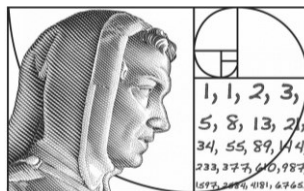

ENSINO FUNDAMENTAL – 9º ANO – MATEMÁTICA VOLUME II

Apostila do 9º ano do Ensino Fundamental, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



MATEMÁTICA



AULA 83

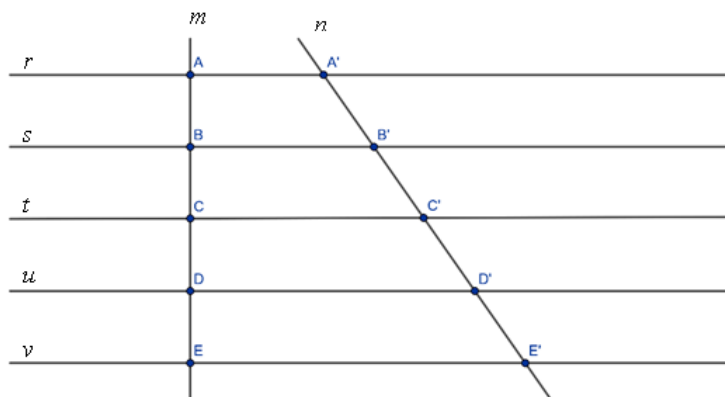
SEGMENTOS CORRESPONDENTES E COMENSURÁVEIS

Nesta aula, estudaremos os segmentos correspondentes e os segmentos comensuráveis.

SEGMENTOS CORRESPONDENTES

Sejam dadas duas transversais a um feixe de paralelas. Podemos definir os segmentos correspondentes da seguinte forma:

Definição: São segmentos correspondentes, os segmentos cujas extremidades são pontos correspondentes entre essas duas transversais.



Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são correspondentes.

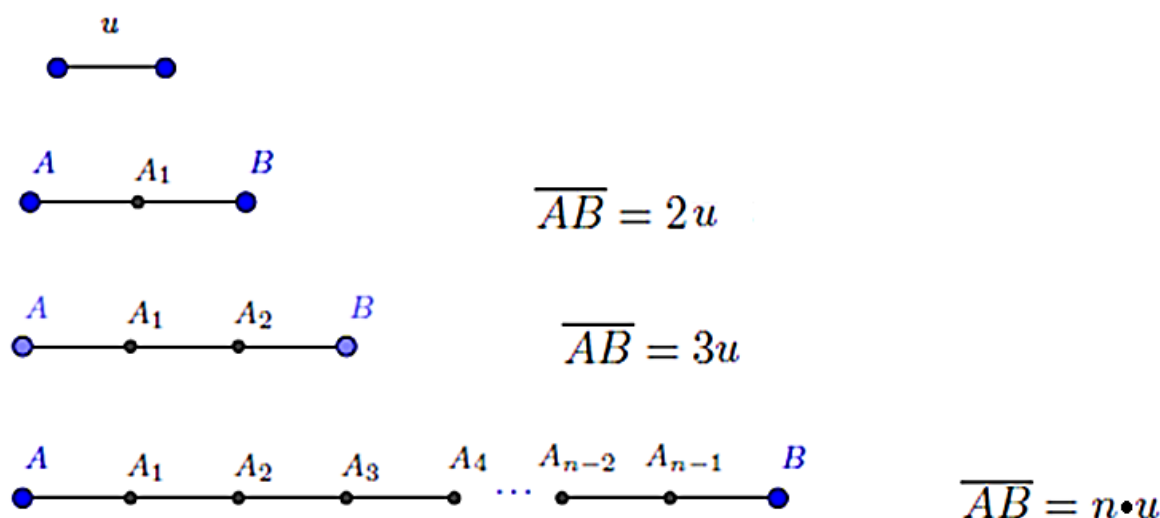
Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ são correspondentes, entre outros.

SEGMENTOS COMENSURÁVEIS

Definição: Segmentos comensuráveis são segmentos que podem ser medidos.

Para medirmos os segmentos comensuráveis devemos primeiramente tomar uma unidade de medida como parâmetro.

Se tomamos a medida u como parâmetro, sendo u a unidade de medida dada, podemos calcular a medida do segmento $\overline{AB}$ conforme a figura a seguir:



Note que em todos os exemplos da figura anterior existe um padrão:

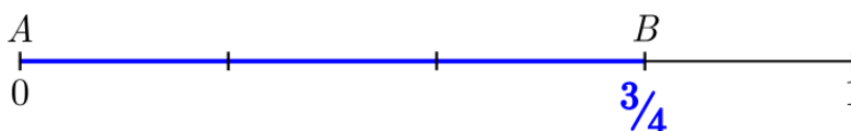
- No primeiro segmento $\overline{AB}$ existe somente 1 ponto (A_1) e a medida do segmento é $2u$.
- No segundo segmento $\overline{AB}$ existem 2 pontos (A_1, A_2) e a medida do segmento é $3u$.
- No terceiro segmento $\overline{AB}$ existem $(n - 1)$ pontos ($A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$) e a medida do segmento é $n \cdot u$.

Observação: Medir um segmento comensurável significa descobrir quantas vezes esse segmento contém a unidade de medida dada ou o segmento unitário.

Exemplos

1. A grandeza utilizada para medir a distância de um segmento, ou de dois lugares em linha reta é chamada de comprimento. As unidades de medida mais comuns para o comprimento são: metro (m), quilômetro (km) e centímetro (cm).

2. Medindo o segmento $\overline{AB}$ com a unidade de medida sendo $\frac{1}{4}$.

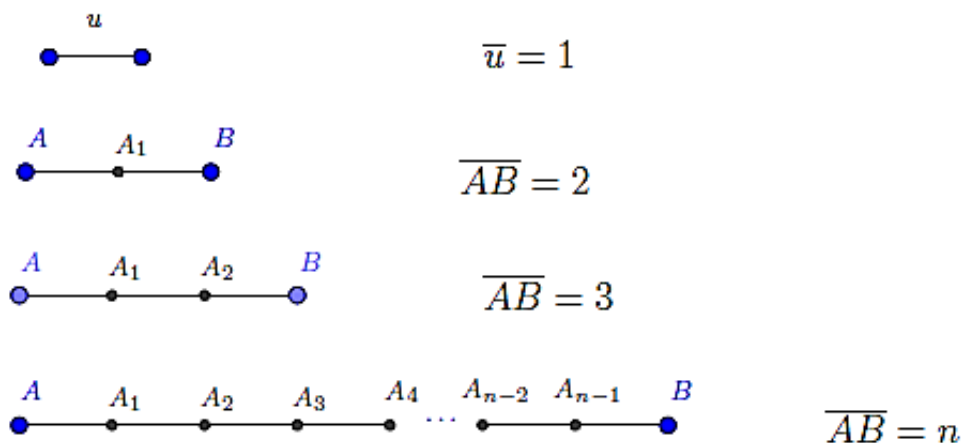


3. Medindo o segmento $\overline{AB}$ com a unidade de medida sendo $\frac{1}{4}$.



Definição: Dado um inteiro n , se for possível obter $n - 1$ pontos intermediários $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ no segmento $\overline{AB}$ tal que os segmentos $\overline{AA_1}, \overline{A_1A_2}, \dots, \overline{A_{n-1}B}$ sejam

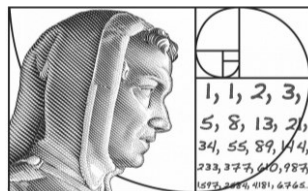
todos congruentes ao segmento unitário previamente definido, conclui-se que a medida do segmento $\overline{AB}$ será n .



Observação: Não será o nosso objetivo de estudo, mas existem segmentos que são incomensuráveis, isto é, que não conseguimos medir. Como exemplo de segmentos incomensuráveis, temos a diagonal de um quadrado: não é comensurável com o lado do quadrado.

ATIVIDADES

1. O que são pontos e segmentos correspondentes? Faça um desenho em seu caderno e utilize-o para responder.
2. O que significa que um segmento seja comensurável?



AULA 88

SEMELHANÇA

Nesta aula, iniciaremos o nosso estudo da semelhança.

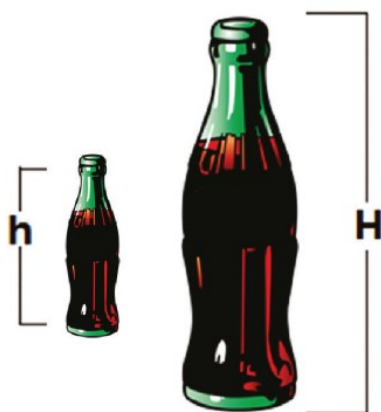
A palavra semelhança é usada para indicar os objetos que são parecidos ou que possuem alguma característica parecida.

Exemplos:

1. Irmãos gêmeos são semelhantes.



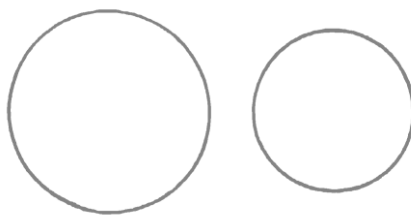
2. Garrafas de refrigerante semelhantes.



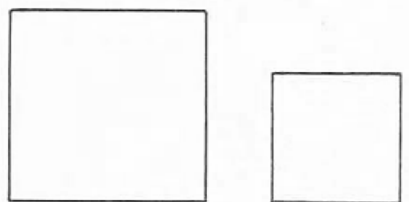
Definição: Duas figuras são semelhantes se tiverem a mesma forma, não importando o tamanho.

Exemplos:

1. Duas circunferências são sempre semelhantes.



2. Dois quadrados são sempre semelhantes.



Observação: Os triângulos não são todos semelhantes, pois nem todos os triângulos possuem a mesma forma, pois temos vários tipos de triângulos.

Podemos melhorar a definição de semelhança entre figuras geométricas, da seguinte forma:

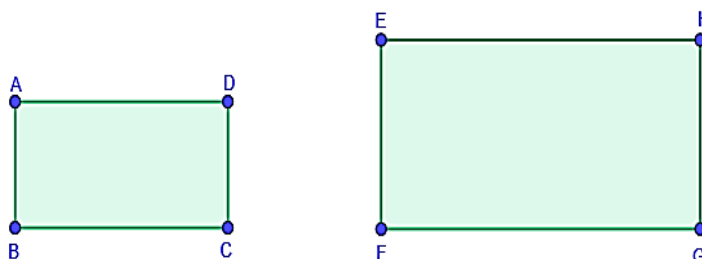
Definição: Duas figuras geométricas são semelhantes se, e somente se, a razão entre os segmentos homólogos¹ for constante, isto é, se houver proporção entre eles, e se os ângulos homólogos forem congruentes.

Observação: Lados homólogos são aqueles que estão entre ângulos homólogos, assim como ângulos homólogos são aqueles que estão entre lados homólogos.

Observação: o símbolo matemático para expressar semelhança é o ‘til’ ($\sim$).

Exemplos:

1. Os retângulos $ABCD$ e $EFGH$ são semelhantes, isto é, $ABCD \sim EFGH$.



Por consequência da semelhança entre esses dois retângulos, temos que os ângulos homólogos são congruentes.

$$\hat{A} \equiv \hat{E} = 90^\circ$$

$$\hat{B} \equiv \hat{F} = 90^\circ$$

$$\hat{C} \equiv \hat{G} = 90^\circ$$

$$\hat{D} \equiv \hat{H} = 90^\circ$$

¹ Homólogos é sinônimo de correspondentes.

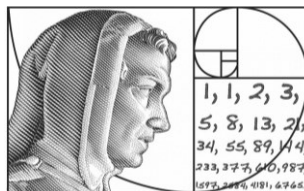
E os lados homólogos são proporcionais.

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{DA}} = k$$

Observação: Quando uma figura é semelhante à outra, podemos dizer que é possível sobrepor uma figura na outra através de algumas transformações, sem desfigurar a figura original. Na próxima aula, estudaremos essas transformações.

ATIVIDADES

1. Qual é a condição para que dois objetos sejam considerados semelhantes na matemática?
2. Indique cinco semelhanças encontradas no cotidiano.



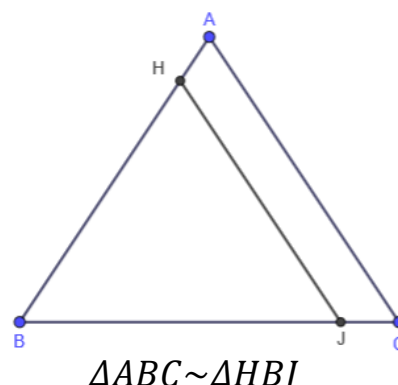
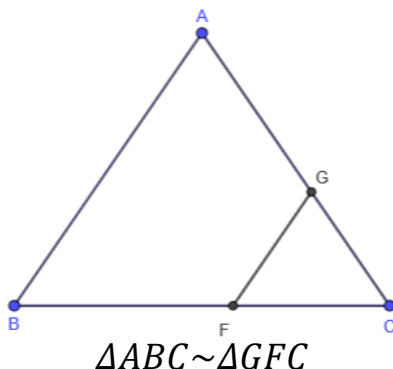
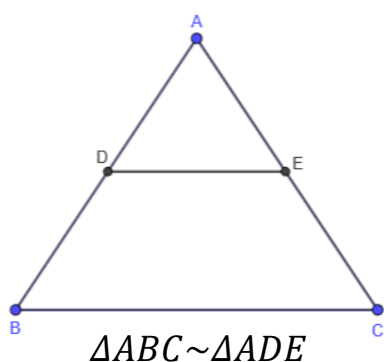
AULA 92

TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

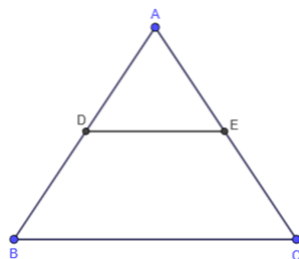


esta aula, estudaremos o teorema fundamental da semelhança de triângulos.

Teorema fundamental da semelhança de triângulos: se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.



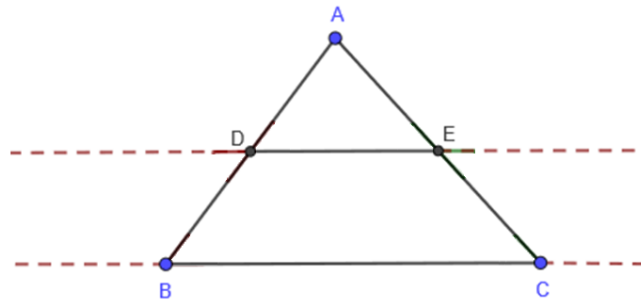
Demonstração: Seja um triângulo ABC e um ponto $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$, tal que o segmento $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, como mostra a figura a seguir:



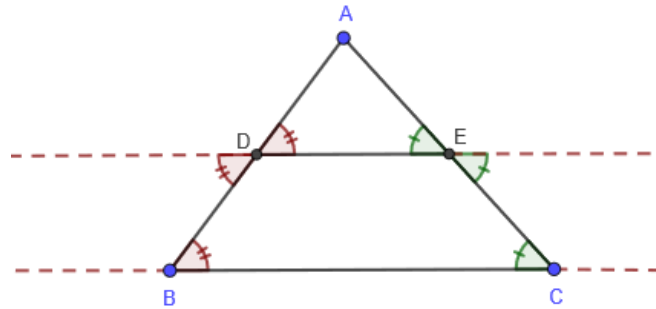
Para mostrarmos que os triângulos $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ devemos mostrar que os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, desta forma vamos dividir essa demonstração em duas partes.

1ª parte: Ângulos correspondentes congruentes.

Traçando uma reta por $\overline{DE}$ e outra por $\overline{BC}$, temos que:

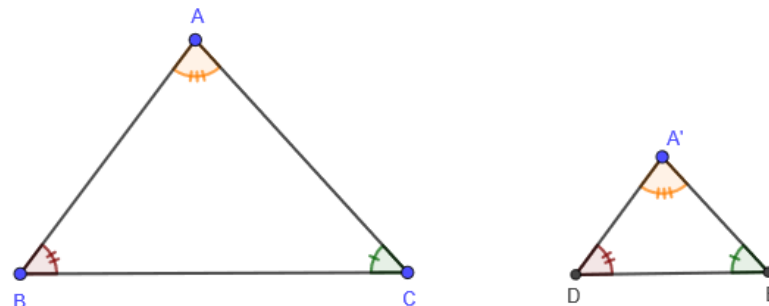


Os ângulos $\widehat{D} \equiv \widehat{B}$ e que $\widehat{E} \equiv \widehat{C}$, pois $\widehat{D}$ e $\widehat{E}$ são O.P.V dos ângulos que são alternos internos à $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.



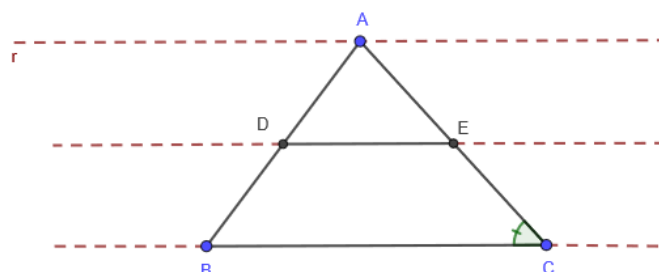
O ângulo $\widehat{A}$ é comum aos dois triângulos.

Portanto, os ângulos correspondentes dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são congruentes.



2ª parte: Lados correspondentes proporcionais.

Traçando uma reta por $\overline{DE}$, outra por $\overline{BC}$ e uma reta r passando por $\widehat{A}$ que é paralela ao segmento $\overline{BC}$, temos que:

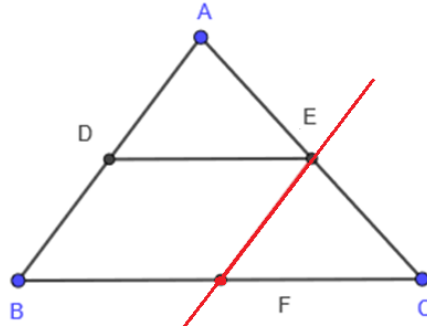


Pelo Teorema de Tales, temos que:

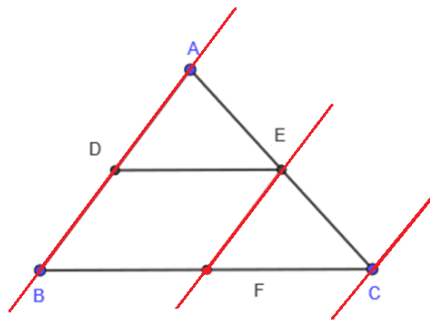
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Desta forma, temos que dois lados correspondentes dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$ são proporcionais.

Agora, falta verificarmos que os lados $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais. Para isso, devemos traçar uma reta por E , tal que $\overleftrightarrow{EF}$ seja paralelo ao lado $\overline{AB}$, com $F \in \overline{BC}$, como mostra a figura a seguir:



Traçando uma reta por C que é paralela ao segmento $\overline{BC}$ e traçando uma reta por $\overline{AB}$, temos que:



Pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$$

Notem que o quadrilátero $BDEF$ é um paralelogramo, desta forma, temos que em um paralelogramo, os lados paralelos são congruentes. Com isso, temos que: $\overline{DE} \equiv \overline{BF}$ e $\overline{DB} \equiv \overline{EF}$

Assim, temos que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

Portanto, os lados correspondentes são proporcionais.

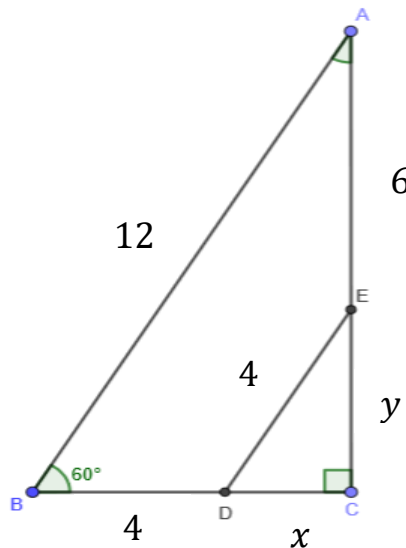
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

Acabamos de demonstrar que os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, desta forma, temos que se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

■ Q.E.D

Exemplos:

1. Sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{AB}$, descubra quanto medem $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Quanto mede o ângulo $\hat{E}$?



Resolução: Pelo teorema fundamental da semelhança nos triângulos, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{ED}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} \\ \frac{12}{4} &= \frac{4+x}{x} = \frac{6+y}{y} \\ 3 &= \frac{4+x}{x} = \frac{6+y}{y} \end{aligned}$$

Calculando $\overline{BC}$, temos que:

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{4+x}{x} \\ 3x &= 4+x \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Calculando $\overline{AC}$, temos que:

$$\frac{6+y}{y}$$

$$3y = 6 + y$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

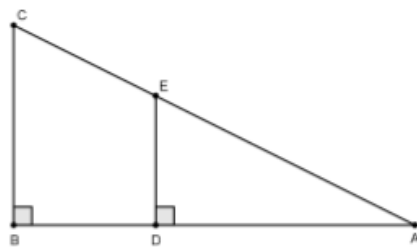
Logo, $\overline{BC} = 6$ e $\overline{AC} = 9$.

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos que o $\hat{A} = 30^\circ$

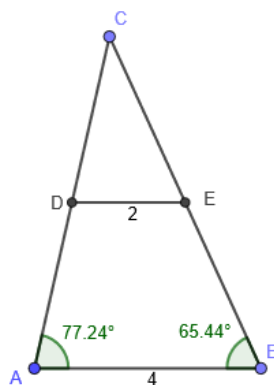
Portanto, como $\hat{A} \equiv \hat{E}$, então $\hat{E} = 30^\circ$.

ATIVIDADES

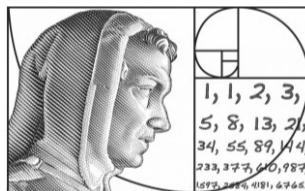
1. Enuncie o teorema fundamental da semelhança de triângulos e demonstre-o.
2. Observe a figura abaixo e responda:



- a) Os triângulos ABC e ADE são semelhantes?
 - b) Se são semelhantes, quais são os lados homólogos?
3. Sabendo que $\overline{DE} // \overline{AB}$, e que $\overline{AC} = 6$, $\overline{CE} = 3,25$, diga:



- a) Quanto mede $\overline{CD}$.
- b) Quanto mede $\hat{C}$.
- c) Quanto mede $\hat{D}$ e $\hat{E}$.
- d) Quanto mede $\overline{CB}$.



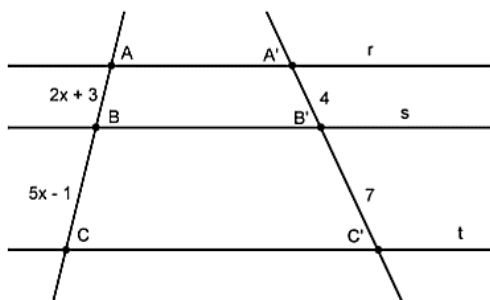
AULA 96

AVALIAÇÃO

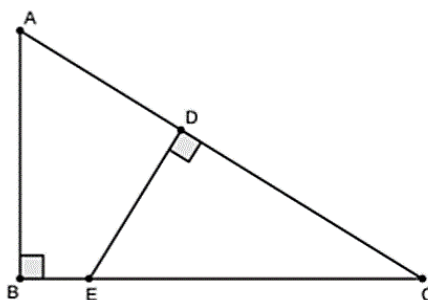
1. Defina:

- a) Feixe de paralelas
- b) Transversal
- c) Segmentos comensuráveis
- d) Segmentos proporcionais

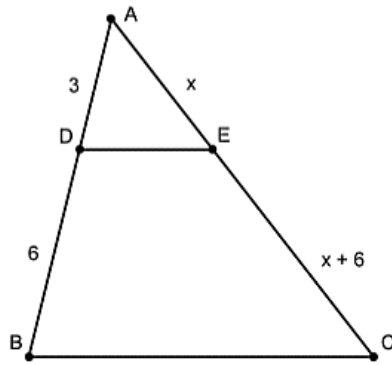
2. Enuncie o Teorema de Tales e determine o valor de x nas figuras abaixo, sabendo que $r \parallel s \parallel t$.



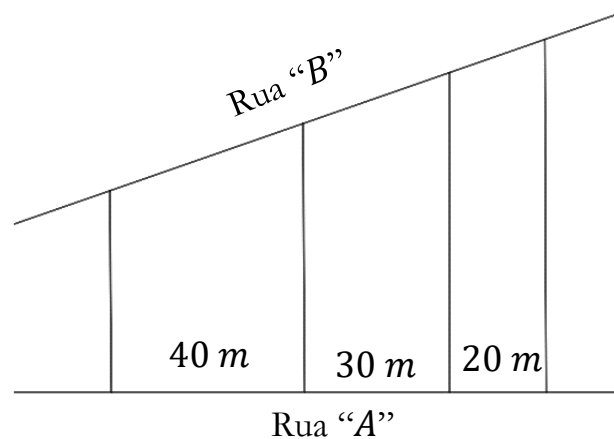
3. Sabendo que $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 20$, $\overline{AD} = 10$ e $\overline{DC} = 15$, determine a medida de $\overline{DE}$ na figura abaixo.



4. Determine o valor de x na figura abaixo, sabendo que $\overline{DE}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC .

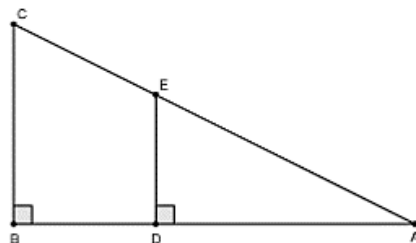


5. Três terrenos têm frente para a rua “A” e para a rua “B”, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua “A”. Qual é a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é de 180 m ?



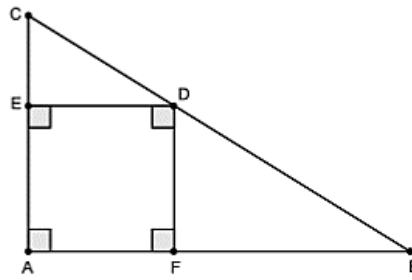
6. Um feixe de quatro paralelas determina, sobre uma transversal, três segmentos consecutivos, que medem 5 cm , 6 cm e 9 cm . Calcule o comprimento dos segmentos determinados pelo feixe em outra transversal, sabendo que o segmento desta, compreendido entre a primeira e a quarta paralela, mede 60 cm .

7. Observe a figura abaixo e responda:

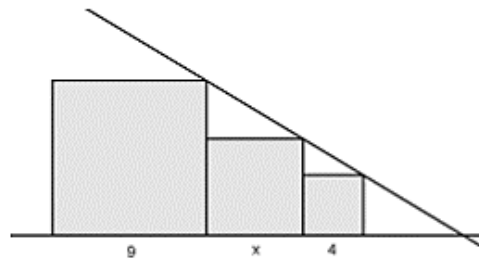


- Os triângulos ABC e ADE são semelhantes?
- Se são semelhantes, quais são os lados homólogos?
- Enuncie o teorema fundamental da semelhança.

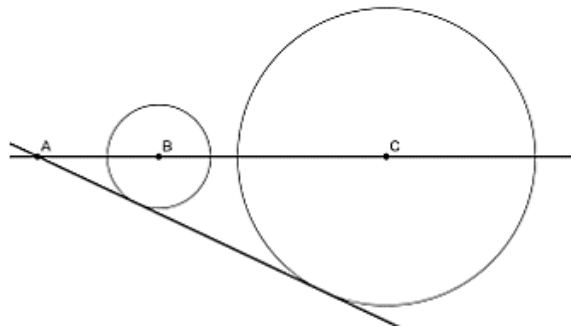
8. Na figura abaixo, temos $\overline{AC} = 4$ e $\overline{AB} = 6$. Determine o perímetro do quadrado $AEDF$.

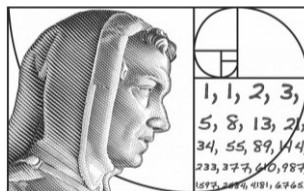


9. Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.



10. Na figura abaixo, tem-se uma reta que passa pelos pontos A , B e C e outra que passa por A e é tangente às circunferências de centros B e C e raios 3 cm e 5 cm . Se $AB = 7\text{ cm}$, determine $\overline{BC}$.

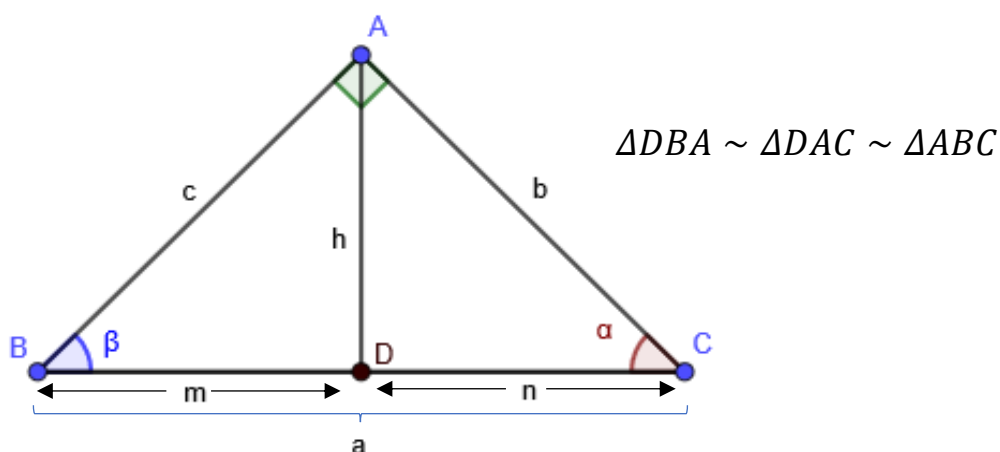




AULA 99

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO - PARTE II

Nesta aula, estudaremos a 2ª relação métrica do triângulo retângulo.

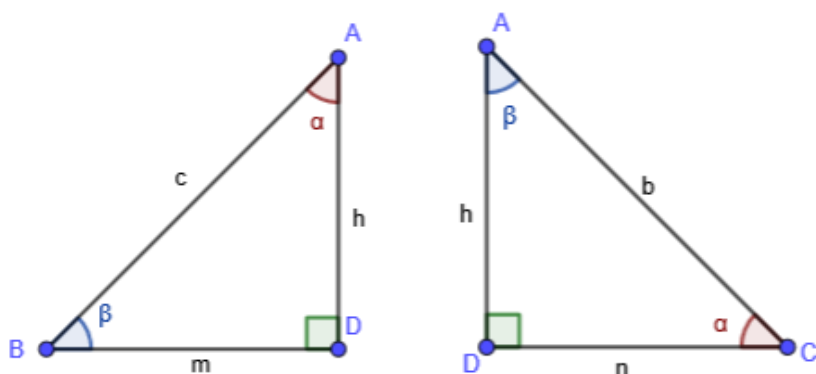


Podemos definir a segunda relação da seguinte forma:

Teorema: Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

$$h^2 = mn$$

Demonstração: Considerando os triângulos DBA e DAC, temos $\triangle DBA \sim \triangle DAC$, pois $\hat{D} \equiv \hat{D} = 90^\circ$ e $\hat{B}\hat{A}\hat{D} \equiv \hat{A}\hat{C}\hat{D} = \alpha$.



Logo, temos a proporção:

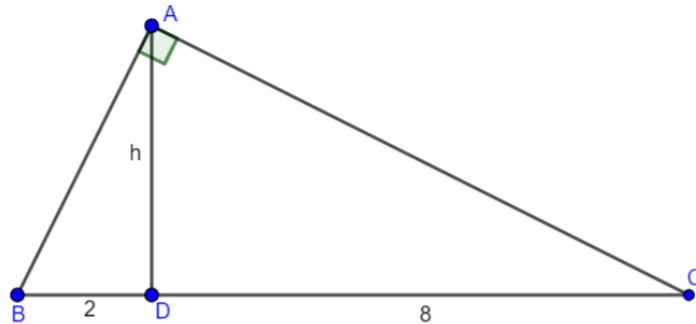
$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

$$h \cdot h = n \cdot m$$

$$h^2 = n \cdot m$$

Exemplos:

1. Calcule a altura do triângulo $\triangle ABC$.



Resolução: Utilizando a 2ª relação, temos que:

$$h^2 = mn$$

$$h^2 = 8 \cdot 2$$

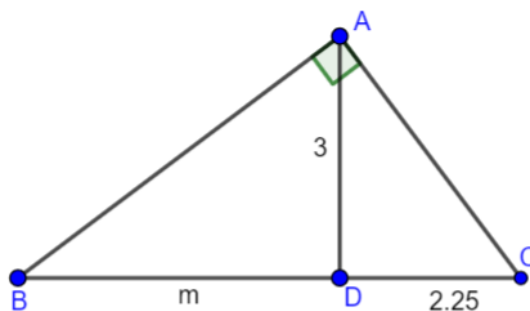
$$h^2 = 16$$

$$h = \pm\sqrt{16}$$

$$h = \pm 4$$

Como a medida da altura de um triângulo não pode ser negativa, então a altura do triângulo $\triangle ABC$ é 4.

2. Calcule o valor de m do triângulo $\triangle ABC$.



Resolução: Utilizando a 2ª relação, temos que:

$$h^2 = mn$$

$$3^2 = 2,25 \cdot m$$

$$9 = 2,25m$$

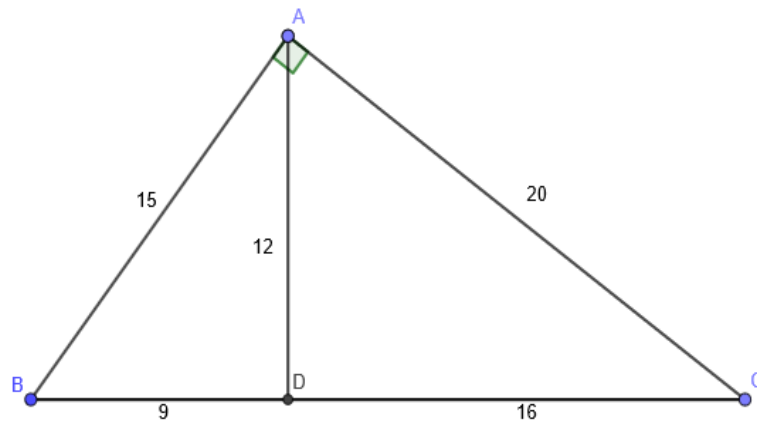
$$m = \frac{9}{2,25}$$

$$m = 4$$

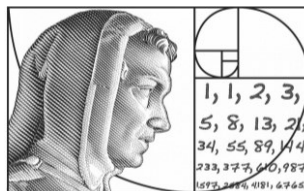
Como a medida da altura de um triângulo não pode ser negativa, então a altura do triângulo $\triangle ABC$ é 4.

ATIVIDADES

1. Faça a demonstração da 2ª relação métrica no triângulo retângulo.
2. Verifique a segunda relação métrica no triângulo retângulo abaixo:



3. Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e sua projeção sobre a hipotenusa mede 5 cm . Nessas condições, determine:
 - a) A medida da hipotenusa.
 - b) A medida do outro cateto.
 - c) A medida da altura relativa à hipotenusa.
4. Em um triângulo retângulo, os catetos medem 7 cm e 24 cm . Nessas condições, determine:
 - a) A medida da hipotenusa.
 - b) A medida da altura relativa à hipotenusa.



AULA 104

TEOREMA DE PITÁGORAS – PARTE III



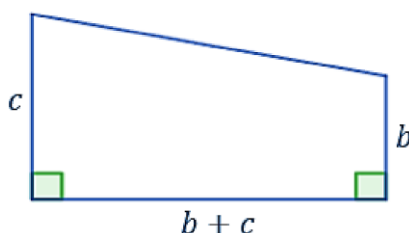
esta aula, daremos continuidade às apresentações do Teorema de Pitágoras estudando a demonstração do presidente dos Estados Unidos James A. Garfield.

Teorema de Pitágoras: em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos

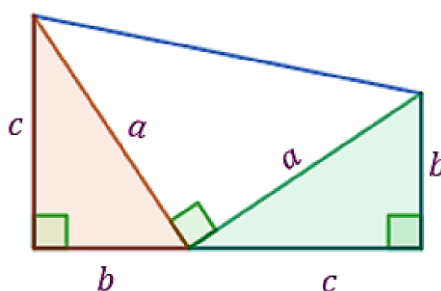
catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração: Considere um trapézio retângulo de bases a e b , e altura $a + b$.



Vamos dividir o trapézio em três triângulos retângulos tal que em dois triângulos retângulos os catetos sejam b e c e a hipotenusa a , como mostra a figura a seguir:



Desta forma, teremos o terceiro triângulo retângulo com os catetos sendo a .

A área do trapézio é equivalente à soma das áreas dos três triângulos retângulos, ou seja,

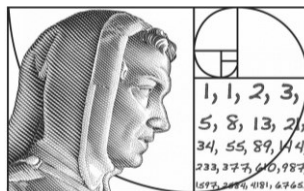
$$\begin{aligned} \text{Área}_{\text{trapézio}} &= \text{Área}_{\text{triângulo laranja}} + \text{Área}_{\text{triângulo verde}} + \text{Área}_{\text{triângulo branco}} \\ \frac{(\text{Base Maior} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2} &= \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} + \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(c+b) \cdot (c+b)}{2} &= \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a \cdot a}{2} \\ \frac{c^2 + 2bc + b^2}{2} &= \frac{bc + bc + a^2}{2} \\ c^2 + 2bc + b^2 &= 2bc + a^2 \\ b^2 + c^2 &= a^2\end{aligned}$$

■ Q.E.D

ATIVIDADES

1. Enuncie o Teorema de Pitágoras e faça em seu caderno a demonstração realizada nesta lição.
2. Um terreno triangular tem frente de 12 m e 16 m em duas ruas que formam um ângulo de 90° . Quanto mede o terceiro lado desse terreno?
3. As medidas dos catetos de um triângulo retângulo medem $(2 + \sqrt{5})\text{ cm}$ e $(-2 + \sqrt{5})\text{ cm}$. Nessas condições, determine a medida da hipotenusa.
4. Em um triângulo retângulo isósceles, cada cateto mede $10\sqrt{2}\text{ cm}$. Qual é a medida da hipotenusa deste triângulo?



AULA 107

A ALTURA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO



esta aula, estudaremos a altura de um triângulo equilátero.

Relembremos as definições envolvendo o triângulo equilátero e sua altura.

Definição: Os triângulos equiláteros são triângulos que possuem todos os seus lados e ângulos congruentes.

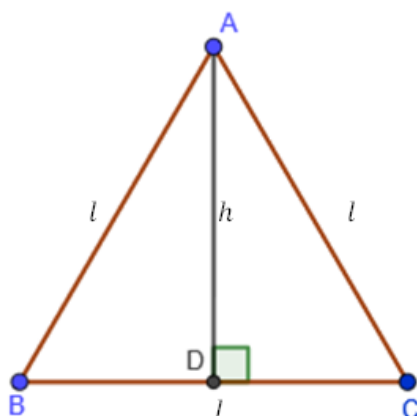
Definição: A altura de um triângulo equilátero é bissetriz do ângulo e mediatriz do lado relativo a ela.

Existe um teorema que diz que a altura de um triângulo equilátero é sempre dada pela metade do produto do lado do triângulo equilátero por $\sqrt{3}$ e para encontrarmos esse resultado devemos utilizar o Teorema de Pitágoras, como veremos a seguir:

Teorema: a medida da altura h do triângulo equilátero de lado l é encontrada pela seguinte fórmula:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Demonstração: Seja um triângulo equilátero $\triangle ABC$ de lado l e altura h relativa ao lado $\overline{BC}$.



A altura h divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos congruentes: ΔABD e o ΔACD . Por consequência de $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$, temos que o ponto D é ponto médio do segmento $\overline{BC}$, isto é, $\overline{BD} = \overline{CD} = \frac{l}{2}$

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo ΔABD , temos que:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2$$

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$L^2 = h^2 + \frac{L^2}{4}$$

$$L^2 - \frac{L^2}{4} = h^2$$

$$\frac{4L^2 - L^2}{4} = h^2$$

$$\frac{3L^2}{4} = h^2$$

$$h^2 = \frac{3L^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3L^2}{4}}$$

$$h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a medida de qualquer altura de um triângulo equilátero pode ser encontrada pela metade do produto entre a medida de seu lado e a raiz de três.

■ Q.E.D

Observação: Todas as alturas de um triângulo equilátero são congruentes.

Exemplos:

1. Calcule a altura de um triângulo equilátero sabendo que seu perímetro é 36 cm .

Resolução: Se o perímetro de um triângulo equilátero é 36 cm então o seu lado mede 12 cm .

Aplicando a fórmula da altura no triângulo equilátero, temos que:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

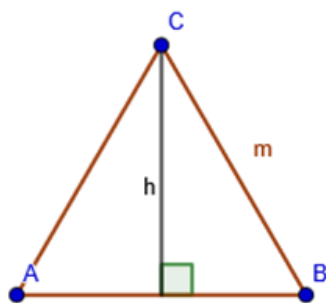
Portanto, a altura deste triângulo é $6\sqrt{3}$ cm.

Observação: Note que a raiz de três é irracional, ou seja, ela não é uma raiz exata. Logo, quando o problema não der uma aproximação de seu valor, deixamos a raiz de três indicada.

ATIVIDADES

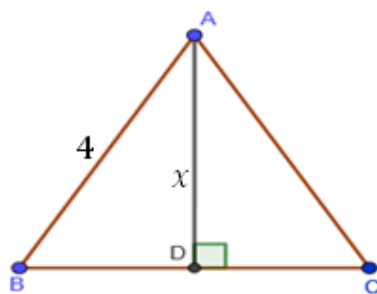
1. Demonstre, com suas palavras, o teorema da altura do triângulo equilátero.
2. Determine a medida h da altura de um triângulo equilátero de lado 20 cm .
3. A altura de um triângulo equilátero é 9 cm . Determine a medida l do lado deste triângulo.
4. O lado de um triângulo equilátero mede 12 cm . Determine a medida h da altura desse triângulo:
 - a) usando a fórmula;
 - b) sem usar a fórmula.
5. Calcule a altura de um triângulo equilátero sabendo que seu perímetro é 36 cm .
6. Em um triângulo equilátero a altura mede $3\sqrt{3}\text{cm}$. Nessas condições, qual é o perímetro deste triângulo equilátero?
7. A área de um triângulo pode ser calculada multiplicando-se a medida de um lado pela medida da altura relativa a esse lado e dividindo-se o resultado por 2. Nessas condições e fazendo $\sqrt{3} = 1,73$, determine a área de um triângulo equilátero cujo lado mede 4 cm .
8. A medida do lado de um triângulo equilátero é igual à medida da diagonal de um quadrado de lado 6 cm . Nessas condições, determine a medida da altura do triângulo.

9. Deduza a altura de um triângulo equilátero de lado m .

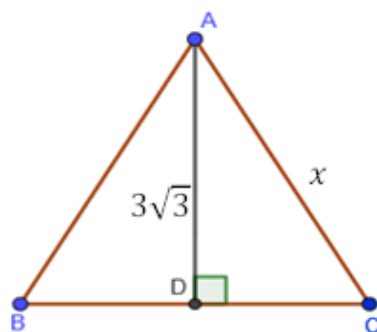


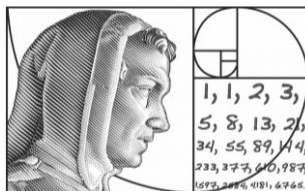
10. Encontre o valor de x nos triângulos abaixo:

a)



b)





AULA 110

RELAÇÃO ENTRE AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta aula, estudaremos as principais relações entre as razões trigonométricas, são elas: relação fundamental da trigonometria e a relação do seno com o cosseno do mesmo ângulo.

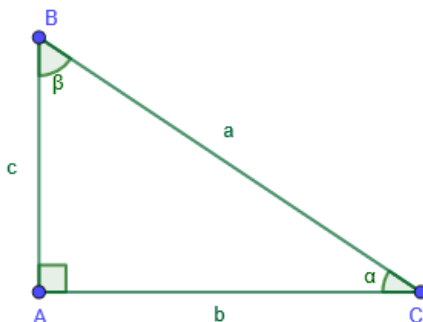
RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Teorema: Para todo x real, $x \in [0, 360^\circ]$, vale a relação:

$$\sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

Essa relação é chamada de Teorema Fundamental da Trigonometria.

Demonstração: Seja um triângulo retângulo em $\hat{A}$, como mostra a figura a seguir:



Utilizando o conceito das razões trigonométricas de um triângulo retângulo, temos que:

$$\sen \alpha = \frac{co}{hip}$$

$$\sen \alpha = \frac{c}{a}$$

$$c = a \cdot \sen \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{ca}{hip}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

$$b = a \cdot \cos \alpha$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (a \cdot \cos \alpha)^2 + (a \cdot \sin \alpha)^2$$

$$a^2 = a^2 \cdot \cos^2 \alpha + a^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$a^2 = a^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$\frac{a^2}{a^2} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

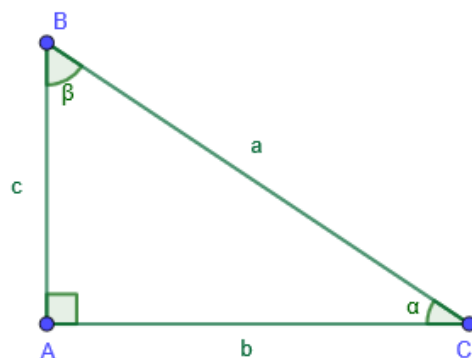
■ Q.E.D

RELAÇÃO DO SENO COM O COSSENO DO MESMO ÂNGULO

Teorema: Para todo x real, $x \in [0, 360^\circ]$ e $x \notin [90^\circ, 270^\circ]$ vale a relação:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Demonstração: Seja um triângulo retângulo em $\hat{A}$ como mostra a figura a seguir:



Utilizando o conceito das razões trigonométricas de um triângulo retângulo, temos que:

$$\sin \alpha = \frac{\text{co}}{\text{hip}}$$

$$\sin \alpha = \frac{c}{a}$$

$$c = a \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{ca}{hip}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

$$b = a \cdot \cos \alpha$$

Aplicando a razão trigonométrica da tangente de α , temos que:

$$tg \alpha = \frac{co}{ca}$$

$$tg \alpha = \frac{c}{b}$$

$$tg \alpha = \frac{a \cdot \sin \alpha}{a \cdot \cos \alpha}$$

$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Portanto, a tangente de um ângulo também pode ser encontrada pelo quociente entre as razões seno e cosseno.

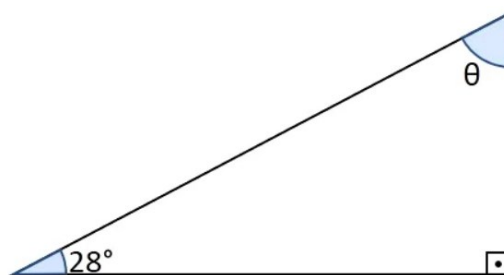
■ Q.E.D

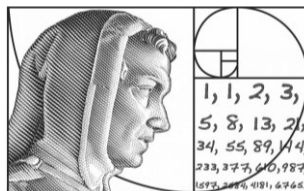
Observação: A $tg 90^\circ$ não pode ser calculada, pois, $\cos 90^\circ = 0$ e, com isso, temos que o denominador da $tg 90^\circ$ é zero, e como o denominador não pode ser zero, não podemos calcular a $tg 90^\circ$. Idem a $tg 270^\circ$.

ATIVIDADES

1. Enuncie e demonstre a relação Fundamental da Trigonometria.
2. Enuncie e demonstre a relação entre $\sin x$ e $\cos x$.
3. Simplifique a expressão $\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x$.
4. Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, e formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1000 metros, qual será a altura atingida pelo avião, em metros?
5. No triângulo retângulo a seguir, determine o valor do ângulo θ , em graus, e seu seno, cosseno e tangente.

(Use: $\sin 28^\circ = 0,47$ e $\cos 28^\circ = 0,88$.)





AULA 115

EVENTO



esta aula, estudaremos a 3ª relação métrica do triângulo retângulo.

Estudando os experimentos, descobrimos que existem dois tipos: determinístico e aleatório. No determinístico conseguimos prever o resultado que dará, enquanto no aleatório não conseguimos prever o resultado.

Nós não conseguimos prever o resultado com certeza no experimento aleatório, porém, conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer no experimento, e isto é chamado de espaço amostral.

No espaço amostral estão todos os possíveis resultados para aquele experimento, porém, não conseguimos prever qual elemento ou quais elementos resultarão. O que podemos fazer é dividir o espaço amostral em eventos.

Mas o que seria um evento?

A palavra evento tem origem no termo em latim *EVENTUS*, que significa acontecimento, ocorrência, acidente, acaso.

Na Matemática encontramos a palavra evento inserida no conteúdo de Probabilidade. Vejamos a definição:

Definição: Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω).

Os eventos são sempre indicados por uma letra maiúscula do alfabeto ($A, B, C, \dots, X, Y, Z$). Dizemos que um evento **A** ocorre se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a **A**.

Exemplos

1. Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Eis alguns eventos:

A: ocorrência de número par.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

B: ocorrência de número ímpar.

$$B = \{1, 3, 5\}$$

C: ocorrência de número primo.

$$C = \{2, 3, 5\}$$

D: ocorrência de número menor que 4.

$$D = \{1, 2, 3\}$$

E: ocorrência de número maior que 4.

$$E = \{5, 6\}$$

F: ocorrência de número menor que 8.

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

G: ocorrência de número maior ou igual a 10.

$$G = \emptyset$$

2. Uma moeda é lançada 2 vezes, e observa-se a sequência de caras e coroas.

$$\Omega = \{(K, K); (K, C); (C, K); (C, C)\}$$

Eis alguns eventos:

A: ocorrência de cara no 1º lançamento.

$$A = \{(K, K); (K, C)\}$$

B: ocorrência de coroa no 2º lançamento.

$$B = \{(K, C); (C, C)\}$$

C: ocorrência de exatamente uma coroa.

$$C = \{(K, C); (C, K)\}$$

D: ocorrência de, no máximo, duas caras.

$$D = \{(K, K); (K, C); (C, K)\}$$

E: ocorrência de pelo menos duas coroas.

$$E = \{(C, C)\}$$

Observação: os eventos que possuem um **único elemento** ($\#A = 1$) serão chamados **eventos elementares**.

Observação 2: notemos que, se $\#\Omega = n$, então Ω terá 2^n subconjuntos e, portanto, 2^n eventos. Entre os eventos, salientamos o $\emptyset$ (chamado **evento impossível**) e o próprio Ω (chamado evento certo).

ATIVIDADES

1. Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma bolinha é escolhida e é observado seu número. Seja $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$. Descreva os eventos:

- a) O número obtido é par.
- b) O número obtido é ímpar.
- c) O número obtido é primo.
- d) O número obtido é maior que 16.
- e) O número é múltiplo de 2 e de 5.
- f) O número é múltiplo de 3 ou de 8.
- g) O número não é múltiplo de 6.

2. Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados. Seja Ω o conjunto dos pares (a, b) , em que a representa o número do dado verde e b o do dado vermelho. Descreva os eventos:

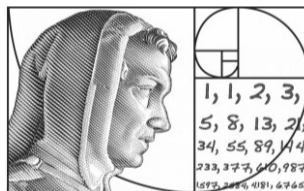
- a) **A**: ocorre 3 no dado verde.
- b) **B**: ocorrem números iguais nos dois dados.
- c) **C**: ocorre o número 2 em ao menos um dado.
- d) **D**: ocorrem números cuja soma é 7.
- e) **E**: ocorrem números cuja soma é menor que 7.

3. Uma moeda e um dado são lançados. Seja:

$$\Omega = \{(K, 1); (K, 2); (K, 3); (K, 4); (K, 5); (K, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}$$

Descreva os eventos:

- a) **A**: ocorre cara.
- b) **B**: ocorre número par.
- c) **C**: ocorre o número 3.



AULA 118

PROBABILIDADE CONDICIONAL



esta aula, estudaremos a probabilidade condicional.

A probabilidade condicional é um conceito matemático que mede a probabilidade de um evento ocorrer com base em outro evento que já aconteceu.

Na matemática definimos a probabilidade condicional da seguinte forma:

Definição: Sejam dados dois eventos quaisquer A e B . Dizemos que é probabilidade condicional a probabilidade do evento A acontecer uma vez que o evento B já aconteceu e representado com a notação $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Onde:

$P(A|B)$: a probabilidade condicional de ocorrer o evento A dado que o evento B já ocorreu.

$P(A \cap B)$: a probabilidade ambos os eventos A e B ocorrerem ao mesmo tempo.

$P(B)$: a probabilidade do evento B ocorrer.

Exemplos

1. Seja um baralho com 52 cartas, e queremos calcular a probabilidade de uma carta extraída ser um Ás, dado que sabemos que a carta é vermelha (ou seja, ouros ou copas).

Resolução: Vamos chamar de evento B a possibilidade de tirar uma carta vermelha. Então, temos que:

$$P(B) = \frac{26}{52}$$

Pois, metade das cartas são vermelhas.

Vamos chamar de evento A a probabilidade de tirar um Ás. Então, dessa forma, temos que:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52}$$

Pois, há dois Ases vermelhos.

Aplicando a fórmula da probabilidade condicional, temos que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{26}{52}} = \frac{2}{52} \cdot \frac{52}{26} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

Portanto, a probabilidade condicional de tirar um Ás, dado que a carta é vermelha, é $\frac{1}{13}$.

2. Um dado foi lançado. Sabendo que saiu um número par, qual é a probabilidade de esse número ser o 4?

Resolução: Vamos chamar de evento B a possibilidade de tirar um número par no dado. Então, temos que:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Pois, metade dos números no dado são pares (2, 4, 6).

Vamos chamar de evento A a probabilidade de tirar o número quatro no dado. Então, dessa forma, temos que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Pois, há um número 4 par.

Aplicando a fórmula da probabilidade condicional, temos que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a probabilidade condicional de tirar um 4 no dado, sabendo que o número que saiu é par, é $\frac{1}{3}$.

ATIVIDADES

1. Se tiramos uma carta aleatoriamente de um baralho de 52 cartas e sabemos que ela é uma figura (Rei, Dama, Valete), qual a probabilidade de ser uma Dama?

2. De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de Matemática, Física e Química, sabe-se que:

I. 30 destinam-se à Matemática e, destes, 20 são do sexo masculino.

II. O total de alunos do sexo masculino é 50, dos quais 10 destinam-se à Química.

III. Existem 10 moças que se destinam ao curso de Química.

Nessas condições, sorteando um aluno ao acaso do grupo total e sabendo que é do sexo feminino, qual é a probabilidade de que ele se destine ao curso de Matemática?

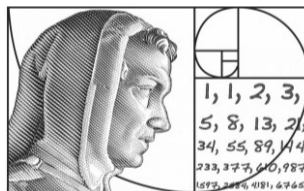
3. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída e observa-se que seu número está entre 4 e 10 (4 e 10 inclusive). Qual a probabilidade de que o número da carta seja 6?

4. Um grupo de 50 moças é classificado de acordo com a cor dos cabelos e dos olhos de cada moça, segundo a tabela:

cabelos	olhos	
	azuis	castanhos
loira	17	9
morena	4	14
ruiva	3	3

Agora, responda:

- Qual a probabilidade de escolher uma moça loira?
- Qual a probabilidade de escolher uma moça morena de olhos azuis?
- Qual a probabilidade de escolher uma moça morena ou de ter olhos azuis?
- Está chovendo quando você encontra a garota. Seus cabelos estão completamente cobertos, mas você percebe que ela tem olhos castanhos. Qual a probabilidade de que ela seja morena?



AULA 123

MEDIANA



esta aula, estudaremos a medida de tendência central mediana.

Definição: A mediana é o valor que ocupa a parte central de uma amostra, quando os dados são colocados em ordem crescente.

Para calcular a mediana, é preciso seguir os seguintes passos:

1º Passo: Ordenar os dados em ordem crescente.

2º Passo: Se o número de dados for ímpar, a mediana é o dado que está no centro da lista.

3º Passo: Se o número de dados for par, a mediana é a média dos dois dados que estão no centro da lista.

Exemplos

1. Seja dada a amostra 2, 7, 11, 8, 2. Encontre a mediana.

Resolução: Primeiramente, iremos colocar a amostra em ordem crescente.

2, 2, 7, 8, 11

Notem que o número de dados é ímpar, dessa forma, a mediana é o dado que está no centro da lista.

2, 2, **7**, 8, 11

Portanto, $Me = 7$.

2. Seja dada a amostra 12, 27, 31, 51, 32 e 45. Encontre a mediana.

Resolução: Primeiramente, iremos colocar a amostra em ordem crescente.

12, 27, 31, 32, 45, 51

Notem que o número de dados é par, dessa forma, a mediana é a média dos dois dados que estão no centro da lista.

12, 27, **31**, **32**, 45, 51

$$Média_{aritmética} = \frac{31 + 32}{2} = \frac{63}{2} = 31,5$$

Portanto, $Me = 31,5$.

ATIVIDADES

1. Em uma turma de Sétimo Ano, as notas obtidas pelos alunos na prova de Matemática foram: 13, 34, 45, 26, 19, 27, 48, 63, 81, 76, 52, 86, 92, 98. Determine:

- a) a moda;
- b) a média;
- c) a mediana.

2. Uma microempresa tem 10 funcionários que trabalham em 3 funções diferentes. O salário mensal deles é mostrado no quadro a seguir:

Salário mensal	Frequência
R\$ 11 500,00	2
R\$ 2 000,00	2
R\$ 1 500,00	6

- a) Calcule a média aritmética dos salários.
- b) Obtenha a mediana dos salários desta microempresa.
- c) Obtenha a moda dos salários desta microempresa.
- d) Que valor retrata melhor a realidade dos salários desta microempresa: a média aritmética, a moda ou a mediana dos salários mensais?

3. Observe a tabela a seguir, que mostra o número de anos de escolaridade, a partir do 1º Ano do Ensino Fundamental, de um grupo de 40 funcionários de uma empresa:

Quantidade de funcionários por anos de escolaridade	
Anos de escolaridade	Frequência
9	5
13	7
15	12
16	16

- a) Qual é a moda do número de anos de escolaridade nesta empresa?
- b) E a média aritmética?
- c) E a mediana?

4. Observe as notas, cujo valor máximo era 10, obtidas em uma avaliação realizada em cinco municípios sobre a qualidade de vida da população:

2,0 3,0 3,0 9,0 9,0

a) Calcule a média, a moda e a mediana correspondentes aos dados apresentados.

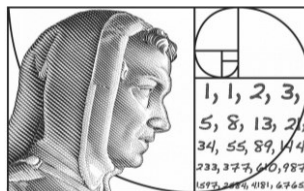
b) Suponha que tenha sido divulgado na imprensa que o município cuja nota foi 3,0 foi bem avaliado, pois ficou exatamente “no meio” entre a mais alta e a mais baixa das notas atribuídas aos municípios pesquisados. Essa notícia foi bem-intencionada?

5. Considere o conjunto de valores abaixo.

$$3 - 5 - 5 - 5 - 7 - 8$$

a) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana deste conjunto de valores.

b) Acrescente o número 16 ao conjunto de valores e calcule novamente a média aritmética, a moda e a mediana. Qual das medidas sofreu maior alteração?



AULA 128

AVALIAÇÃO

1. Maria precisa escolher um conjunto vestido-sapato para sua formatura. Se ela dispõe de 4 pares de sapatos e de 6 vestidos para escolher, de quantos modos pode formar o conjunto? Encontre o resultado pelo Princípio Fundamental da Contagem e construa a árvore de possibilidades.

2. De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de Matemática, Física e Química, sabe-se que:

I. 30 destinam-se à Matemática e, destes, 20 são do sexo masculino.

II. O total de alunos do sexo masculino é 50, dos quais 10 destinam-se à Química.

III. Existem 10 moças que se destinam ao curso de Química.

Nessas condições, sorteando um aluno ao acaso do grupo total e sabendo que é do sexo feminino, qual é a probabilidade de que ele se destine ao curso de Matemática?

3. Foi feita uma pesquisa sobre o número de pessoas que moram na mesma habitação em uma pequena vila.

Quantidade de moradores por domicílio	
Quantidade de moradores	Frequência absoluta
1	16 casas, 16 moradores
2	16 casas, 32 moradores.
3	20 casas, 60 moradores
4	8 casas, 32 moradores
Mais de 4	5 casas, 20 moradores

a) Qual é o total de moradores da vila?

b) Quantos moradores vivem sozinhos?

c) Qual é a porcentagem dos domicílios com apenas 2 moradores?

d) Qual é a frequência relativa (em %) de cada classe de domicílios?

4. Uma equipe de basquete é formada por 12 jogadores. Três desses jogadores têm 20 anos, dois jogadores têm 26 anos, quatro jogadores têm 23 anos, e os demais têm 21 anos, 25 anos e 27 anos. Qual é a idade média aproximada dessa equipe?

5. Calcule a média geométrica de 5 e 20.

6. Uma empresa no primeiro semestre de 2016.

Mês	Faturamento (R\$)
jan	4.000
fev	12.000
mar	8.500
abr	7.500
maio	10.000
jun	12.000

Determine:

a) a média mensal de faturamento;

b) o faturamento total do segundo semestre para que o faturamento médio mensal no ano de 2016 seja R\$ 10 000,00.

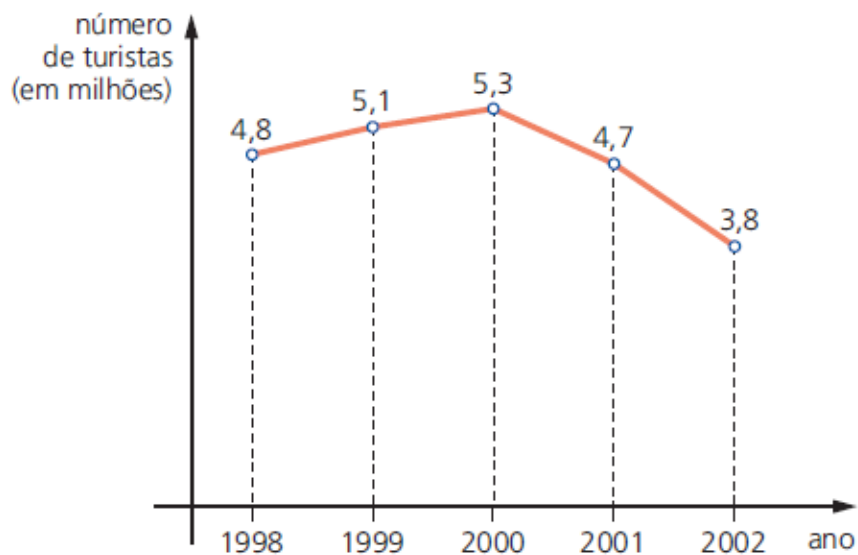
7. Considere o conjunto de valores abaixo.

$$3 - 5 - 5 - 5 - 7 - 8$$

a) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana deste conjunto de valores.

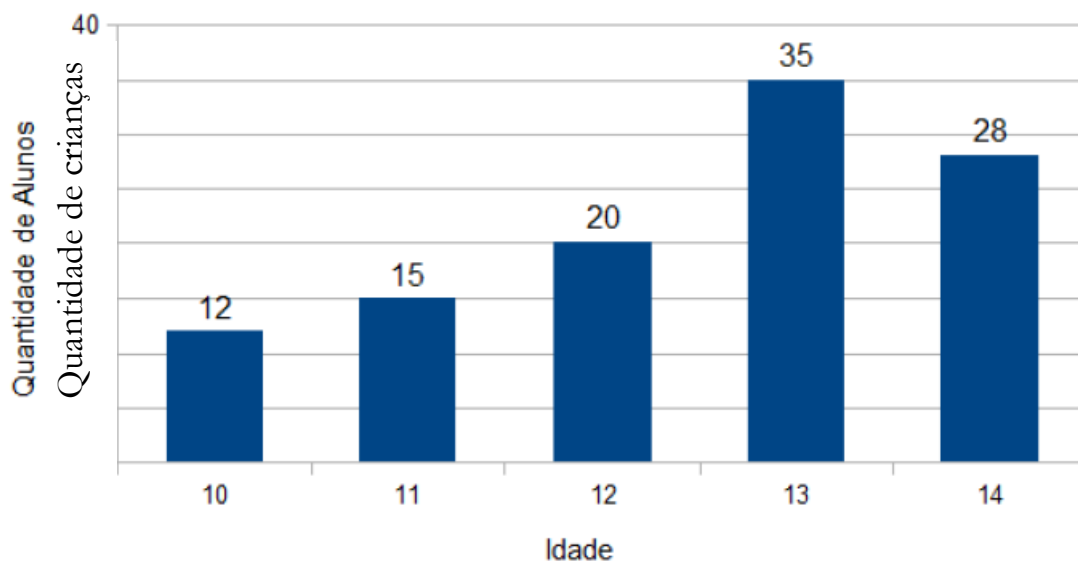
b) Acrescente o número 16 ao conjunto de valores e calcule novamente a média aritmética, a moda e a mediana. Qual das medidas sofreu maior alteração?

8. O gráfico abaixo mostra os números relativos aos turistas estrangeiros que estiveram no Brasil no período de 1998 a 2002. Qual é o desvio padrão dos dados apresentados?



Veja, 16/4/2003.

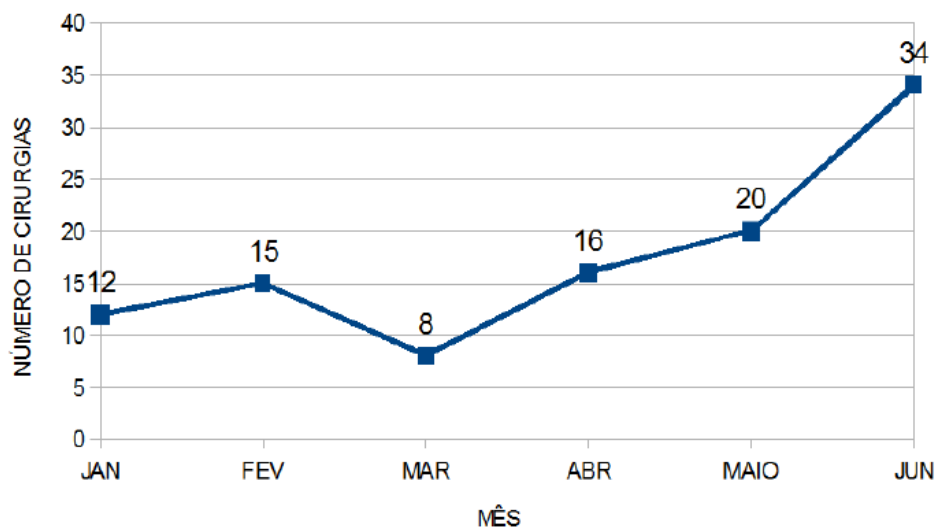
9. Um grupo de famílias *homeschoolers* fez um levantamento das idades das crianças de seu grupo. O gráfico abaixo mostra os dados que foram levantados.



Determine:

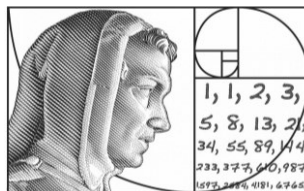
- a) a idade mediana;
- b) a idade média;
- c) a moda.

10. O gráfico a seguir mostra o número de cirurgias realizadas por um médico no primeiro semestre de 2022.



Determine:

- a média mensal de cirurgias;
- o aumento percentual do número de cirurgias em maio em relação ao mês anterior.



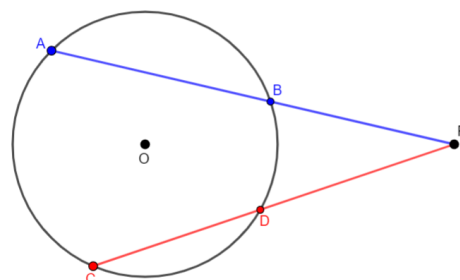
AULA 131

RELAÇÃO ENTRE SEGMENTOS SECANTES



esta aula, estudaremos a relação entre segmentos secantes.

Seja então uma circunferência de centro O com duas secantes traçadas de um mesmo ponto exterior P .



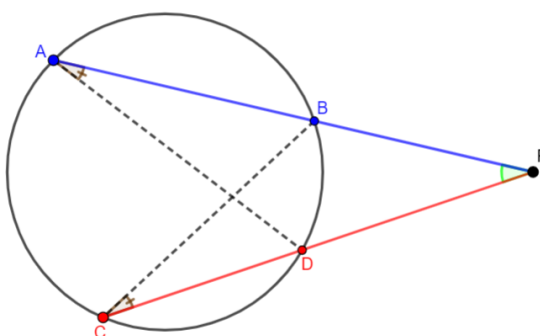
O $\overline{PA}$ é um segmento de reta secante e $\overline{PB}$ é a parte externa desse segmento, enquanto o $\overline{PC}$ é um segmento de reta secante e $\overline{PD}$ é parte externa deste segmento.

Entre estes quatro segmentos que acabamos de destacar, podemos escrever uma relação métrica como veremos a seguir.

Considerando os triângulos $\triangle PAD$ e $\triangle PCB$, temos:

$\hat{P}$ é o ângulo comum

$\hat{A} \equiv \hat{C}$ (são ângulos inscritos no mesmo arco)



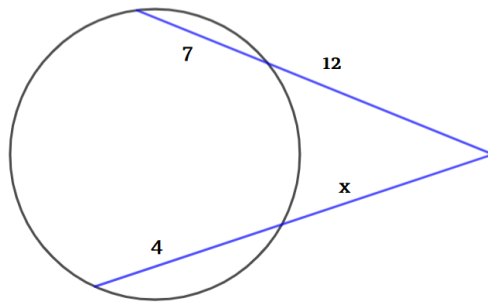
Pela definição de semelhança, temos que $\triangle PAD \sim \triangle PCB$.

Como consequência, temos que:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \quad \text{ou} \quad \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Exemplo:

1. Na circunferência abaixo, determine a medida x do segmento.



Resolução: Pela relação das secantes, temos que:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

$$7 \cdot 12 = 4 \cdot x$$

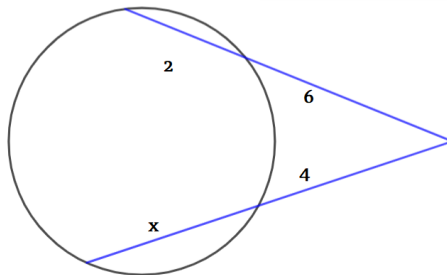
$$84 = 4x$$

$$x = \frac{84}{4} = 21$$

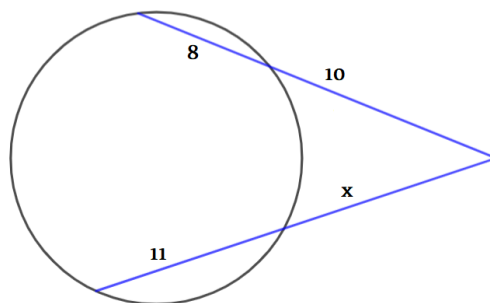
Portanto, a medida x do segmento equivale a 14 cm .

ATIVIDADES

1. Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.

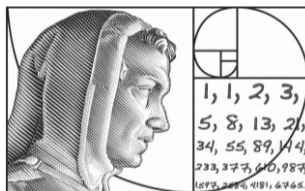


2. Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



3. Por um ponto P , distante 18 cm do centro de uma circunferência, traça-se uma secante que determina na circunferência uma corda $\overline{AB}$, que mede 8 cm . Se o comprimento do raio da circunferência é 12 cm , determine:

- o comprimento do segmento de secante traçada do ponto P ;
- o comprimento do segmento externo desta secante.



AULA 135

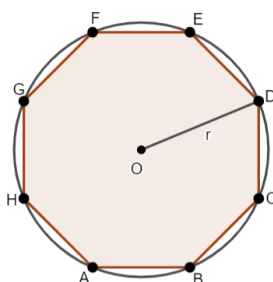
ELEMENTOS DE UM POLÍGONO REGULAR INSCRITO

Nesta aula, estudaremos os elementos de um polígono regular inscrito.

Estes elementos são: raio do polígono regular, ângulo central, ângulo interno e apótema.

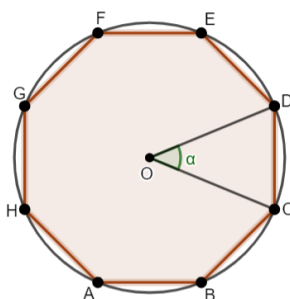
RAIO

Na figura abaixo, o raio de comprimento r da circunferência onde está inscrito o polígono regular, é também chamado **raio do polígono regular**.



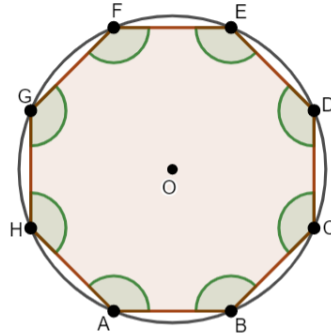
ÂNGULO CENTRAL

O ângulo α , cujo vértice está no centro da circunferência e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono, chama-se **ângulo central**. Sua medida é dada por $\frac{360^\circ}{n}$, sendo n o número de lados do polígono.



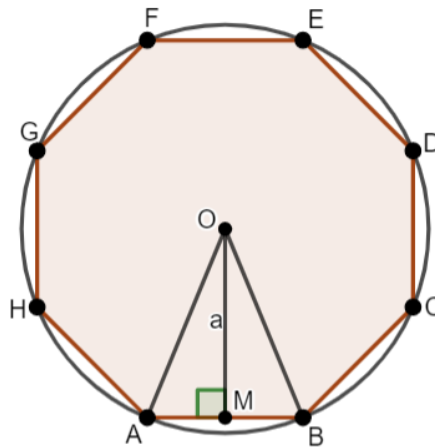
ÂNGULOS INTERNOS

Os ângulos cujos lados são dois lados consecutivos do polígono são chamados **ângulos internos**. Todos os ângulos internos são congruentes, e se o polígono tem n lados, a medida de cada um é dada por $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.



APÓTEMA

O segmento do centro até o ponto médio M de um lado do polígono regular chama-se **apótema do polígono**. Sua medida é, normalmente, representada por a . Como o triângulo $\triangle AOB$ é isósceles, o apótema $\overline{OM}$ representa a altura e a mediana relativas ao lado $\overline{AB}$.



Exemplo:

1. Determine a medida do ângulo central e a medida do ângulo interno de um hexágono regular inscrito.

Resolução: Vamos indicar por a_c a medida do ângulo central e, então, temos que:

$$a_c = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

Vamos indicar por a_i a medida do ângulo interno e, então, temos que:

$$a_i = \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = \frac{4 \cdot 180^\circ}{6} = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$$

PROPRIEDADES

Quando estudamos semelhança, vimos que dois polígonos regulares que têm o mesmo número de lados são semelhantes.

Com o conceito de semelhança, temos três propriedades que envolvem os elementos de um polígono regular inscrito. Vejamos tais propriedades:

1ª Propriedade: Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais aos comprimentos dos respectivos raios.

2ª Propriedade: Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais às medidas dos respectivos lados.

3ª Propriedade: Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais às medidas dos respectivos apótemas.

Exemplo:

1. Dois hexágonos regulares estão inscritos em circunferências de raios 15 cm e 36 cm . Se o perímetro do hexágono inscrito na menor delas é 90 cm , determine o perímetro do outro hexágono.

Resolução: Vamos indicar o perímetro desconhecido por x e, aplicando a 1ª propriedade, temos que:

$$\frac{15}{36} = \frac{90}{x}$$
$$x = \frac{3240}{15} = 216$$

Portanto, o perímetro do outro hexágono é 216 cm .

ATIVIDADES

1. Determine a medida do ângulo central e a medida do ângulo interno de cada um dos seguintes polígonos regulares inscritos:

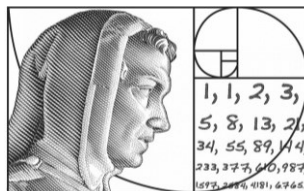
- a) triângulo equilátero;
- b) quadrado;
- c) pentágono regular;
- d) octógono regular.

2. O perímetro de um polígono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede x é 60 cm . Sabe-se que outro polígono regular com o mesmo número de lados está inscrito numa circunferência de raio 25 cm e tem 150 cm de perímetro. Quanto mede o comprimento x de raio da primeira circunferência?

3. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados medem 48 cm e 60 cm , respectivamente. Quanto mede o apótema do segundo, se o apótema do primeiro mede $4\sqrt{3}\text{ cm}$?

4. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados estão entre si como 2 está para 5. Sabendo que a medida do lado do segundo polígono é $20\sqrt{2}\text{ cm}$, calcule a medida do lado do primeiro polígono.

5. Os perímetros de dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são, respectivamente, $28,28\text{ cm}$ e $39,592\text{ cm}$. Quanto medem o raio e o apótema do primeiro se o raio e o apótema do segundo medem, respectivamente, 7 e $3,5\text{ cm}$?

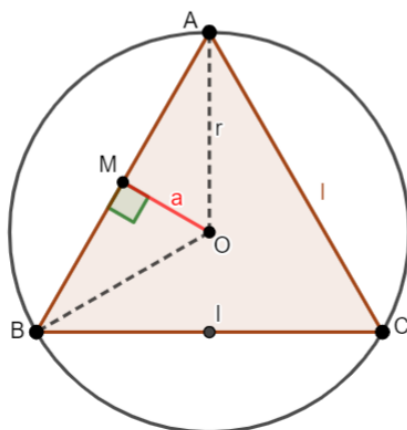


AULA 138

TRIÂNGULO EQUILÁTERO INSCRITO

Nesta aula, estudaremos as relações métricas de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

Seja um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.



Onde,

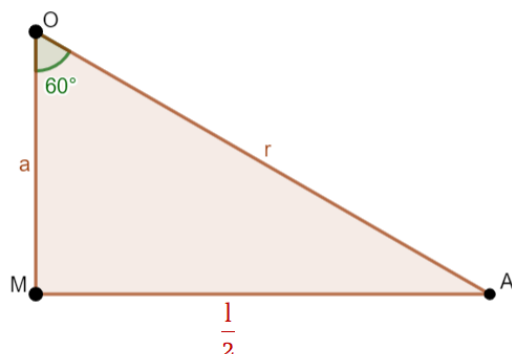
l = medida do lado do triângulo equilátero

a = medida do apótema do triângulo

r = comprimento do raio

medida do ângulo central = $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

Consideremos o triângulo $\triangle OMA$ do triângulo equilátero inscrito e, temos que:



$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{r} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2r} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{l}{r} \Leftrightarrow l = r\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{r} \Leftrightarrow 2a = r \Leftrightarrow a = \frac{r}{2}$$

Logo, o lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência é dado por $r\sqrt{3}$ e o apótema deste triângulo é dado por $\frac{r}{2}$.

Exemplo:

1. Determine a medida do lado e a medida do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio $2\sqrt{3} \text{ cm}$.

Resolução: Calculando a medida do lado, temos que: $l = r\sqrt{3} \Leftrightarrow l = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow l = 6 \text{ cm}$

Calculando a medida do apótema, temos que:

$$a = \frac{r}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{3} \text{ cm}$$

ATIVIDADES

1. Uma circunferência tem 40 cm de raio. Nessas condições, determine a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito nesta circunferência.

2. Determine a medida do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência que tem 15 cm de raio.

3. O apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r mede $6,25 \text{ cm}$. Determine o valor de r .

4. Sabendo que o apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio r mede 15 cm , determine:

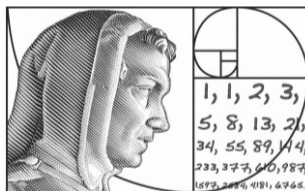
a) o comprimento do raio;

b) a medida do lado do triângulo, fazendo $\sqrt{3} = 1,73$.

5. Num triângulo retângulo, as medidas dos catetos correspondem às medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio 10 cm . Nessas condições, determine a medida da hipotenusa deste triângulo retângulo.

6. Determine a razão entre o lado de um hexágono regular e o lado de um triângulo equilátero inscritos numa circunferência de raio r .

7. O raio de uma circunferência corresponde, em centímetros, à raiz positiva da equação $x^2 - 3x - 40 = 0$. Nessas condições, determine a medida do lado e do apótema do triângulo equilátero inscrito nesta circunferência.



AULA 143

AVALIAÇÃO GERAL - PARTE I

Nesta aula, iniciaremos uma Avaliação Geral contemplando todos os assuntos estudados ao longo dos volumes 1, 2, 3 e 4.

1. Defina os conjuntos numéricos estudados e dê exemplos de números que pertencem a estes conjuntos.

2. Transforme os números abaixo em notação científica:

- a) 1 234 567 000
- b) 0,0000000000009
- c) 0,0000001240
- d) 1 004,58
- e) 4 560 000 000 000 000
- f) 0,8904

3. Simplifique as expressões:

- a) $\sqrt{200} + \sqrt{500} + \sqrt{8} - \sqrt{45}$
- b) $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{75}}{2\sqrt{147}}$
- c) $\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80} - 2\sqrt{45}}{8}$
- d) $\frac{\sqrt{28} + \sqrt{175}}{\sqrt{63}}$
- e) $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{18}}{\sqrt{200}}$

4. Calcule:

- a) $4 + \sqrt{25} - 3$
- b) $3 \cdot \sqrt{16} - \sqrt{100}$
- c) $\sqrt{\frac{4}{25}} + \frac{3}{5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$

e) $\sqrt[4]{81} + \sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-1}$

f) $\sqrt{21 \cdot 4 - 3}$

g) $3^0 - \sqrt[3]{0}$

h) $49^{\frac{1}{2}}$

i) $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$

j) $2\sqrt{12} - 4\sqrt{27} + \sqrt{48}$

k) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$

l) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

5. Calcule usando a regra dos produtos notáveis: $(x + 3)^2$

a) $(x - 3)^2$

b) $(x + 3)(x - 3)$

c) $(x + 3) \cdot (x - 3) - (x + 2) \cdot (x - 2)$

d) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$

6. Fatore as expressões a seguir:

a) $20x^2 + 25x$

b) $ax + ay - bx - by$

c) $4m^3 - 6m^2$

d) $(a + 1)x + (a + 1)y$

e) $12 + 4a + 3b + ab$

f) $100x^2 - 1$

g) $25b^2 - 16$

h) $x^2 - 6x + 9$

i) $x^2 + 12x + 36$.

7. Construa o gráfico das seguintes funções e classifique-as em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva:

a) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x - 4$$

b) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{-1, 2, 5, 8\}$

$$x \rightarrow f(x) = 3x - 4$$

8. Classifique cada função como crescente, decrescente ou constante. Indique também qual é a taxa de variação, e o valor em que a reta intercepta o eixo Y e o eixo X. Depois, trace o gráfico de cada uma.

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = 6$

c) $f(x) = -2x + 1$

d) $f(x) = 6 - 3x$

e) $f(x) = -4 + 2x$

f) $f(x) = 1 - \sqrt{5}$

9. Resolva as equações abaixo:

a) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

b) $x^2 - 8x + 16 = 0$

c) $9y^2 - 24y + 16 = 0$

d) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

e) $t^2 - t - 1 = 0$

f) $-x^2 + 11x - 28 = 0$

g) $4x^2 + 16x + 15 = 0$

h) $8x^2 - 10x + 3 = 0$

i) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = 0$

j) $\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{4}{9} = 0$

10. Sem resolver, dê a soma e o produto das raízes e de cada equação.

a) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

b) $2x^2 + 11x - 2 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

d) $7x^2 - 5x - 3 = 0$

e) $-2x^2 - 11x - 3 = 0$

f) $11x^2 - 7 = 0$

g) $8x^2 + 5x = 0$

h) $x + 1 = 2x^2$

