunferência a seguir, determine as medidas dos ângulos $\widehat{AOC}$ e $\widehat{ABC}$.



9. Qual é a medida do ângulo inscrito na figura a seguir?



10. Observando esta figura, determine a medida do arco $\widehat{CD}$ e a medida x do ângulo $D\hat{B}C$.



11. Uma semicircunferência tem centro O e diâmetro $\overline{AB}$, com $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$. A medida do arco CD é 45° . Determine a medida x indicada na figura a seguir:

