

INSTITUTO SÃO CARLOS BORROMEU

ENSINO MÉDIO

– 1º ANO –

FÍSICA

VOLUME ÚNICO

Apostila do 1º ano do Ensino Médio, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



FÍSICA



AULA 04

A REDENÇÃO DA INTELIGÊNCIA



sses lampejos de inteligência que foram os dois grandes discípulos de Sócrates, Platão e Aristóteles, conferiram à ciência grega um misterioso prestígio. Dizemos misterioso porque todos sabiam que a Sabedoria tinha visitado os gregos, mas já não havia ninguém capaz de entendê-la novamente. As escolas gregas e romanas conservaram apenas algo da lógica de Aristóteles e algo de uma ética mais platônica que aristotélica. Das ciências da natureza, pouco ou nada foi conservado. E por toda parte ameaçava a tentação do ceticismo.

Para que a razão pudesse se reerguer, precisava recuperar a tutela da verdadeira Fé. E isso foi obra de Jesus Cristo e sua Igreja. Quando a luz da Revelação cristã voltou a brilhar sobre as trevas deste mundo, agora preservada e difundida pelo magistério infalível da Igreja, a inteligência humana se viu purificada e protegida, e se animou como nunca em buscar todo conhecimento:

“Examinai tudo e retende o que é bom” I Ts 5, 19–21

Inicialmente, a atenção se voltou exclusivamente para a ciência de Deus e para a moral cristã, bem como para a defesa da Revelação contra as heresias, considerando a natureza apenas como um degrau para elevar-se a seu Autor. A física grega, à qual havia ocasião de se referir ao comentar o Gênesis, a obra dos seis dias, era vista com desconfiança pelos Santos Padres, pois parecia contradizer em muitos aspectos a Sagrada Escritura. Mas uma vez que o magistério da Igreja definiu os dogmas fundamentais da doutrina cristã, teve-se segurança e liberdade para voltar os olhos para as ciências da natureza. Santo Isidoro de Sevilha († 636) compilou fragmentos de autores pagãos e cristãos sobre as ciências profanas em suas *Etimologias* e *De natura rerum*. Outros seguiram seu exemplo na redação dessas espécies de enciclopédias, como Beda, o Venerável (por volta de 672–735) com outro *De natura rerum*, e Rábano Mauro (776–856) e seu *De universo*.

A ESCOLÁSTICA E AS CIÊNCIAS DA NATUREZA

A Escolástica é o movimento intelectual das escolas cristãs que floresceu principalmente entre os séculos XI e XIII. Sua característica principal é a harmoniosa subordinação da razão à fé, da qual decorrem duas qualidades fundamentais:

- o cultivo do bom método de pensar;
- a subordinação de todas as ciências à Teologia.

Quanto ao primeiro, a Escolástica se destacou pelo apreço à lógica aristotélica; quanto ao segundo, pelo respeito ao magistério da Igreja. Encorajados por essa dupla confiança na rigorosidade da razão e na autoridade da Igreja, os escolásticos tiveram uma curiosidade universal: não houve aspecto da verdade que não quisessem investigar.

E quando, no século XII, a Providência fez chegar às suas mãos as obras de Aristóteles, através dos árabes, entregaram-se ao seu estudo com uma mistura de admiração pelo que diz respeito à razão e desconfiança em relação à fé. Inicialmente contestado pelas autoridades eclesiásticas, porque não faltavam negligentes que sustentavam doutrinas atribuídas a Aristóteles contrárias à fé, graças à autoridade de Santo Alberto Magno e, sobretudo, de Santo Tomás de Aquino, o aristotelismo foi compreendido, depurado e incorporado como uma ferramenta de razão a serviço da teologia e de toda ciência que mereça esse nome.



Santo Tomás de Aquino sob o influxo de uma graça extraordinária reconciliou a fé e a ciência.

Com esse propósito, Santo Tomás – o espírito gêmeo de Aristóteles que a Providência quis dar à Igreja, capaz de compreender a alma da doutrina do grande grego e colocá-la a serviço de Jesus Cristo – comentou literalmente, frase por frase, a maior parte do Corpus aristotélico. Da lógica de Aristóteles, explicou os dois livros mais difíceis: o *Perihermeneias* e os *Segundos Analíticos*.

Como seu interesse era exclusivamente teológico, comentou especialmente a Ética e a Metafísica, bem como parte da Política. E poder-se-ia pensar que Santo Tomás não teria maior interesse nos tratados de filosofia natural, por estarem distantes das questões teológicas, mas estaria muito errado. O Aquinate empreendeu um imenso esforço para explicar detalhadamente todos esses tratados: a Física (cujo comentário completou), Sobre o céu, os Meteorológicos, Sobre a

geração e a corrupção, o tratado Sobre a alma e outros menores, trabalho que foi interrompido por sua morte prematura. Isto não significa que Santo Tomás se preocupava com outras coisas além da Teologia, mas sim que as ciências da natureza estão longe de ser alheias à fé. As realidades naturais são as únicas que se apresentam imediatamente aos sentidos do homem, e o caminho para elevar-se às realidades espirituais passa por elas.

PROGRESSO DE UMA FÍSICA ANTI-ARISTOTÉLICA NÃO CIENTÍFICA

Com Santo Tomás, alcançou-se a mais perfeita harmonia entre a razão e a fé. Ele mostrou com maravilhosa clareza como os livros dos homens – como podemos chamar o Corpus aristotélico, pois são a expressão do correto uso da razão humana – se abriam perfeitamente ao Livro de Deus, a Bíblia, expressão da revelação divina, dando origem à mais sólida e cristã Teologia. É verdadeiramente maravilhoso constatar como os instrumentos racionais aristotélicos permitem penetrar tão profundamente nos mais altos mistérios do cristianismo.

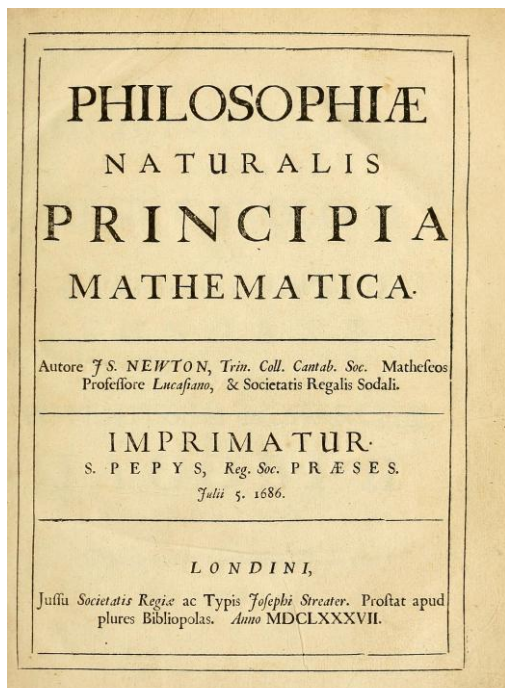
Mas neste mundo de trevas, a verdade não brilha sem sofrer agressão. Naqueles momentos precisos do esplendor da Cristandade, quando a sabedoria católica alcançava sua melhor expressão com a Suma Teológica de Santo Tomás, os esforços foram redobrados para atenuar sua luz, porque – é preciso dizer – os próprios cristãos temem a clareza de Deus.

O seguinte processo ocorreu, que resumimos sem pretender demonstrá-lo: impulsionados pela tibieza, quisemos atenuar a clareza da Revelação, que prega a temida doutrina da Cruz; para nos desculparmos perante Deus, culpamos os homens da Igreja; para não sermos declarados hereges pela hierarquia eclesiástica, culpamos a teologia escolástica; para não nos colocarmos contra o poderoso clero, culpamos Aristóteles; e como não era fácil criticar a Lógica, nem a Ética, nem a Metafísica aristotélica, atacamos a Física. Porque era fácil criticá-la, já que além do método geral e dos princípios insubstituíveis das ciências da natureza, que só se encontram no aristotelismo, Aristóteles propõe muitas opiniões sobre fenômenos particulares que se mostraram discutíveis ou errôneas.

O ataque, então, prosseguiu da seguinte maneira: refutaram-se com grande escândalo as opiniões físicas particulares de Aristóteles; daí sua Física foi desacreditada como inválida; como os princípios físicos realmente servem de base para todo o aristotelismo, ele foi condenado por inteiro; ao pretender que o aristotelismo era inválido, toda a escolástica foi desacreditada, e a Cristandade foi invadida por uma onda de ceticismo quanto à capacidade da razão de explicar a fé; e, com o descrédito da escolástica e da própria razão teológica, o próprio magistério da Igreja foi atacado. O modernismo, atual que tem colocado a Igreja em crise, é consequência deste longo processo.

Contra a Física aristotélica, a única propriamente científica, pois ensina o método para investigar as causas das realidades naturais, surgiu uma Física puramente empírica e descritiva, negada à reflexão propriamente intelectual. A investigação física sempre partiu de uma análise empírica dos fenômenos naturais, tal como se apresentam aos nossos sentidos; e sempre enfatizou a descrição desses processos, com o objetivo de compará-los e compreendê-los. Em muitos casos, a investigação não pode ir além disso, especialmente nos fenômenos aos quais o homem tem pouco acesso, seja por serem infrequentes, seja por serem distantes.

Os antigos cultivaram, por exemplo, a astronomia, que consiste na descrição dos movimentos dos corpos celestes, tentando descobrir suas regularidades quantitativas. O despertar da curiosidade científica que ocorreu com a Escolástica também levou a observar e



Primeira edição de 1687 do livro que revolucionou e estabeleceu as bases da física anticientífica.

descrever, com renovada atenção, tanto os fenômenos celestes quanto os terrestres. Mas, ao utilizar essas novas observações contra a Física de Aristóteles, em vez de investigá-las com os princípios e método aristotélicos, o caminho da ciência foi interrompido.

Tendo renunciado ao bom método científico, no Renascimento surgiram todos os tipos de pseudo-filósofos da natureza: panpsiquistas, astrólogos, alquimistas, teósofos, etc. Mas, diante da falta do bom método, o único método que triunfou na análise da observação empírica, por sua incontestável precisão e maravilhoso sucesso, foi o quantitativo, ou seja, o matemático. Aos poucos, impôs-se a convicção de que o mais que se poderia esperar na investigação da natureza, era descobrir correlações quantitativas entre os diversos aspectos observáveis, reduzindo tudo à dependência de certos parâmetros fundamentais, dos

quais os primeiros seriam o espaço e o tempo.

Quem obteve uma conquista retumbante por este caminho, e acabou por impor esse modelo de Física, foi Isaac Newton, com a publicação de sua obra "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural" (1687). Partindo de três princípios de simples expressão, ele estabeleceu leis quantitativas que não só explicavam com precisão o movimento dos corpos terrestres, mas também – e aqui estava o grandioso – o dos corpos celestes. A Física prometia cumprir o sonho dos primeiros sábios gregos de uma ciência universal.

Com Newton, começa a história da Física moderna, que, embora tenha comprovado que as leis newtonianas não são tão universais como se desejava, continua com a pretensão de uma explicação matemática de toda a realidade.

ATIVIDADES

1. Qual foi o papel desempenhado por Santo Tomás de Aquino na reconciliação entre a razão e a fé na Idade Média, particularmente em relação ao estudo das obras de Aristóteles?
2. Como a física aristotélica e a escolástica se relacionavam com a teologia cristã na Idade Média, e qual foi a abordagem da escolástica em relação ao estudo das ciências naturais?
3. Quais foram as principais mudanças na abordagem da investigação científica que ocorreram durante o Renascimento, e como a obra de Isaac Newton influenciou a Física moderna?





AULA 06

MUDANÇA E MOVIMENTO



homem, ao contemplar todo o cosmo criado por Deus, percebeu tal como a razão humana é capaz de perceber, que há princípios constitutivos do universo. Estes princípios são três: o ser, o movimento e a verdade. Toda a tradição filosófica foi construída sobre estes princípios universais e é sobre eles que as ciências cresceram e se desenvolveram. A Física é a ciência que estuda o ente móvel; portanto, o movimento é como que o coração desta ciência. Iremos estudar primeiro as noções mais evidentes e gerais sobre o movimento. Para isto temos que distinguir a noção de mudança, que é mais ampla, da noção de movimento. Em seguida, distinguiremos as diversas espécies de movimento.

MUDANÇA EM GERAL

A noção de mudança é muito geral. Dizemos que há mudança nas coisas sempre que há uma certa novidade entre um antes e um depois. Algo era de uma forma sob um aspecto e veio a ser de outra forma sob o mesmo aspecto. A mudança pode ser total ou parcial, ou seja, pode afetar tudo o que a coisa natural é, como quando um filhote nasce ou um urso mais velho morre; ou pode afetar apenas um aspecto da coisa natural, como quando a água esquentada ou esfria. A mudança total afeta a própria substância da coisa, enquanto a mudança parcial afeta apenas um aspecto accidental.

Uma maneira de analisarmos a causa das mudanças é através da observação da geração e corrupção da natureza. Aristóteles demonstra em seus tratados (o que não faremos aqui neste estudo) que toda mutação do mundo físico requer três princípios:

- o sujeito que muda, que chamamos de matéria;
- a caracterização que ele recebe, que chamamos de forma;
- a ausência prévia dessa caracterização, que chamamos de privação ou privação da forma.

Esse fenômeno da geração e corrupção que chamamos de mudança é natural, sempre aconteceu, e, na verdade, nunca vai parar. As mudanças se dão quando um sujeito adquire uma nova caracterização, uma forma diferente da que antes o caracterizava. Uma nova forma exclui a possibilidade de haver todas as demais formas, ou seja, adquire a privação.

Assim, facilmente percebemos que tudo está em mudança, em transformação. Agora mesmo, neste momento, em que estas linhas estão sendo lidas, uma infinidade de mudanças estão ocorrendo no corpo e na mente do leitor: reações metabólicas o mantêm vivo, fazem o coração bater, os pulmões respirarem e muito mais; a mente também muda, conhece-se o que era desconhecido, aprende-se as verdades que antes eram ocultas e nosso pensamento vai longe... as vezes bem mais longe do que deveria... Tudo isso é, sob algum aspecto uma mudança, mas será que algo disto é também um movimento?

DISTINÇÃO ENTRE MUDANÇA E MOVIMENTO

Há mudanças que ocorrem sem um processo intermediário de movimento, de tal forma que se passa do antes ao depois sem estados intermediários, ou seja, imediatamente. Estas mudanças imediatas são evidentes nos atos da inteligência e da vontade: entendemos algo ou não entendemos, queremos algo ou não queremos.

Outro exemplo interessante é na administração dos Sacramentos. No Batismo, antes havia uma criatura de Deus, que “mudou” para filho de Deus. Na Eucaristia, havia pão e vinho que imediatamente tornam-se Corpo, Sangue, Alma e Divindade de Nosso Senhor Jesus Cristo. Quando estamos em pecado mortal somos inimigos de Deus, com a confissão, tornamo-nos amigos novamente. O seminarista torna-se sacerdote com sua ordenação. O marido e a mulher com o matrimônio tornam-se uma só carne. O jovem ao receber o Crisma adere livremente e imediatamente à Fé em Cristo. E por fim, a Unção dos Enfermos confere uma graça especial para enfrentar as dificuldades próprias de uma doença grave ou da velhice.



Todas as mudanças que não passam por um processo gradual de transformação são simplesmente mudanças. Já as mudanças que apresentam uma gradualidade de antes e depois, são chamados de movimentos, ou seja, entre um estado inicial e final, há uma série de estados intermediários.

O aquecimento da água é um exemplo de movimento, pois no início temos água fria e, depois do movimento, água quente. Ao longo do processo, a temperatura da água foi subindo gradualmente, grau por grau, até chegar à temperatura final.

Se queremos, por exemplo, chegar em algum lugar distante, precisamos sair de onde estamos e ir percorrendo, passo a passo, metro a metro, até chegar ao destino. Sendo assim, isto também é um movimento, pois a cada passo, a cada metro estamos mais longe de onde partimos e mais perto de onde queremos chegar.

Como se vê, o movimento é uma espécie de mudança. Todo movimento é mudança, mas nem toda mudança é movimento. A noção de mudança é mais ampla, abrange mais coisas do que a de movimento.

O MOVIMENTO

O movimento é evidente aos nossos sentidos e à nossa inteligência, percebemos que tudo está em movimento. Mover-se significa mais do que mudança de lugar. Supomos que algo se move quando aquilo que é, também pode ser outro e, na medida em que esta possibilidade transforma-se em realidade, dá-se o movimento. Supor o movimento, portanto, implica em pressupor que não somente o ser é uma estrutura básica do Universo, mas também o poder ser.

Neste momento, é importante lembrarmos de dois conceitos: a potência e o ato. Por potência entendemos a capacidade de um ser poder ter mais perfeição, ou seja, de poder ser algo a mais; e por ato entendemos o contrário da potência, é a perfeição que o ser já possui. Vamos aos exemplos.



Uns dos movimentos que uma semente realiza é a passagem do ser semente para o ser árvore.

Uma semente de uma árvore é uma árvore em potência, pois ela poderá chegar a ser uma árvore em ato. A madeira desta árvore em ato é um banco em potência, pois poderá chegar a ser um banco em ato. Além disto, esta árvore, tem a potência para ser uma infinidade de outras coisas: porta, janela, cabo de ferramentas, mesa, tábua, prateleira, armário, papel, livro, etc.

O minério de ferro encontrado nas rochas é minério de ferro em ato, mas tem a potência de ser uma peça de ferro, uma engrenagem, uma bigorna, uma picareta, um vergalhão, uma infinidade de outras coisas que poderão também ter a potência de serem usados para produzir outras coisas.

Percebemos então, que esta passagem de potência para ato é algo muito presente na natureza e a esta mudança de algo em potência para algo em ato é, justamente, o que entendemos por movimento.

O movimento pode ser então, genericamente, a passagem de potência para ato de coisas simples e materiais, como o exemplo, dado acima, da semente para a árvore e da madeira para o banco; pode ser o que a física chama de movimento local – quando um ser qualquer muda sua posição no espaço, visto que tem a potência de estar em qualquer lugar do espaço e pela ação de um outro ser, externo a ele, é deslocado de sua posição inicial – ou pode ser aplicado até mesmo ao movimento de nossa própria inteligência: todas as pessoas têm a potência para desenvolverem raciocínios (visto que a inteligência é uma faculdade da alma e todas as pessoas têm alma), mas, somente quando, de fato, os desenvolvem, é que há o movimento da inteligência.

Aristóteles sintetizou esta definição de movimento da seguinte maneira:

“O movimento é o ato daquilo que está em potência enquanto está em potência”.

O **ato** expressa o movimento e já uma certa realização; o aquecimento implica certo grau de atualização; **daquilo que está em potência** significa que o ato ao qual se refere não é qualquer coisa de concluído, de definitivo, mas que o sujeito permanece em potência para uma nova atualização; **enquanto está em potência** quer dizer que o ato do movimento determina seu sujeito sob a relação mesma onde ele se encontra ser em potência.

Assim é que na fabricação da estátua, o processo de fabricação não é atualização do bronze, enquanto bronze, mas do bronze enquanto em potência de se tornar estátua.

Em definitivo, o movimento se apresenta, portanto, como um ato imperfeito, ou como uma potencialidade ainda não perfeitamente atualizada: é uma espécie de estado intermediário entre a potência simples e o ato simples.

Um leitor atento poderá se questionar acerca de Deus, dizendo que já ouviu falar, em outros momentos, que somente Deus é puro ato ou que em Deus não há potência de nada. Sim, é verdade! Como potência e ato são realidades contraditórias sob o mesmo aspecto no mesmo tempo, não é possível que qualquer ser tenha potência e ato sob o mesmo aspecto ao mesmo tempo. Uma semente não pode ser semente e árvore em ato, pode ser semente em ato e árvore em potência. Assim o é com Deus. Deus é o único ser de todo o Universo que é ato puro, ou seja, como Deus é perfeitíssimo, não tem como ser mais perfeito, então não há n’Ele potência de ser mais perfeito. Deus é o motor–imóvel ao qual Aristóteles deduziu somente com a luz da razão natural.

AS ESPÉCIES DE MOVIMENTO

Há três categorias ou espécies de movimento. O movimento pode ser uma mudança da quantidade, mudança da qualidade e mudança da localização.

O MOVIMENTO NA QUALIDADE

A qualidade é um atributo ou uma propriedade de uma substância, tal como o branco, preto, alto, grande, quente, etc. Normalmente expressamos as qualidades de algo com adjetivos. Para que haja movimento na qualidade, não basta que haja qualquer tipo de mudança. O movimento deve ocorrer necessariamente entre dois extremos, em que se vai do imperfeito ao perfeito de forma gradual e contínua.



O aquecimento é um exemplo de um movimento na qualidade.

Calor e frio se opõem como contrários, implicando que o calor é uma certa perfeição e o frio é uma certa privação, e é possível passar do frio para o calor e do calor para o frio de forma contínua por todos os graus intermediários de temperatura. O mesmo acontece entre o branco e o preto, entre o denso ou cheio e o leve ou vazio, etc.

O MOVIMENTO NA QUANTIDADE

Por quantidade, entende-se uma propriedade que existe em magnitude e acumulação, e que designa tudo aquilo que pode ser medido ou contado, que é suscetível de aumentar ou diminuir.

Na quantidade só é possível falar de movimento como ato do que está em potência (enquanto está em potência), quando referimos a quantidade a uma certa natureza, em relação à qual adquire a razão de perfeita ou imperfeita. Há aperfeiçoamento na quantidade quando a criança cresce até o tamanho do adulto, ou quando o obeso volta ao peso normal.

O movimento da magnitude imperfeita para a perfeita é chamado de aumento, e o da perfeita para a imperfeita é chamado de diminuição.

O MOVIMENTO NA LOCALIZAÇÃO: SUA FRAQUEZA E IMPORTÂNCIA

A localização é o lugar, local onde se encontra um ente. Pode ser a casa, a rua, a cidade, o país ou a tantos metros para a direita, para cima, etc. Essa espécie de movimento ocorre na medida em que algo muda de lugar. Aqui devemos fazer uma observação semelhante ao movimento na quantidade.

O movimento, de acordo com o lugar, não recebeu um nome específico em sua generalidade, então o chamaremos de movimento local. Apenas foram nomeados movimentos locais mais específicos, como translação, rotação, deslocamento, etc. A causa

talvez esteja em sua generalidade, pois tudo se move localmente de alguma maneira, e apenas a reflexão filosófica precisa nomear noções tão gerais.

A situação local ou localização, assim como a situação temporal ou quando, são realidades muito fracas de uma coisa, pois são como relações de certa medida em relação às outras coisas ao seu redor. Embora possam ter consequências muito fortes, como estar no lugar e tempo em que a árvore cai, ou estar alguns metros à frente ou alguns minutos antes. Portanto, o movimento de acordo com o lugar, do qual decorre – como veremos – a mudança no tempo, é em si mesmo o movimento mais fraco e superficial, aquele que afeta menos profundamente a realidade das coisas.

No entanto, é observado pela experiência, e Aristóteles reconhecia isso, que o movimento local está no princípio de qualquer outro movimento. A criança não cresce se não leva o pão à boca, o obeso não diminui se não para de comer, o rosto não fica vermelho se o sangue não se desloca, o cão não morre se o raio não o atinge.

Iniciaremos, na próxima aula, nossos estudos com o estudo do movimento na localização, que chamaremos, a partir de agora, de movimento local.

ATIVIDADES

1. Quais são os princípios constitutivos do universo, e como esses princípios se relacionam com o estudo da Física?
2. Qual é a diferença entre mudança e movimento? Como as mudanças podem ser classificadas?
3. O que é "mudança imediata" e como ela se relaciona com atos da inteligência e da vontade? Forneça exemplos.
4. O que é a passagem da potência para o ato, e como isso está relacionado ao conceito de movimento?
5. Quais são as três categorias ou espécies de movimento, e como cada uma delas é explicada?



AULA 09

VELOCIDADE



O termo velocidade é bem conhecido e o utilizamos indistintamente em vários momentos para as mais diversas situações. É comum relacioná-lo com rapidez, agilidade, pressa e outras palavras que expressam a ideia de um movimento rápido. Inclusive o profeta Isaías, ao se referir ao estandarte da cruz de Cristo, diz que todos os povos de longe acorrerão com grande velocidade.

“Arvorará um estandarte, para servir de sinal aos povos de longe, e chamalá-los-á com um assobio desde os confins da terra, e acorrerão com grande velocidade.” Is 5, 26

Na era das informações, por exemplo, falamos de taxa de download, taxa de upload, transferência de dados, buffering, streaming, etc. Todos estes termos se referem À velocidade de bytes, kB, MB, GB ou TB por um tempo, normalmente segundos, ou seja:

$$\text{velocidade de download} = \frac{\text{kilobytes}}{\text{segundos}}$$

No transporte de fluidos fala-se de vazão, que também é uma medida de velocidade:

$$\text{vazão} = \frac{\text{litros (ou m}^3\text{)}}{\text{segundo}}$$

Nas produções de manufaturados, a velocidade é importante para a rentabilidade da produção:

$$\text{velocidade de produção} = \frac{\text{n}^\circ \text{ de produtos}}{\text{tempo (hora/dia/mês)}}$$

A partir destas ideias, podemos definir genericamente a velocidade como a medição de um movimento, como uma relação entre uma grandeza e o tempo. Quanto maior o valor desta relação, por causa da grande variação da grandeza ou pela pequena variação do tempo, mais veloz.

A física, chamada de clássica, estuda apenas os movimentos locais, pois é somente estes que ela “consegue ver” através das limitações materiais de seus experimentos. Então, estudaremos a velocidade apenas de um corpo quando este muda de posição no espaço e não quando realiza outros movimentos.

Desta forma, podemos definir velocidade como:

$$velocidade = \frac{\text{variação do espaço}}{\text{variação do tempo}}$$

Matematizando, temos:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Disto temos que a unidade de medida de velocidade é a razão entre a unidade de medida de espaço e a unidade de medida de tempo. As mais comuns são m/s e km/h .

A velocidade pode ser calculada em qualquer instante do movimento, em um certo intervalo de tempo ou considerando todo o movimento estudado.

A velocidade em um instante dá-se o nome de velocidade instantânea. Quando, por exemplo, olhamos o velocímetro do carro, verificamos a que velocidade estamos naquele instante.



Este velocímetro indica que o carro está andando a uma velocidade de 80 km/h.

Na imagem ao lado temos a indicação de que a velocidade instantânea do automóvel é de $80 km/h$. Isto significa que, se o carro permanecer nesta velocidade, percorrerá 80 quilômetros em 1 hora, ou dizendo a mesma coisa de outro modo, passado 1 hora terá percorrido 80 quilômetros.

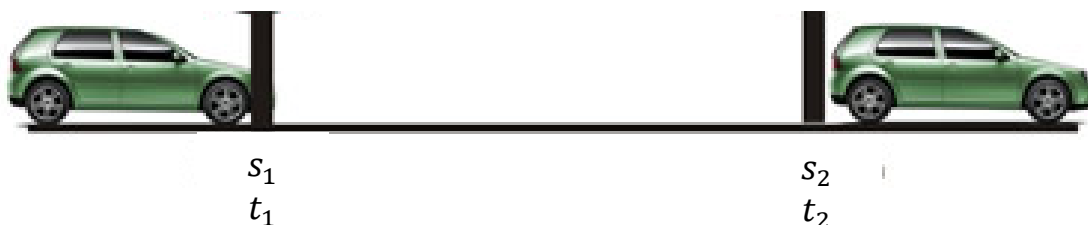
Quando se considera um intervalo de tempo maior ou todo o movimento estudado, costuma-se trabalhar com a velocidade média. Imagine que um outro automóvel, em uma viagem, percorre $200 km$ em 2 horas. Temos que a velocidade média deste automóvel será:

$$v_M = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{200 km}{2 h} \Rightarrow v_M = 100 km/h$$

Podemos dizer que o carro percorreu, em média, 100 km a cada hora; sua velocidade média foi de $100 km/h$. É importante observar que, para este tipo de análise, não importa o percurso, se o carro fez alguma parada ou viajou acima do limite de velocidade da rodovia, basta saber a distância total e o tempo total.

De modo geral, se um corpo está em s_1 no instante t_1 e em s_2 no instante t_2 , a velocidade média (v_M) é definida como:

$$v_M = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$



Exemplo 1: um automóvel passa pelo marco quilométrico 218 de uma estrada às dez horas e quinze minutos e pelo marco 236 à dez horas e meia. Qual a velocidade média do automóvel em km/h ?

Resolução: $t_1 = 10h15 \text{ min para } s_1 = 218 \text{ km}$

$t_2 = 10h30 \text{ min para } s_2 = 236 \text{ km}$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 236 - 218 = 18 \text{ km}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 10h30 - 10h15 = 15 \text{ min} = \frac{1}{4} h$$

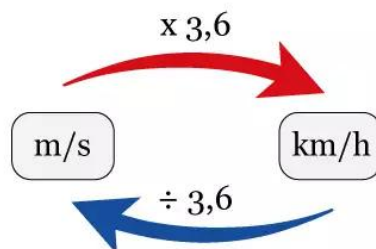
$$v_M = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{18 \text{ km}}{\frac{1}{4} h} \Rightarrow v_M = 72 \text{ km/h}$$

Por mais que a unidade no SI para expressar a velocidade seja $\frac{m}{s}$, é mais comum utilizarmos a velocidade em km/h . Existe uma relação entre estas duas unidades:

1 km é igual a 1000 m. 1 hora é igual a 3600 segundos, logo:

$$1 \frac{m}{s} = \frac{\frac{1}{1000} km}{\frac{1}{3600} h} = \frac{3600 km}{1000 h} = 3,6 \frac{km}{h}$$

Portanto, o fator de conversão entre m/s e km/h é 3,6. Para converter m/s em km/h , basta multiplicar por 3,6 e para converter km/h em m/s , basta dividir por 3,6.



Exemplos: $20 \text{ m/s} \Rightarrow 20 \times 3,6 = 72 \text{ km/h}$

$108 \text{ km/h} \Rightarrow 108 \div 3,6 = 30 \text{ m/s}$

Exemplo 2: A velocidade de um avião é de 360 km/h . Qual é o valor dessa velocidade em m/s ?

$$v = 360 \frac{km}{h} = \frac{360 m}{3,6 s} \Rightarrow v = 100 \frac{m}{s}$$

MOVIMENTO PROGRESSIVO E MOVIMENTO RETRÓGRADO

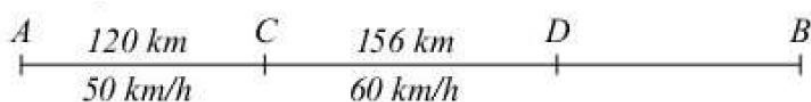
O movimento é chamado progressivo quando o móvel se desloca no mesmo sentido da orientação positiva da trajetória. Nesse caso, o espaço cresce com o decorrer do tempo, o que implica em variação positiva de espaço ($\Delta s > 0$) e consequente velocidade positiva ($v > 0$).

O movimento é chamado retrógrado quando o móvel se desloca no sentido contrário ao da orientação positiva da trajetória. Nesse caso, o espaço decresce com o decorrer do tempo, o que implica em variação negativa de espaço ($\Delta s < 0$) e consequente velocidade negativa $v < 0$.



Exemplo 3: A distância entre duas cidades, A e B, de 546 km, é percorrida por um ônibus em 8 horas. O primeiro trecho, de 120 km, é percorrido com velocidade constante de 50 km/h e o segundo trecho, de 156 km, com velocidade constante de 60 km/h. Calcule a velocidade, suposta constante, no trecho que resta.

Resolução:



Se $AB = 546\text{ km}$, $AC = 120\text{ km}$ e $CD = 156\text{ km}$, então:

$$DB = 546 - 120 - 156 \Rightarrow DB = 270\text{ km}$$

$$\Delta t_{AC} = \frac{\Delta s_{AC}}{v_{M,AC}} = \frac{120}{50} = 2,4\text{ h}$$

$$\Delta t_{CD} = \frac{\Delta s_{CD}}{v_{M,CD}} = \frac{156}{60} = 2,6\text{ h}$$

Se $\Delta t_{DB} = 8\text{ h}$, então:

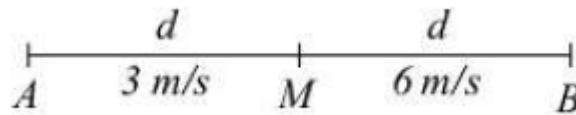
$$\Delta t_{DB} = 8 - 2,4 - 2,6 = 3\text{ h}$$

Logo:

$$V_{M,DB} = \frac{\Delta s_{DB}}{\Delta t_{DB}} = \frac{270\text{ km}}{3\text{ h}} \Rightarrow v_{M,DB} = 90\text{ km/h}$$

Exemplo 4: Uma partícula percorre uma trajetória retilínea AB, em que M é o ponto médio, sempre no mesmo sentido e com movimento uniforme em cada um dos trechos AM e MB. A velocidade da partícula no trecho AM é de 3 m/s e no trecho MB é de 6 m/s. Determine a velocidade média entre os pontos A e B.

Resolução:



Vamos tomar $AM = MB = d$

$$v_{m,AB} = \frac{\Delta s_{AB}}{\Delta t_{AB}}$$

Mas:

$$\Delta s_{AB} = \Delta s_{AM} + \Delta s_{MB} = d + d \Rightarrow \Delta s_{AB} = 2d$$

$$\Delta t = \Delta t_{AM} + \Delta t_{MB}$$

$$\Delta t_{AM} = \frac{\Delta s_{AM}}{v_{m,AM}} = \frac{d}{3 \frac{m}{s}}$$

$$\Delta t_{MB} = \frac{\Delta s_{MB}}{v_{m,MB}} = \frac{d}{6 \frac{m}{s}}$$

$$v_{m,AB} = \frac{2d}{\frac{d}{3} + \frac{d}{6}} = \frac{2d}{\frac{d}{2}} \Rightarrow v_{m,AB} = 4 \text{ m/s}$$

ATIVIDADES

1. Certo dia, São João Bosco viajou de trem e percebeu que o mesmo se movia a 80 km/h. A viagem durou uma hora e quinze minutos. Qual a distância entre as duas cidades?
2. Às 14h50min, um automóvel se encontra no quilômetro 30 de uma rodovia. Às 15h15, o mesmo automóvel se encontra no quilômetro 55 da mesma rodovia. Determine:
 - a) A variação do espaço do móvel.
 - b) O intervalo de tempo decorrido.
 - c) A velocidade média do carro em km/h e em m/s.
3. Um trem percorre a distância entre duas cidades que se localizam a 300 km uma da outra, com velocidade média de 80 km/h. Quanto tempo ele demora para percorrer o trajeto nestas condições?
4. Em 1984, o navegador Amyr Klink atravessou o Oceano Atlântico em um barco a remo, percorrendo a distância de, aproximadamente, 7000 km em 100 dias. Qual foi sua velocidade média?
5. Em uma competição, Fernanda nadou 6,0 km e, em seguida, correu outros 6,0 km. Na etapa de natação, conseguiu uma velocidade média de 4,0 km/h; na corrida, sua velocidade média foi de 12 km/h. a) Calcule o tempo gasto por Fernanda para nadar os 6,0 km. b) Calcule a velocidade média de Fernanda no percurso total da prova.



AULA 14

EQUAÇÃO DE TORRICELLI

Para esta nova física conhecida como clássica, os movimentos uniformemente variados têm uma grande importância histórica, pois, segundo os novos físicos, o famoso e cheio de controvérsias históricas, Galileu Galilei, “inaugurou” a ciência moderna com o estudo de questões relativas ao movimento, entre elas o estudo do movimento dos corpos sob a ação do que viria a ser chamado de gravidade. O tipo de movimento que ele encontra para o deslocamento dos corpos sob ação da gravidade pode ser descrito como um movimento uniformemente variado.

As controvérsias históricas sobre Galileu, sua “severa condenação”, e a própria questão mais controversa ainda acerca da “evidente gravidade” sistematizada por Isaac Newton quando uma maçã caiu em sua cabeça, deixaremos para um momento mais oportuno em nossos estudos. Nestas próximas aulas, nos preocuparemos apenas com a descrição matemática dos movimentos e, assim como a física clássica tem feito, infelizmente deixaremos as causas dos movimentos temporariamente em um segundo plano.

Um aluno de Galileu, Evangelista Torricelli, desenvolveu uma equação para o movimento uniformemente variado que independe do tempo. Essa relação ficou conhecida como Equação de Torricelli.

Consideremos um movimento uniformemente variado qualquer onde, s_0 é o espaço inicial e v_0 a velocidade escalar inicial. Em um instante posterior t , o espaço é s e a velocidade é v .

Para este movimento temos:

$$(I) \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$(II) \quad v = v_0 + at$$

Isolando o valor de t na equação (II):

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

Substituindo na equação (I):

$$s = s_0 + v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{a \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2}{2}$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{a \cdot \left(\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2} \right)}{2}$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{a \cdot \left(\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a^2} \right)}{2}$$

$$s = s_0 + \left(\frac{vv_0 - v_0^2}{a} \right) + \frac{\left(\frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{a} \right)}{2}$$

$$s = s_0 + \left(\frac{vv_0 - v_0^2}{a} \right) + \frac{v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a}$$

$$s = s_0 + \frac{2vv_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a}$$

$$s - s_0 = \frac{2vv_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a}$$

$$2a\Delta s = 2vv_0 - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2$$

$$2a\Delta s = -2v_0^2 + v^2 + v_0^2$$

$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2$$

$$v_0^2 + 2a\Delta s = v^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

Equação de Torricelli

Nesta equação temos:

v é a velocidade para um instante qualquer t ;

Δs é a variação de espaço entre o instante $t = 0$ e um instante qualquer;

v_0 é a velocidade para o instante $t = 0$;

a é a aceleração escalar instantânea e diferente de zero;

v_0 e a são constantes.

Exemplo 1: Um carro de corrida inicialmente em repouso é sujeito a aceleração constante de 5 m/s^2 . Determine a distância percorrida pelo carro até atingir a velocidade de 10 m/s .

Resolução: Para esta situação temos: $v_0 = 0$; $v = 10 \text{ m/s}$ e $a = 5 \text{ m/s}^2$. Pela equação de Torricelli temos:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

Substituindo os valores:

$$10^2 = 0 + 2 \cdot 5 \cdot \Delta s$$

$$100 = 10 \Delta s$$

$$\Delta s = 10 \text{ m}$$

Este carro de corrida percorreu, com uma aceleração constante de 5 m/s^2 , 10 metros até atingir a velocidade de 10 m/s .

Exemplo 2: Um veículo tem velocidade inicial de 4 m/s , variando uniformemente para 10 m/s após um percurso de 7 m . Determine a aceleração do veículo.

Resolução: Para esta situação temos: $v_0 = 4 \text{ m/s}$; $v = 10 \text{ m/s}$ e $\Delta s = 7 \text{ m}$.

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s \Rightarrow 10^2 = 4^2 + 2 \cdot a \cdot 7$$

$$100 = 16 + 14a$$

$$14a = 84$$

$$a = 6 \text{ m/s}^2$$

ATIVIDADES

1. Um automóvel possui, em um certo instante, velocidade escalar de 10 m/s . A partir desse instante o motorista imprime ao veículo uma aceleração escalar constante de $3,0 \text{ m/s}^2$. Qual a velocidade que o automóvel adquire após percorrer 50 m ?

2. Um automóvel viaja à velocidade de 72 km/h . A distância de 500 m seu motorista vê um obstáculo. Determine a aceleração que deve ser aplicada no carro para que este pare a tempo de não se chocar contra o obstáculo.

3. Um veículo de dimensões desprezíveis penetra em um túnel com velocidade escalar 10 m/s , realizando um movimento uniformemente variado. Após $8,0 \text{ s}$, o veículo sai do túnel com velocidade escalar 15 m/s . Determine o comprimento do túnel.

4. Um trem de 200 m está em repouso em uma estação. A extremidade dianteira do trem coincide com o poste de sinalização luminosa. No instante $t = 0$, o trem parte com aceleração constante de 25 m/min^2 . Qual a velocidade do trem, em km/h , quando a sua extremidade traseira estiver cruzando o sinal luminoso?



AULA 19

VELOCIDADE E ACELERAÇÃO VETORIAIS



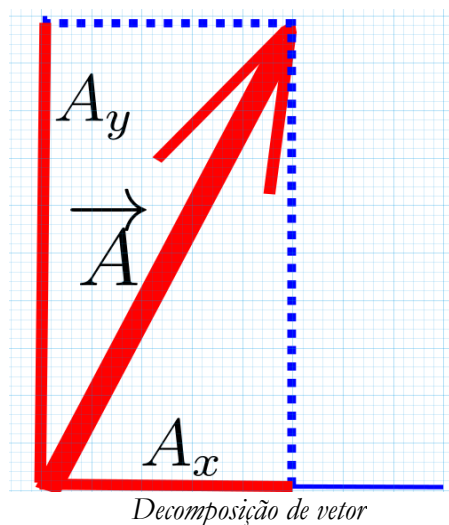
a aula 17, asseveramos que o movimento local de um objeto em um plano pode ser descrito pela projeção desse seu movimento nos eixos cartesianos x e y . Como conciliar isso com a noção de vetor? E qual é a necessidade de passarmos de um modo de descrever o deslocamento para outro modo de descrevê-lo? Resolvendo este problema, concluiremos nossa exposição de vetores e definiremos a velocidade e a aceleração no contexto de um movimento bidimensional.

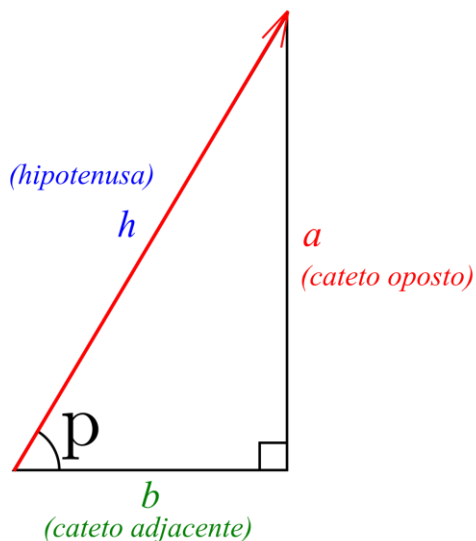
Na aula 18, somamos vetores utilizando geometria euclidiana, sem dar ênfase à exatidão da medida dos ângulos e comprimentos dos vetores resultantes. Para fins de demonstração, isso é suficiente, mas se quisermos fazer contas com vetores, é necessário utilizar um formalismo mais exato. Para isso, definiremos, na esteira do que foi determinado na Aula 17, as chamadas componentes de um vetor. Para isso, consideremos inicialmente um plano cartesiano, e coloquemos o vetor que desejamos decompor, encontrar as componentes, com a extremidade na origem do plano cartesiano. O vetor pode ser descrito em termos de sua projeção no eixo x em concomitância com sua projeção no eixo y . Mas como encontramos essa projeção?

Precisaremos usar as chamadas funções trigonométricas *seno*, *cosseno* e *tangente*. Como tal abordagem dar-se-á oportunamente na disciplina de matemática, apenas daremos breves definições com propósito meramente operacional.

O vetor forma um ângulo com o eixo x . Chamemos esse ângulo de θ . Imaginemos, então, um triângulo retângulo formado por um segmento de reta coincidente com o eixo x e o vetor. Definimos o seno desse ângulo θ como a divisão do cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa do triângulo retângulo que, no caso, é dada pela magnitude do vetor.

De modo análogo, o chamado cosseno do ângulo θ é dado pela divisão do cateto adjacente ao ângulo pela hipotenusa.





Por fim, a chamada tangente de p é dada pela divisão do cateto oposto pelo cateto adjacente.

Toda essa elucubração pode ter parecido pouco útil, pois o que queremos é descobrir o valor dos catetos, que correspondem às projeções do vetor nos eixos cartesianos. A questão é que, para um dado ângulo p (que conhecemos), temos tabelado o valor do seu seno, seu cosseno e sua tangente. Conhecendo esses valores, que são universais (dado um ângulo, conhecemos com certeza seu seno, cosseno e tangente), podemos encontrar as projeções simplesmente

multiplicando as expressões do seno e do cosseno pela hipotenusa, pela magnitude do vetor, em ambos os lados. Isso conduz às seguintes fórmulas

$$\vec{A}_x = \vec{A} \cdot \cos(p)$$

$$\vec{A}_y = \vec{A} \cdot \sin(p)$$

Onde $\vec{A}_x$ é a projeção do vetor $\vec{A}$ no eixo x e $\vec{A}_y$ é a projeção do vetor $\vec{A}$ no eixo y . A partir de agora, usaremos a notação $\cos(p)$ para cosseno do ângulo p e $\sin(p)$ para expressar o seno do ângulo p .

A seguir, uma tabela demonstrando os valores do seno, cosseno e tangente de ângulos mais comuns.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangent e
0°	0	1	0
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	1	0	indefinid o
180°	0	-1	0

Um fato interessante é que a soma de vetores pode ser feita em termos das componentes, dado que as conheçamos. Um vetor $\vec{u} = (u_x, u_y)$ (onde u_x é a componente x do vetor e u_y é a componente y) pode ser somado com um vetor $\vec{v} = (v_x, v_y)$ somando componente a componente:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

Confirmando assim o que já foi dito: um movimento vetorial pode ser expresso em termos de dois movimentos unidimensionais.

Até agora, exemplificamos todas as propriedades vetoriais em termos de deslocamentos, pelo fato dessa grandeza ser o paradigma e "causa exemplar", de modo impróprio, de todo tipo de grandeza vetorial. Entretanto, como já foi dito, ela não é a única grandeza vetorial. Toda grandeza que possui magnitude, direção e sentido é chamada vetorial, desde que se transforma, obedecendo às operações próprias de um vetor. Veremos que a velocidade e a aceleração também são vetores quando se trata de um movimento não-unidimensional.

A velocidade média é definida na física moderna como a razão entre o deslocamento total e o tempo gasto neste, ou seja:

$$v = \frac{(s_2 - s_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Se consideramos um movimento vetorial, precisaremos decompor as componentes s_x e s_y do deslocamento. Assim, lembrando que o tempo é definido como uma grandeza escalar, podemos definir as componentes x e y da velocidade média fazendo:

$$v_x = \frac{(s_{x2} - s_{x1})}{(t_2 - t_1)} \text{ e } v_y = \frac{(s_{y2} - s_{y1})}{(t_2 - t_1)}$$

A aceleração média vetorial, por fim, pode ser definida de modo análogo ao da velocidade vetorial:

$$a_x = \frac{(v_{x2} - v_{x1})}{(t_2 - t_1)} \text{ e } a_y = \frac{(v_{y2} - v_{y1})}{(t_2 - t_1)}$$

Se quisermos, por fim, encontrar a chamada velocidade instantânea (que é, a grosso modo, aquela velocidade cuja magnitude é marcada por um velocímetro, por exemplo), precisamos tomar a diferença entre o tempo t_2 e t_1 muito pequena, tendente a zero. Ora, nesse diminuto intervalo de tempo, o objeto vai ter se movimentado também de modo diminuto na direção x e na direção y .

Um carro, por exemplo, calcula sua velocidade instantânea com base na quantidade de rotações que a roda faz em um instante de tempo. Evidentemente, nesse caso, nem o tempo nem a distância "tendem a zero", mas são, ainda assim, muito pequenos se comparados à distâncias percorridas normalmente.



ATIVIDADES

1. Um helicóptero se desloca de São Carlos até Brasília. A distância total é de 687 km e o sentido é sul-norte. A velocidade é de 200 km/h.

a) Qual é o tempo gasto no trajeto?

b) Qual é a distância que o Google Maps acusa entre essas duas cidades em um trajeto via rodovia? Por que existe uma disparidade?

c) Poderíamos obter uma distância mais condizente com o trajeto via rodovia se considerássemos não um vetor deslocamento, mas vários vetores cuja magnitude sem levar em conta a direção e o sentido. Justifique essa afirmação.

2. Um ponto material se desloca, em 5 segundos, 4 metros para o norte e 7 metros para o leste

- a) Qual é a sua velocidade média na direção x?
- b) Qual é a sua velocidade média na direção y?
- c) Qual é a magnitude de sua velocidade média?

3. Um veículo parte do repouso e atinge uma velocidade de 100 km/h no sentido nordeste. Ele demora 10 segundos para tal.

- a) Qual é a magnitude da aceleração média do carro?
- b) Qual é a aceleração média na direção x?
- c) Qual é a aceleração média na direção y?



AULA 21

QUEDA LIVRE E LANÇAMENTO VERTICAL



esta aula, retomaremos, agora já habituados a uma perspectiva vetorial, a dois tipos peculiares de movimentos unidimensionais: a queda livre e o lançamento horizontal. Essa revisão é útil, porque os movimentos em duas dimensões que serão subsequentemente estudados (lançamento horizontal e lançamento oblíquo) são uma composição de problemas de queda livre/lançamento vertical com movimento retilíneo uniforme.

O interesse teórico no movimento de queda livre se dá porque é o exemplo mais comum e mais paradigmático, de um movimento com aceleração aproximadamente constante. Sabemos que, amparados nos fatos experimentais, a aceleração de um objeto em queda livre é de aproximadamente $9,8 \text{ m/s}^2$. É o que chamamos de aceleração gravitacional. Essa aceleração aponta para baixo, na direção do "chão". Dependendo da distância do chão (mais exatamente, da distância do centro da Terra), a aceleração gravitacional, que "puxa" as coisas para baixo, é maior ou menor. A variação desta força nas situações cotidianas é, entretanto, ignorável: seria preciso estar em um foguete para perceber tais variações! Deste modo, adotaremos a aceleração gravitacional $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ na direção y como valor padrão para aceleração gravitacional.

Um movimento em queda livre é definido como um movimento no qual o objeto parte do repouso e é solto de uma determinada altura, sendo acelerado para baixo conforme a aceleração gravitacional. Como não temos qualquer velocidade ou aceleração na direção horizontal, o movimento é efetivamente unidimensional, podendo ser descrito pela seguinte equação horária

$$y = y_0 - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

Se estivermos em um problema no qual o tempo não deva aparecer, usamos a Equação de Torricelli.



Um exemplo de queda livre acontece quando uma fruta cai naturalmente de uma árvore.

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta y$$

Exemplo 1: uma pessoa, no momento em que estava tocando os sinos de uma alta catedral, acaba deixando escorregar uma moeda de um real em virtude de seu furor, e ela cai lá de cima. Considerando o topo como marco referencial, ou seja, como $y = 0$, qual será o valor de y e de v_y após 1 segundo, 2 segundos e 3 segundos?

Resolução: Para descobrir isso, basta utilizarmos as equações horárias usando $t = 1\text{ s}$, $t = 2\text{ s}$ e $t = 3\text{ s}$:

$$y(1) = -9,8 \cdot \frac{1^3}{2} = -4,9\text{ m}$$

$$v(1) = -9,8 \cdot 1 = -9,8\text{ m/s}$$

$$y(2) = -9,8 \cdot \frac{2^3}{2} = -19,6\text{ m}$$

$$v(2) = -9,8 \cdot 2 = -19,8\text{ m/s}$$

$$y(3) = -9,8 \cdot \frac{3^3}{2} = -44,1\text{ m}$$

$$v(3) = -9,8 \cdot 3 = -29,4\text{ m/s}$$

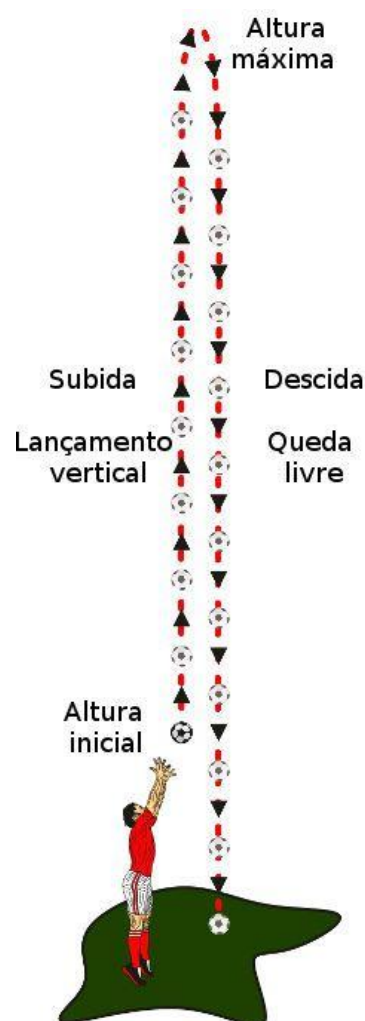
Um problema mais complexo, mas correlato, é aquele que consiste em um lançamento vertical, de baixo para cima. O objeto lançado sai com determinada velocidade e sobe. Como a aceleração gravitacional aponta pra baixo, no sentido oposto à velocidade inicial, o objeto sobe cada vez mais devagar até chegar à sua altura máxima. Depois disso, ele cai, acelerado pela gravidade, até atingir novamente o chão.

A velocidade inicial com a qual o objeto é arremessado é v_{0y} , e essa velocidade é positiva. Consideremos, em geral, que a posição inicial é $y_0 = 0$. O objeto sobe até uma altura máxima, que é aquela na qual o objeto não sobe mais, por definição. A velocidade, que era positiva, se anulou, e irá se tornar negativa logo em seguida. Desse modo, podemos encontrar a altura máxima em um arremesso vertical tomando $v = 0$ na equação horária:

$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$0 = v_0 - g \cdot t \rightarrow v_0 = g \cdot t$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$



Ou seja, o tempo que o objeto gasta para chegar em sua altura máxima é dado pela razão entre a velocidade inicial (v_0) e a aceleração gravitacional (g). Se substituirmos a relação anterior onde $t = v_0/g$ na equação horária para o deslocamento y , teremos:

$$y = 0 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - g \cdot \frac{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2}{2}$$

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g}$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g}$$

Ou seja, a altura máxima atingida por um objeto arremessado de baixo para cima com uma velocidade inicial v_0 é:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Obs.: algumas vezes usa-se a letra h para expressar a altura, do inglês *height* = altura. Sendo assim, $y_{\text{máx}}$ pode aparecer como $h_{\text{máx}}$.

Esse resultado vale sempre, desde que estejamos dentro dos limites da teoria (ou seja, sem considerarmos resistência do ar, como seria necessário, por exemplo, na descrição da queda livre de uma folha de papel, e sem nos afastarmos demasiadamente da Terra, como no caso da descrição de um foguete espacial, por exemplo).

Vamos concluir o capítulo com um exemplo.

Exemplo 2: Uma pessoa aponta um canhão para cima e dá um tiro. O projétil sai da boca do canhão com uma velocidade $v_{0y} = 100 \text{ m/s}$. Use, por simplicidade, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- Qual a altura máxima atingida pelo projétil?
- Qual é o tempo gasto até que o projétil atinja o chão?

Resolução: Para encontrarmos a altura máxima, basta fazermos:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{100^2}{2 \cdot 10} = \frac{10.000}{20} = 500 \text{ m}$$

Ora, sabemos que o tempo (t) gasto até que o projétil atinja a altura máxima é v_0/g . Essa altura é de 500 metros. Podemos ver o tempo gasto até o chão considerando um problema de queda livre, pois, da altura máxima, o objeto cairá livremente, a partir do repouso (por definição, o ponto de altura máxima é aquele no qual a velocidade do objeto se anula), com uma aceleração $g = -10 \text{ m/s}^2$. Considerando $y_0 = y_{\text{máx}}$, temos

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$0 = y_0 - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$y_0 = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$\frac{2 \cdot y_0}{g} = t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

Como $y_0 = 500 \text{ m}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$, t é igual:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{10}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = \sqrt{100} \Rightarrow t = 10 \text{ s}$$

Ora, y_0 é a altura máxima, que é igual a $v_0^2/2g$. Voltemos, então, a $\sqrt{2y_0/g}$. Se fizermos $2 \cdot y_0/g$, temos v_0^2/g^2 . Se tomarmos a raiz disso, ficamos com v_0/g ! Com isso, concluímos um outro resultado muito interessante, e válido em todos os casos nos quais temos um lançamento vertical sem resistência do ar: o tempo gasto para o objeto subir até a altura máxima é exatamente o mesmo tempo gasto pelo objeto para descer novamente até a posição inicial. O tempo total que o objeto fica no ar, portanto, é de $2 \cdot v_0/g$, o que dá, nesse caso, cerca de 20 segundos.

Veremos subsequentemente, em capítulos posteriores, que esse interessante fato é consequência de um dos mais importantes princípios da física moderna: a conservação de energia.

ATIVIDADES

Em todos os exercícios desprezaremos a resistência do ar e usaremos $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1. Um homem aponta seu rifle para cima e atira. A bala sai com velocidade $v_{0y} = 800 \text{ m/s}$.

- Qual é a velocidade inicial da bala em km/h?
- Qual a altura máxima atingida pela bala?
- Qual é a velocidade com que a bala atinge o chão?

2. Durante suas embaixadinhas, um jogador de futebol imprime na bola uma velocidade de 6 m/s. Considerando que seu pé se encontra sempre à mesma altura, qual será o tempo gasto entre uma embaixadinha e outra?

3. Uma esfera metálica cai da Torre Eiffel, que tem aproximadamente 300 m de altura

- Qual será a velocidade com que a esfera chegará no chão?
- Quanto tempo a esfera demorará para atingir o solo?
- Se, no mesmo instante em que a esfera for jogada, alguém atirar com um canhão uma bola metálica para cima, qual deverá ser a velocidade inicial desta para que as duas esferas atinjam o chão no mesmo instante?



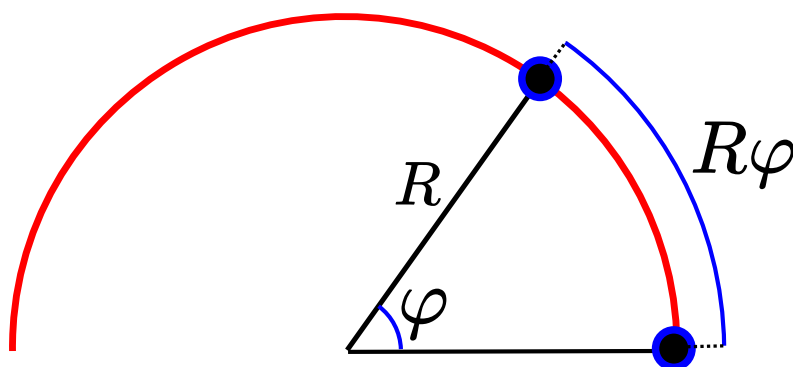
AULA 26

GRANDEZAS ANGULARES



essa aula, falaremos a respeito das grandezas angulares. Quando estamos descrevendo movimentos translacionais comuns, como um carro indo de um ponto a outro ou uma pessoa caminhando de sua casa para o supermercado, usamos as grandezas adequadas para descrição de tal movimento, que no caso são a velocidade, o deslocamento, a aceleração, etc. Quando estamos descrevendo movimentos que possuem caráter circular, o uso dessas grandezas já se torna pouco conveniente. De que adianta saber a velocidade linear da extremidade de um componente de um motor de carro? De que adianta saber a distância total que percorreu a Terra em um ano? Essas informações têm seu interesse, mas são crípticas no que se refere a descobrirmos informações relevantes a respeito de como rodam esses objetos. Para descrever em variáveis mais relevantes o movimento de algo que roda, precisamos definir algumas grandezas, as chamadas grandezas angulares, que, como diz o nome, falam mais do **ângulo** percorrido por um objeto (e a variação do ângulo com o tempo, da variação da variação do ângulo com o tempo, etc.) do que da **distância** percorrida por ele.

Para compreendermos tais grandezas, vejamos a figura abaixo, que expressa uma conta percorrendo uma trajetória circular de raio R



Se tomarmos como ponto de partida o ponto no qual o objeto em rotação (conta preta de borda azul) intercepta o eixo x , podemos descrever de modo unívoco sua posição após um tempo t por meio do ângulo φ . Quando $\varphi = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$, a volta fica completa e a conta retorna ao ponto de partida.

Em uma trajetória circular de raio R , podemos relacionar o comprimento do deslocamento Δs com o ângulo percorrido φ do seguinte modo:

$$\Delta s = R\varphi$$

Com o ângulo medido em radianos. Para escrevermos um ângulo em radianos, basta dividirmos seu valor em graus por **180** e multiplicarmos por π . Desse modo, após uma volta completa, $\Delta s = 2\pi R$, que é justamente o perímetro de uma circunferência.

A velocidade escalar média é dada pela razão entre Δs e Δt . Nesse Δt , o objeto em rotação percorre um ângulo $\Delta\varphi$. Desse modo, se dividirmos a expressão acima por Δt , podemos definir a chamada **velocidade angular média** ω_m , que se relaciona com a velocidade escalar média do seguinte modo

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega_m \rightarrow \omega_m = \frac{v_m}{R}$$

Se o intervalo de tempo for infinitesimalmente pequeno, a variação do ângulo neste intervalo de tempo também será. Assim definimos a velocidade angular **instantânea**.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \text{ com } \Delta t \rightarrow 0 \text{ e } \Delta\varphi \rightarrow 0$$

A unidade da velocidade angular é a de radianos por segundo.

De modo análogo, a razão entre a variação da velocidade angular e o tempo no qual se deu essa variação nos permite definir a aceleração angular média

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta v}{R\Delta t} = \frac{a_m}{R}$$

que pode ser obtida pela razão entre a aceleração média e o raio da trajetória que faz o objeto.

Se tomarmos $\Delta t \rightarrow 0$, a variação da velocidade também será muito pequena. Assim, definimos a aceleração angular instantânea

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ com } \Delta t \rightarrow 0 \text{ e } \Delta\omega \rightarrow 0$$

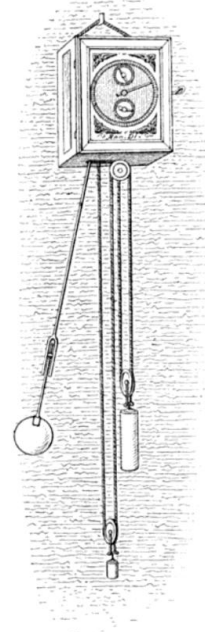
A unidade de aceleração angular é a de radianos por segundo ao quadrado (rad/s^2).

Isso mostra que, para transformarmos grandezas angulares em grandezas lineares (em um movimento curvilíneo), basta multiplicarmos a grandeza angular pelo raio R ! Se a trajetória for circular, o valor de R é evidente. Se não for, o problema é mais complexo.

Os fenômenos que envolvem rotações e grandezas angulares tem a característica de serem **periódicos**, ou seja, o mesmo deslocamento se repete várias vezes. Isso nos exige definir os conceitos de **frequência** e **período**.

Para definir esses conceitos, usemos exemplos:

Uma pessoa cria um pêndulo amarrando um chumbinho de pesca à uma linha de pesca. Essa linha é amarrada em um parafuso na parede. A pessoa que fez isso puxa o chumbinho para o lado, mantendo a linha esticada, e o solta. Isso dá origem a um pêndulo, que volta ao ponto de onde foi solto a cada 2 segundos.



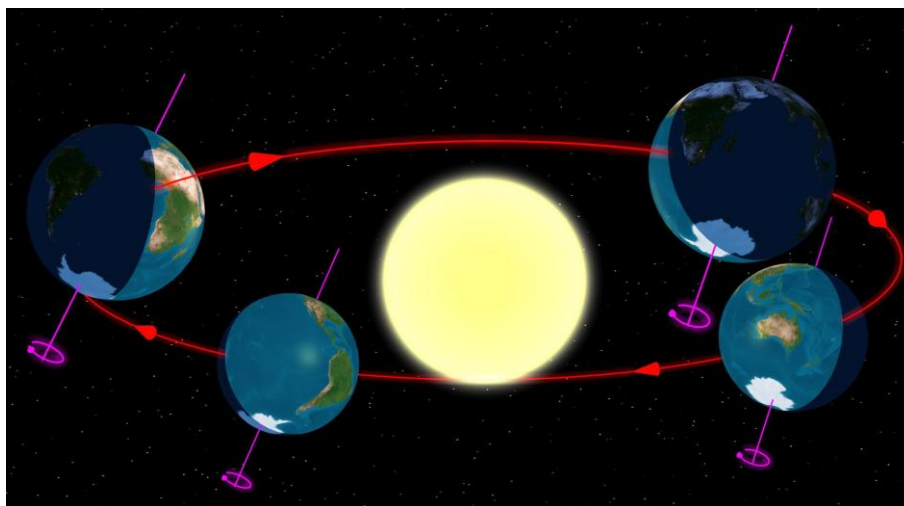
Esse tempo gasto para voltar ao ponto inicial é o que chamamos **período**. Ora, em um dado instante de tempo (digamos, 1 minuto), o pêndulo vai e volta até o ponto inicial algumas vezes (30, no caso). Isso é o que chamamos **frequência**: é a quantidade de vezes que o fenômeno se repete em um determinado intervalo de tempo.

Ora, o motor de um carro em alta velocidade ou em marcha de saída pode alcançar, no máximo, cerca de 7000 rotações por minuto (rpm). Essa é uma medida de frequência, que fala quantas voltas completas o motor deu em um minuto. Se ele rodou 7000 vezes por minuto, quanto tempo ele demorou para dar uma rotação? Para calcular isso, basta fazermos 1 minuto dividido por 7000

$$\frac{1}{7000} \text{ min} = \frac{60}{7000} \text{ segundos} = \frac{60}{7} \approx 8,57 \text{ milésimos de segundo}$$

Esse é o valor aproximado do **período** de rotação do motor em sua capacidade máxima. O período é um intervalo de tempo, enquanto a frequência tem unidade de t^{-1} .

Passando para a escala astronômica, o **ano solar** é definido pelo tempo que a Terra gasta para dar uma volta completa ao redor do Sol. Esse é, então, o **período** translacional da terra. Se quisermos saber sua frequência em rotações por ano, a resposta será também 1 rotação/ano. Se quisermos saber em meses, já não há a identificação entre os dois valores: o período será de 12 meses e a frequência será 1/12 translações completas em um mês.



Translação da terra fora de escala

Note que existe uma identificação entre o conceito de **velocidade angular** e o de **frequência de rotação**. Uma rotação completa é equivalente a uma variação angular de 2π radianos. A quantidade de rotações completas em um dado período de tempo (note: isso é equivalente a tomar a razão entre a variação angular e o tempo gasto para tal variação) define sua frequência, ou sua velocidade angular. As definições são equivalentes.

Para concluir, falemos um pouco a respeito das unidades de medida que convencionou-se usar para frequência.

Chamamos de Hertz (símbolo Hz) a frequência equivalente a um ciclo ou rotação por segundo. Desse modo

$$1 \text{ Hz} = \frac{1}{s} \text{ ou } 1 \text{ Hz} = \frac{2\pi}{s} \text{ rad}$$

Onde a primeira definição fala de ciclos por segundo (consideramos 1 = 1 ciclo) e a segunda fala de variação angular por segundo (daí, 1 ciclo é descrito por uma variação angular de 2π radianos).

Uma unidade análoga ao Hertz é a do Kilohertz (1000 Hz), equivalente a um objeto que realiza mil ciclos por segundo, ou um ciclo a cada milésimo de segundo (ms).

$$1 \text{ kHz} = 1000 \text{ Hz} = \frac{1000}{s} = \frac{1}{ms}$$

Uma terceira unidade de frequência é o rpm (rotações por minuto)

$$1 \text{ rpm} = \frac{1}{\text{min}} = \frac{2\pi}{\text{min}} \text{ rad}$$

É conveniente notar que 1 Hz corresponde a 60 rpm.

Os antigos discos de vinil (LPs) rodavam a uma frequência (ou velocidade angular) de 33 rpm. Um motor de carro em uma viagem em velocidade de cruzeiro roda a 2500 rpm.

Para concluir, é importante notar que, embora haja intercâmbio de definições entre frequência e velocidade angular no contexto de movimento circular, o conceito de velocidade angular é mais restrito, restringindo-se a fenômenos cinemáticos nos quais há rotação. Se quisermos transformar de velocidade angular para velocidade linear, não poderemos esquecer o fator 2π . O conceito de frequência é mais geral, pois é aplicável à qualquer fenômeno cíclico, como o balanço de um pêndulo, a oscilação de uma onda ou a quantidade média de batimentos cardíacos por minuto (bpm).

Exemplo 1: Uma pessoa mede 18 batimentos cardíacos ao longo de 15 segundos. Qual é o valor de seu bpm?

Resolução: Usamos uma extrapolação: se em 15 segundos, foram 18 batimentos, em 60 segundos (1 minuto), teremos 4 vezes mais: $18 \cdot 4 = 72$ bpm.

Exemplo 2: A terra tem frequência de rotação igual a 1 rotação por ano. O raio de rotação (distância Terra-Sol) é de 150 milhões de quilômetros. Qual é a sua velocidade **linear**?

Resolução: A velocidade angular é igual a $\frac{2\pi}{\text{ano}}$ rad. Para falarmos de velocidade, é conveniente transformarmos “ano” em “horas” ou “segundos”, para que possamos escrever a velocidade linear em metros por segundo ou quilômetros por hora.

Optemos pela segunda.

Um ano contém cerca de 365 dias. Cada dia tem 24 horas. Logo, um ano tem $365 \cdot 24 = 8760$ horas. A Terra, então, dá $\frac{1}{8760}$ de volta (cada volta equivale a 2π) ao redor do Sol a cada hora: essa é a sua frequência.

Ora, para encontrarmos a velocidade linear, basta multiplicarmos o raio da órbita pela velocidade angular:

$$v = R\omega = 150\,000\,000 \text{ km} \cdot \frac{2\pi}{8760 \text{ h}} \approx 107\,589 \text{ km/h}$$

Uma velocidade bastante espantosa.

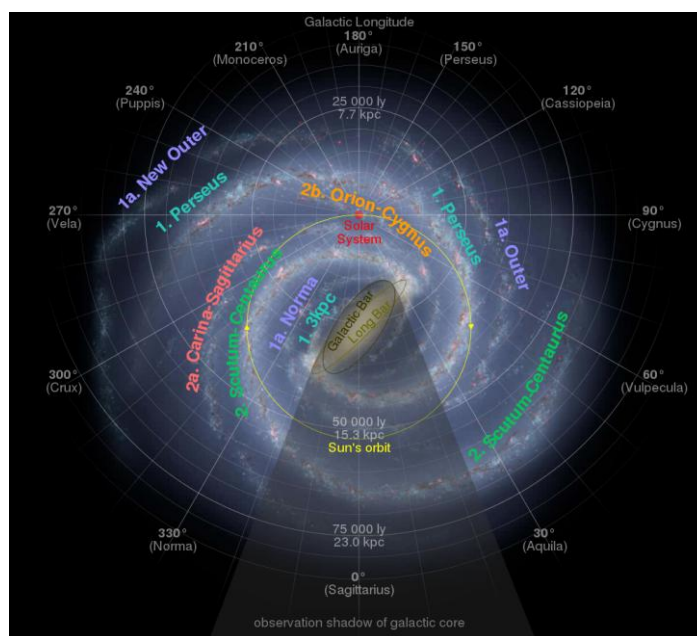
ATIVIDADES

1. Um motor de carro gira a 3600 rpm.

a) Qual é a sua frequência em Hertz?

b) Qual é o seu período de rotação, em segundos?

2. O Sistema Solar como um todo gira em torno do núcleo da galáxia onde estamos localizados, a Via Láctea. Diz-se que a cada 225 milhões de anos, completa-se uma volta. Considerando que o Sistema Solar dista cerca de 27 000 anos/luz do centro da galáxia e que um ano/luz equivale a aproximadamente 10 trilhões de quilômetros, qual é a velocidade linear com que o sistema solar se move?



3. O planeta Mercúrio efetua uma volta em torno do Sol em 88 dias (isto é, um ano em Mercúrio é igual a 88 dias terrestres). Determine seu período em segundos e em anos terrestres, assim como sua frequência.



AULA 29

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO



esta aula, encerraremos nossos estudos concernentes aos diferentes movimentos circulares. Faremos isto estudando um movimento circular mais complexo do que o anterior: o movimento circular uniformemente variado.

Nesse tipo de movimento, temos, além da aceleração centrípeta que constantemente desvia o movimento, fazendo-o ser circular, uma aceleração tangencial, que faz o objeto girar cada vez mais rápido. Como ele gira cada vez mais rápido, sua aceleração centrípeta, que é dada por $\vec{a}_c = \frac{v^2}{R}$, aumenta cada vez mais, pois é dependente da velocidade. A aceleração “linear” total é a soma vetorial da aceleração centrípeta pela aceleração tangencial.

Estamos falando de um movimento uniformemente variado, o que quer dizer que a aceleração angular é constante e diferente de zero. Como a aceleração angular é constante, a velocidade angular varia linearmente no tempo, ou seja

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Como a velocidade angular é linear com o tempo e com a aceleração, podemos encontrar o deslocamento encontrando a área debaixo da curva da velocidade angular como função do tempo.

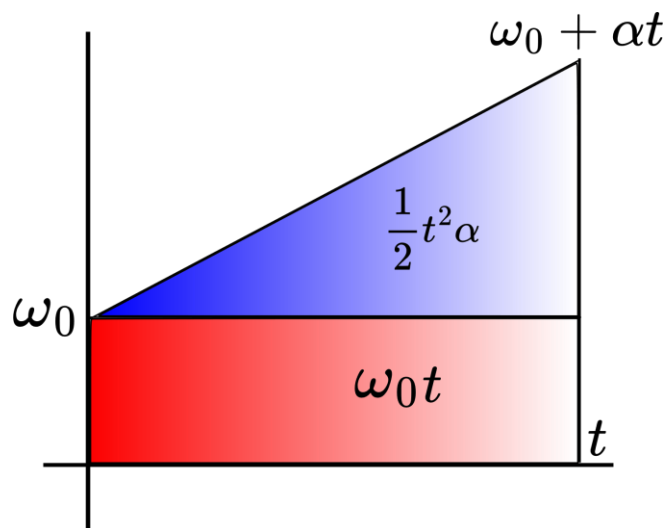


Figura esquemática descrevendo a área sob a curva relativa à função da velocidade angular com o tempo.

Essa curva é um triângulo de base t (se partirmos do ponto $t_0 = 0$) e altura αt . Isso nos dá, considerando que a área do triângulo é a base vezes a altura divididos por 2:

$$\alpha t \times \frac{t}{2} = \alpha t^2 / 2$$

Somado, evidentemente, com a área do retângulo relativo ao termo linear ω_0 (que dá $\omega_0 t$) e ao termo constante φ_0 . Isso nos leva à seguinte equação, análoga à equação para movimentos lineares uniformemente variados:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \alpha t^2 / 2$$

Nesse sistema, cada componente da aceleração é responsável por uma coisa: a aceleração tangencial serve para aumentar a velocidade angular do sistema, enquanto a aceleração centrípeta serve para curvar a velocidade linear, fazendo-a dar origem a um deslocamento que percorra um círculo.

Para bem compreendermos esse tipo de movimento, visualizemos alguns exemplos.

Exemplo 1: As hélices de um ventilador desligado estão paradas. Se nós o ligamos, ele acelera de modo uniforme, girando à 300 rpm após 5 segundos.

- Qual é a sua velocidade angular após 5 segundos?
- Quantas voltas completas deu a hélice do ventilador ao longo desses 5 segundos?
- Se a hélice possui 12 cm de raio, qual é o valor da velocidade linear da extremidade da hélice quando $t = 3$ segundos?



Resolução: A velocidade angular se relaciona com a frequência por um fator de 2π , a saber

$$\omega = 2\pi f \rightarrow 2\pi \times 300 = 600\pi \approx 1885 \text{ rad/min}$$

Para sabermos quantas voltas completas ele deu nesses 5 segundos, precisaremos da equação horária do movimento circular uniformemente variado:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Entretanto, não temos α ! Para calcular α , notamos que, como a aceleração é constante e a hélice parte do repouso, temos:

$$\omega = \alpha t \rightarrow \alpha = \frac{\omega}{t}$$

É conveniente, para entrarmos no SI e não termos incompatibilidade entre as unidades de tempo utilizadas, transformar a velocidade angular de radianos por minuto para radianos por segundo:

$$600 \pi \frac{\text{rad}}{\text{min}} \cdot \frac{1}{60} \frac{\text{min}}{\text{s}} = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 31,415 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Com isso, podemos utilizar a equação para α para encontrá-lo:

$$\alpha = \frac{10\pi}{5} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \approx 6,28 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Assim, podemos usar a equação horária:

$$\theta = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 5^2 = 25\pi \text{ rad} \approx \frac{25\pi}{2\pi} = 12,5 \text{ voltas}$$

Descobrimos a tão desejada quantidade de voltas.

Para encontrarmos a velocidade **linear** após 3 segundos, basta vermos qual é a velocidade angular neste instante:

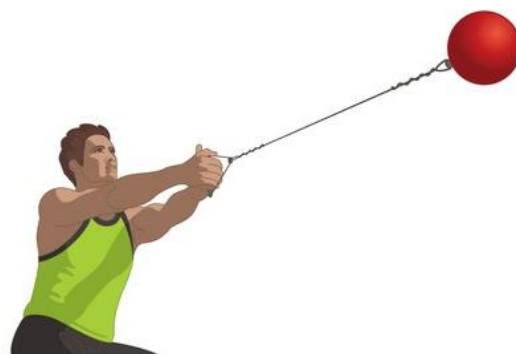
$$\omega = \alpha t = 2\pi \cdot 3 = 6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

E, como $v = R\omega$, temos

$$v = 6\pi \cdot 0,12 = 0,72\pi \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Exemplo 2: Arremesso de martelo

O arremesso de martelo é um curioso esporte olímpico, no qual o arremessador sai de repouso e começa a girar o “martelo” (que é, na verdade, um conjunto que une uma haste de metal à uma bola de ferro de 7,26 kg), até que este atinja a máxima velocidade angular. Quando isso acontece (o que demora por volta de 5 segundos), o martelo é arremessado. As melhores marcas correspondem a arremessos de 80 metros de distância. Considerando que, no momento do arremesso, o martelo está à uma altura de 1,7 m, e considerando que ele é arremessado em um ângulo de 45°, responda, usando $g = 10 \text{ m/s}^2$



- Qual é a velocidade linear do martelo para que ele atinja a distância de 75 metros?
- Qual deve ser a velocidade angular do martelo para tal arremesso, considerando que o raio de giro é de 1 metro?
- Qual é a frequência de rotação do martelo?
- Qual deve ser a aceleração angular, considerando que ele gasta 5 segundos para acelerar até a velocidade angular calculada em b) e que a aceleração é uniforme?

Resolução: Esse é um problema complexo, que engloba várias áreas da física. Aqui, há uma união entre lançamento de projéteis e movimento circular uniformemente acelerado.

Usando fórmulas prontas, sabemos que a distância em que chega um projétil é dada por:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2p$$

Sendo p o ângulo de arremesso. Como $p = 45^\circ$, o dobro disso é 90° , e $\sin 90^\circ = 1$. Desse modo, temos:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \rightarrow v_0 = \sqrt{gx_{max}} = \sqrt{10 \cdot 75} \approx 27,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para achar a velocidade angular, basta dividirmos a velocidade linear pelo raio de giro:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{27,4}{1} = 27,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

E, dada a velocidade angular, podemos achar a frequência dividindo-a por 2π :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{27,4}{2\pi} \approx 4,36 \text{ Hertz}$$

E, por fim, podemos calcular a aceleração angular dividindo a velocidade angular pelo tempo gasto para chegarmos em tal velocidade:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{27,4}{5} = 5,48 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Com isso, ilustramos suficientemente a questão do movimento circular uniformemente acelerado. Agora, é a sua vez!

ATIVIDADES

1. Uma pequena bolinha, que pode ser considerada um ponto material, parte de repouso e gira de modo tal que a circunferência que ela percorre tem 70 cm. O movimento é circular uniformemente variado, e a aceleração linear é de 2 m/s^2 .

- Qual é a aceleração angular?
- Qual é a velocidade angular após 5 segundos?
- Qual é a velocidade linear após 10 segundos?

2. Um objeto é girado por uma pessoa, com movimento circular uniformemente acelerado. Ele parte do repouso e, após um segundo, está girando a 60 rpm. A aceleração continua até a velocidade linear atingir 60 km/h, que é o momento no qual ele sai voando. Considerando que o raio de giro é de 1 metro, qual é o instante no qual o objeto voa?

3. Um objeto parte do repouso e atinge velocidade angular de 1800 rad/s em um intervalo de 20 segundos.

- Qual é a sua aceleração angular?
- Qual é sua aceleração centrípeta em $t = 20$ segundos?



AULA 34

A SEGUNDA LEI DE NEWTON – PARTE 2



Podemos classificar os tipos de força segundo o modo pela qual elas são exercidas. Existem as chamadas **forças de contato**, que são transmitidas de um objeto para outro por meio do contato (o nome já diz) e as **forças de campo**, que são transmitidas à distância de um corpo para outro.

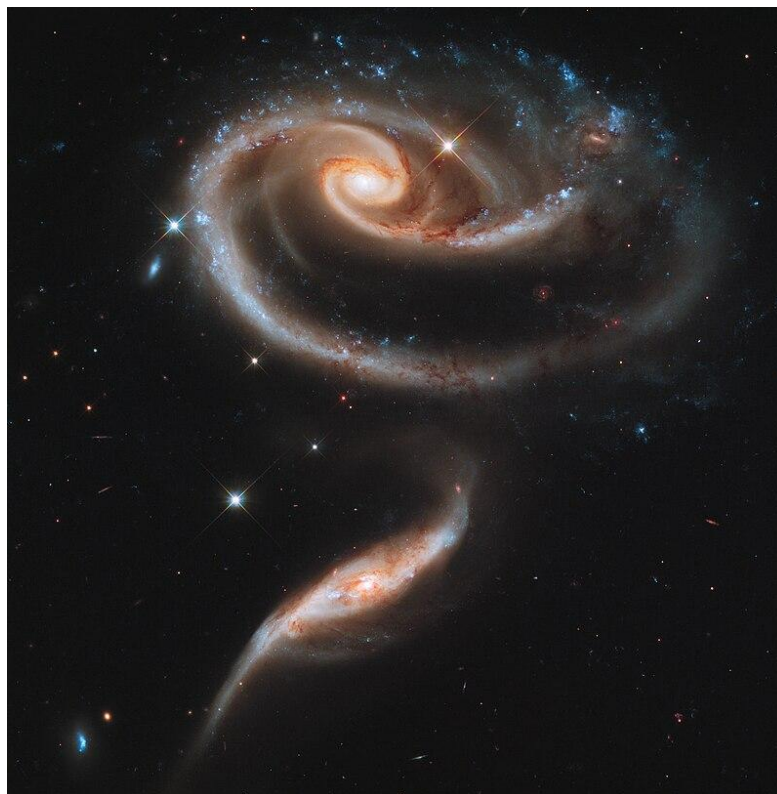
As forças de contato são mais intuitivas. Elas aparecem, por exemplo, quando ajudamos alguém empurrando um carro com nossas mãos, ou quando arrastamos um móvel. Se pressionarmos um determinado objeto contra a parede, também temos aí forças de contato: uma entre nós e o objeto, outra entre o objeto e a parede. De igual modo, se um objeto se encontra no chão ou sobre uma mesa, por exemplo, existe aí uma força de contato entre esses objetos (a força-peso do objeto age sobre a superfície que o sustenta!).

As forças de campo são mais “estranhas”, pois envolvem um conceito que o próprio Newton chamava de “fantasmagórico” – é a chamada “ação à distância”. Do ponto de vista da formalização dada pela Física moderna, os objetos criam “campos” ao redor de si. Talvez o campo mais conhecido seja o **campo gravitacional**, que é gerado por todos os objetos que possuem massa. Se considerarmos dois objetos de mesma massa, o objeto mais distante de nós produzirá, por meio desse campo, uma força gravitacional menor do que o objeto mais próximo. Ademais, se dois objetos estiverem a uma mesma distância, mais um for mais massivo do que o outro, a força gravitacional produzida pelo objeto mais massivo será maior.

O campo gravitacional é um campo relativamente fraco, de modo que o efeito do campo gravitacional de objetos do cotidiano, como pessoas, carros e árvores, é tão insignificante que nada sentimos. É preciso um objeto com massa gigantesca (como um planeta) para que a aceleração gravitacional produzida pela força gravitacional (que é produzida pelo campo) seja relevante para nós. É essa força que nos prende ao chão e que faz com que a Lua gire em torno da Terra, ou a Terra em torno do Sol, ou o Sistema Solar todo em torno do centro da Via Láctea.

Pode-se definir a força gravitacional, consequência do campo gravitacional, como uma **potência passiva** (potencialidade que algo tem de “sofrer” algo que nele provoque mudanças), apetite natural dos corpos, que consiste no **apetite para incorporar os corpos próximos**. Uma bela definição filosófica para a força gravitacional! Esse campo, que produz

essa força, é considerado, dentro do panorama da Física moderna, uma das **quatro forças fundamentais**⁵ que dão origem à todas as outras forças.



Dois galáxias se atraindo e se distorcendo devido à força gravitacional

Outro campo famoso que também produz uma das quatro forças fundamentais da natureza, é o chamado “campo eletromagnético”. Ele tem a ver, simultaneamente, com a radiação (de modo especial, com a luz), com a atração entre ímãs, com a geração de energia elétrica e com a atração de um bastão de plástico à pedaços de papel após este bastão ter sido esfregado em uma superfície com pelos. A força eletromagnética (e suas subdivisões: força elétrica, força magnética, etc.) depende uma grandeza chamada **carga elétrica**, que é para a força elétrica o que a massa é para a força gravitacional. A diferença é que existem dois tipos de carga elétrica: a positiva e a negativa. Cargas diferentes se atraem (e, nesse caso, a força é idêntica à gravitacional) e cargas iguais se repelem, afastando-se uma da outra.

Todos nós temos **átomos** como causa material: os átomos são os objetos dois quais “somos feitos”, e eles são enformados pela nossa causa forma, nossa forma substancial, que, no nosso caso, é a alma humana. Esses átomos, que são muito pequenos (medem cerca de um Angstrom, ou cerca de 100 picômetros: um décimo de milionésimo de um milímetro), são constituídos por um núcleo atômico (que tem carga positiva) de raio minúsculo (da ordem de um femtômetro: um centésimo de milésimo do tamanho do átomo) e uma nuvem de elétrons. Os elétrons, por serem partículas muito leves, gostam de espaço. Elas também possuem carga elétrica negativa. Quando aproximamos um átomo do outro, estamos aproximando, no final das contas, suas nuvens eletrônicas. Entretanto, a partir de certo ponto,

⁵ A teoria das quatro forças fundamentais diz que tudo no universo é regido por quatro forças, a saber: força gravitacional, força eletromagnética, força nuclear forte e força nuclear fraca.

se torna necessária uma grande energia para aproximar mais os átomos: as nuvens eletrônicas começam a se repelir. Isso acontece por dois motivos:

Cargas negativas se repelem e essa repulsão depende da distância – ela é tanto maior quanto menor for a distância. Se eles se aproximarem demais, a repulsão será muito forte.

Os elétrons se espalham em uma nuvem. Se há a intersecção de duas nuvens, os elétrons de uma não podem ter a mesma energia (a rigor, o mesmo número atômico) dos elétrons da outra nuvem. Isso faz com que, ao aproximar uma nuvem da outra, os elétrons tenham que ir para níveis de energia mais altos, para que não haja coincidência de energia entre os elétrons de uma nuvem e os elétrons da outra. Fazer isso custa energia.

É isso que está por trás da solidez dos objetos! A “solidez”, a “concretude” física dos objetos é uma propriedade que emerge da repulsão entre os elétrons que circundam os núcleos atômicos. Desse modo, a própria consistência do mundo que nos rodeia depende diretamente das forças eletromagnéticas.

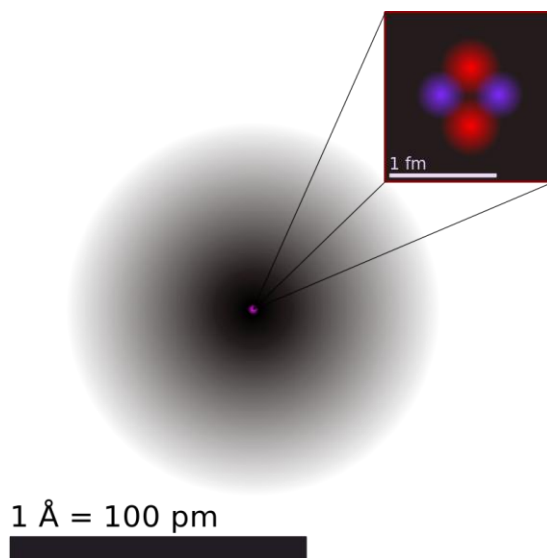


Figura esquemática que representa um átomo de Hélio: um pequeno núcleo de dois prótons (carga positiva unitária) e dois nêutrons (carga neutra), circundado por uma nuvem constituída por dois elétrons (carga negativa unitária).

Existem outros dois campos que geram forças fundamentais, chamadas “força nuclear fraca”, que tem a ver com um fenômeno chamado de “decaimento beta”, e a “força nuclear forte”, que mantém o núcleo atômico e as partículas subatômicas coesas. Essas forças são muito complicadas, de modo que não falaremos mais delas por ora.

Todas as forças que conhecemos, que vemos em nosso cotidiano ou que regem os acontecimentos astronômicos, são derivadas dessas quatro forças fundamentais. Uma esmagadora maioria dessas forças derivadas vêm ou da força gravitacional ou, principalmente, da força eletromagnética.

Se formos falar de **unidades** de medida de força, a mais comum é o Newton, que representa a força resultante necessária para imprimir a aceleração de 1 m/s^2 a um corpo de 1 quilograma. Essa é a unidade padrão de força segundo o Sistema Internacional de Unidades.

Já no padrão CGS (centímetro-grama-segundo), a unidade de força é o **dina** (cuja origem etimológica é a palavra “dynamis” (δυναμικός) e cujo símbolo é “dyn”), que significa

“poder, poderoso”, e que dá origem à palavras como “dinâmica” (estudo do movimento local segundo suas causas) e “dinamite” (tipo de explosivo). Embora o nome tenha uma etimologia que remete à coisas grandiosas, seu valor é bem pequeno, expressando a força necessária para imprimir uma aceleração de 1 cm/s^2 a um objeto de um grama.

Ora, um Newton imprime uma aceleração $100 = 10^2$ vezes maior a um corpo $1000 = 10^3$ vezes mais pesado. Isso implica que:

$$1 \text{ N} = 10^2 \cdot 10^3 \text{ dyn} = 10^5 \text{ dyn}$$

Uma outra unidade de força bastante famosa é o “quilograma-força”. Essa força é definida como a força com a qual a Terra atrai um corpo de um quilograma que se encontra à 45° de latitude e ao nível do mar. Essa força é, então, o produto da aceleração gravitacional nessas localidades pela massa do objeto, que é um quilograma. Como a aceleração $g \approx 9,80665 \text{ m/s}^2$ nessa altitude e latitude, um quilograma-força é aproximadamente 9,80665 Newtons.

Claro que, para fins práticos, podemos usar $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, que é um valor que serve de aproximação para a gravidade em qualquer ponto do globo terrestre.

ATIVIDADES

1. Um objeto de 3,5 kg é empurrado, com força de 7 quilogramas-força, por 3 segundos. Se ele parte do repouso, que velocidade atinge?

2. Um levantador de peso olímpico da categoria superpesado consegue mover, no exercício chamado de “arranque” ou “snatch”, 200 quilogramas, jogando tal peso a uma altura de 1,80 m em 2 segundos. Considere que o movimento da barra é, ao longo dessa trajetória, retilíneo e uniformemente acelerado. Qual é a força que ele exerce nesse peso ao longo do arranque? Qual é o valor dessa força em dinas?

3. A força gravitacional, considerando pontos materiais, é proporcional à massa dos corpos que se atraem e é inversamente proporcional ao **quadrado** da distância que as separa. Considere dois corpos, que se atraem gravitacionalmente com uma força F . O que acontece com essa força F se eu:

- a) Troco um dos corpos por um corpo de massa 3 vezes maior?
- b) Diminuo a distância dos dois corpos pela metade?
- c) Troco um dos corpos por um corpo de massa 4 vezes maior e dobro a distância entre eles?



AULA 38

ARRASTO HIDRODINÂMICO



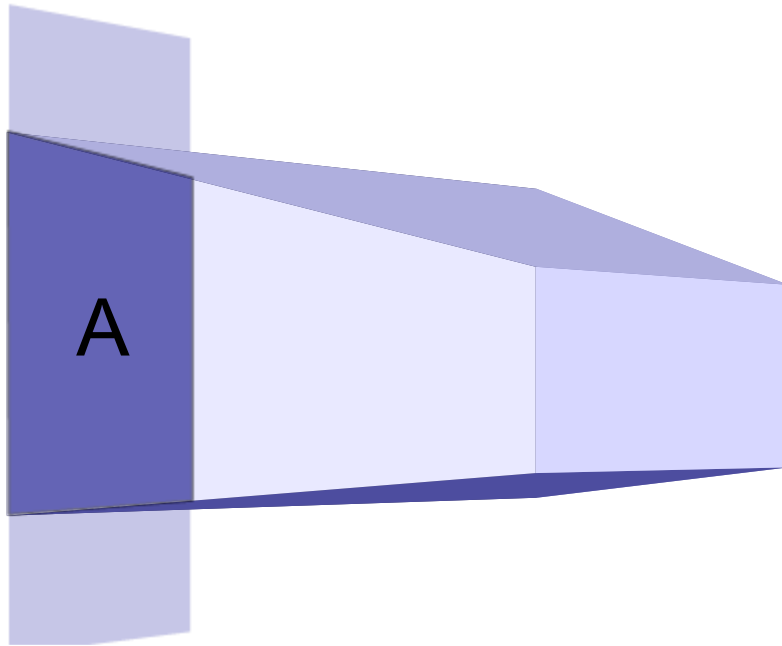
esta aula, continuaremos falando de “atrito”, mas não mais do atrito entre superfícies. De modo mais específico: o que é que faz com que uma folha de papel caia mais devagar do que uma bolota de chumbo? Aristóteles postulava que isso se devia ao fato de coisas pesadas (ou densas) caírem mais rápido. Isso realmente ocorre, mas não por uma propriedade intrínseca da coisa mais pesada. De acordo com a Segunda Lei de Newton, a massa vezes a aceleração de um objeto é proporcional à força que age sobre ele. Na ausência de quaisquer outras forças agindo, isso nos dá

$$F = -mg = ma \rightarrow a = -g$$

Ou seja, independentemente da massa do objeto, a aceleração deste será proporcional à $-g$, sendo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Por que, então, observamos a folha de papel caindo tão lentamente? Isso se dá porque, em um corpo em queda livre, a gravidade não é a única força agindo: há também o chamado **arrasto hidrodinâmico**, que é a famosa “resistência do ar”, o atrito do ar com os objetos. Essa força, bastante complexa, depende de vários fatores. A fórmula mais comum que a modela é

$$R = \frac{1}{2} \rho_{ar} A C_x v^2$$

Nessa fórmula, ρ_{ar} representa a densidade do ar (que varia, por exemplo, com a altitude), A representa a maior área de secção transversal do objeto, C_x é o chamado “coeficiente de arrasto aerodinâmico”, que é um número que dita o quanto o objeto “corta” o ar, o quanto ele é aerodinâmico (quanto menor, melhor) e v^2 é a velocidade ao quadrado. A maior área de secção transversal de um objeto pode ser calculada do seguinte modo: se um objeto se movimenta para a frente, o plano **perpendicular** ao movimento é o plano que vem de cima para baixo. Esse plano “corta” o objeto. A maior intersecção possível entre o plano e o objeto é a área de secção transversal.



Se o objeto acima estiver se movimentando para a direita, a sua maior área de seção transversal será dada por A. O plano que corta essa figura é perpendicular ao movimento.

Notemos o seguinte. Quando o objeto está, por exemplo, em queda livre, sua velocidade aumenta cada vez mais (segundo a lei da gravidade, que faz o objeto ganhar praticamente 10 m/s a cada segundo). Entretanto, quanto maior for a velocidade, maior será a força de arrasto hidrodinâmico, pois ela depende do quadrado da velocidade. Chegará um ponto em que a força gravitacional será equilibrada pela força de arrasto, de modo que o objeto não mais acelerará. Podemos estimar essa velocidade do seguinte modo:

$$F = P - R$$

$$F = mg - \frac{1}{2}kv^2$$

Onde $k = \frac{1}{2}C_x\rho A$.

A velocidade limite será, então, aquela na qual a força que age sobre o objeto se anula. Deste modo, temos de tomar $F = 0$ na equação acima:

$$0 = mg - \frac{1}{2}kv^2$$

$$mg = \frac{1}{2}kv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{k}}$$

Agora, partamos para a compreensão do porquê um objeto leve e com grande área superficial, como uma folha de papel, cai mais devagar que uma bola de cimento. A massa do objeto é, por definição, igual a seu volume multiplicado pela sua densidade:

$$m = \rho V$$

Por outro lado, a constante k de arrasto hidrodinâmico depende, entre outras coisas, da área de secção transversal do objeto.

$$k \propto A$$

Podemos escrever o volume como a área de secção transversal multiplicada pelo comprimento “característico” l do objeto (que é o comprimento do objeto medido no sentido do movimento – no caso de um míssil, por exemplo, seria a medida da cauda até a ponta deste), ou seja:

$$V = Al$$

Na fórmula para velocidade de equilíbrio, na qual o objeto não acelera mais (velocidade terminal), temos $\frac{m}{k}$:

$$\frac{m}{k} \propto \rho \frac{Al}{A} \propto \rho l$$

E a velocidade fica:

$$v = \sqrt{2\rho l g}$$

Quando temos uma bola de chumbo, seu comprimento característico é da ordem de seu raio r . Se eu pego uma folha de papel, o comprimento característico é sua espessura (pois o movimento é pra baixo – se eu meço o comprimento de cima para baixo, tenho o comprimento característico). A espessura de uma folha de papel é mínima, de modo que a velocidade terminal do papel é baixa. Objetos de comprimento característico maior e de densidade maior têm, em geral, maiores velocidades terminais.

Exemplo 1: Calcule a velocidade terminal de:

- 1) Uma folha de papel sulfite A_4 , de área $0,062 \text{ m}^2$, tem espessura $d = 0,05 \text{ mm}$. Sua densidade é tal que um metro cúbico de papel pesa 1500 quilos (1500 kg/m^3).
- 2) Uma bola sólida de chumbo, de raio 10 cm e densidade $11\,400 \text{ kg/m}^3$.

Resolução: Para estimarmos a velocidade terminal, basta-nos o comprimento característico e a densidade. No caso 1, temos

$$v = \sqrt{2\rho l g} = \sqrt{2 \cdot 1500 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 9,8} \approx 1,21 \text{ m/s}$$

No caso 2, temos

$$v = \sqrt{2\rho l g} = \sqrt{2 \cdot 11400 \cdot 0,1 \cdot 9,8} \approx 149 \text{ m/s}$$

Mais de 100 vezes mais!

Uma grandeza que depende apenas de uma área, mas do formato do material como um todo, é o coeficiente de arrasto hidrodinâmico C_x . Esse coeficiente, que mede a “aerodinâmica” do material, depende do quanto o objeto deixa o ar “deslizar” por ele. Um ônibus, que é basicamente um cilindro em movimento, segura bastante o ar. Um carro mais baixo, de linhas pontiagudas e afuniladas, deixa o ar passar melhor, diminuindo o coeficiente

C_x . No desenvolvimento de aviões e automóveis, é essencial tentar minimizar esse coeficiente, para aumentar a eficiência do veículo. Com um coeficiente menor, o objeto acelera mais rápido, com uso menor de combustível. Para medir esse coeficiente, usa-se um sistema chamado de “túnel de vento”, que consiste em um recinto no qual o objeto (em geral, uma miniatura do veículo real) é colocado. Sopra-se, então, sobre este objeto, um forte vento, o que reproduz as condições do veículo em movimento. Por meio de diversos sensores e medidores, mede-se a intensidade e a direção das forças provocadas pelo vento neste veículo, o que permite estimar o coeficiente aerodinâmico dele. Se este coeficiente for ruim, procuram-se meios de tornar o veículo mais aerodinâmico, de modo a sofrer menos a ação do ar.

O túnel de vento foi inventado pelos irmãos Wright, que foram os primeiros a colocar um avião para voar (usando catapultas – o primeiro avião que decolou com motor de propulsão própria foi criado pelo brasileiro Santos Dumont três anos depois). Esse túnel de vento não é, hoje em dia, utilizado apenas para testar veículos, senão que é utilizado também para testar o efeito do vento em torres de alta tensão, prédios, casas, pontes, etc.



Túnel de vento da NASA, onde a aerodinâmica de uma miniatura do avião MD-11 estava sendo testada.

A resistência do ar também permite a existência dos **paraquedas**, dispositivo que, embora tenha sido inventado no fim do século XVIII, foi essencial para salvar a vida de muitos aviadores nas duas Grandes Guerras. Embora o salto de paraquedas por mera diversão seja, sem muitas dúvidas, imoral (já que a pessoa se coloca sob um risco desnecessário de morrer para ganhar em troca fortes emoções), há situações em que ele é necessário, como as já citadas situações de guerra, em situações de salvamento de pessoas presas em locais remotos, em treinamentos militares, etc. Ele funciona aumentando consideravelmente a área de secção transversal da pessoa que cai (embora seja também utilizado para frear objetos em alta velocidade, como dragsters ou câmeras que são elevadas até a estratosfera por balões). Uma pessoa em queda livre tem velocidade terminal, considerando que ela está maximizando o arrasto caindo de braços abertos e “de barriga”, de 112 km/h. Se o paraquedas abre, sua velocidade terminal cai para 27 km/h (ela desce de 112 km/h para 27 km/h em um

movimento retardado). Essa velocidade final não é baixa, sendo ainda possível se machucar batendo no chão com essa velocidade, mas pessoas treinadas conseguem cair sem lesões. À 112 km/h, a pessoa certamente sofreria contusões graves e danos aos órgãos internos, levando à morte.



Militares paraquedistas em um treinamento

ATIVIDADES

1. Um homem e seu paraquedas de massa total de 110 quilos. A força de resistência do ar tem intensidade $R = kv^2$, com $k = 44 \text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2$. Tome $g = 10 \text{ m/s}^2$. Qual será sua velocidade terminal?

2. Um automóvel pesa 900 quilos e se desloca em linha reta. A força máxima que o motor desse carro pode executar é de 1800 Newtons. Desconsiderando o atrito com o solo, e considerando $R = 1,2v^2$, qual é a velocidade máxima que esse carro pode atingir?

3. Quando estamos na metrópole mais alta do mundo, La Paz (3800 metros acima do nível do mar), a densidade do ar é 86% da densidade do ar ao nível do mar. Qual é a razão entre a velocidade terminal de um objeto nesta cidade pela velocidade terminal de um objeto ao nível do mar? Considere que a única diferença entre essas situações seja a altitude.



AULA 41

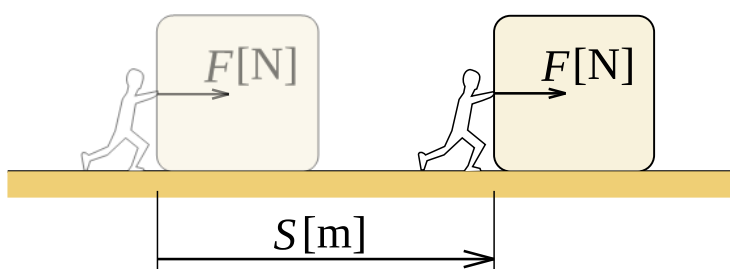
O TRABALHO



gora que terminamos de expor as leis básicas da dinâmica dos corpos, entraremos no mérito de entender certas quantidades, certas grandezas que se **conservam** no contexto de um movimento mecânico. Para chegarmos até este ponto, é pertinente introduzirmos uma nova grandeza física, denominada **trabalho**. Essa grandeza está sempre associada a uma força, ou seja, objetos não realizam trabalho: forças realizam. O trabalho que uma força realiza é proporcional à sua intensidade e ao **deslocamento** provocado por ela.

Fica claro que, na física teórica moderna, muitos termos que possuem um determinado significado no uso corrente assumem outro significado. Toda área de conhecimento usa de termos técnicos para poder descrever com mais precisão determinadas realidades ou fenômenos. A palavra “trabalho”, no uso corrente, expressa o conjunto de atividades realizadas por alguém para alcançar um determinado fim ou propósito. Também, em linguagem figurada, pode expressar algo árduo (tal coisa dá trabalho). Nas falsas religiões africanas, este termo é utilizado para designar uma oferenda feita aos ídolos aos quais eles adoram (só há uma religião verdadeira – a católica). Na medicina, “trabalho” expressa o processo orgânico de recuperação realizado no interior de tecidos, como a cicatrização, por exemplo. Na física, trabalho é o produto da força, pelo deslocamento por ela provocado e pelo cosseno do ângulo entre os dois. Se a atividade laboral de alguém envolver empurrar caixas por aí, ele realizará trabalho no sentido corrente e também no sentido utilizado pela física. Isso não se pode dizer de quem trabalha em uma cadeira de escritório, preenchendo planilhas.

Em um primeiro momento, consideremos o cálculo do trabalho no caso mais simples, a saber, analisemos o trabalho realizado por uma força constante paralela à um determinado deslocamento. Para tal, considere um corpo que parte de um ponto *A* e chega até o ponto *B*, empurrado por uma força que tenha exatamente o mesmo sentido do deslocamento.



Nesse caso, o trabalho dessa força F que age sobre este objeto é:

$$W = F \cdot S$$

$$S = |\overrightarrow{AB}|$$

Se a força estiver na mesma direção do objeto, mas com sentido oposto, o trabalho é negativo:

$$W = -F \cdot S$$

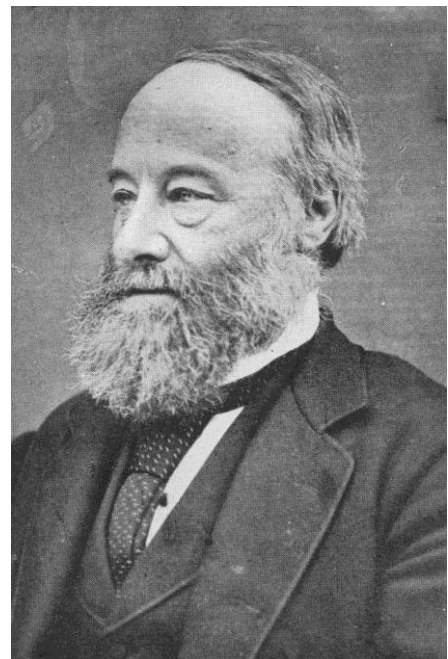
Isso nos leva a distinguir dois tipos de trabalho, um relativo à cada expressão para trabalho exposta acima. Chamamos de trabalho **motor** aquele tipo de trabalho que uma força realiza ao mover, ao deslocar um determinado objeto. É o caso no qual a força possui mesma direção e mesmo sentido que o deslocamento. Chamamos, por outro, lado de trabalho **resistente** aquele trabalho realizado por uma força que se opõe ao movimento, que possui mesma direção que o movimento, mas sentido oposto. Neste caso, o trabalho é negativo.

Exemplifiquemos: se uma pessoa empurra uma caixa, movimentando-a para a frente, a força que a pessoa realiza na caixa realiza um trabalho motor. A força de atrito, que se opõe à força exercida pelo sujeito que a empurra, realiza um trabalho resistente.

Um outro exemplo: se solto uma bolinha para que ela caia livremente, acelerada pela força gravitacional, a força gravitacional realiza nela um trabalho motor. Se eu, entretanto, jogo a bolinha para cima, a mesma força gravitacional realiza um trabalho resistente, ao menos até a velocidade da bolinha se anular e ela começar a cair.

Em resumo, podemos dizer que, primeiro, o trabalho é sempre realizado por uma força. Segundo, o trabalho é realizado quando há deslocamento – se o deslocamento for nulo, o trabalho também o é. Terceiro, o trabalho é um número seguido de unidade, não tem direção ou sentido: em outras palavras, ele é uma grandeza escalar. Quarto, ele depende do referencial – se alguém empurrar uma caixa e eu andar junto com esse alguém, acompanhando o movimento da caixa, meu **movimento relativo** com relação à caixa será nulo, de sorte que, no referencial que me acompanha, não houve deslocamento, e portanto, não houve trabalho. Um quinto ponto é que o trabalho pode ser designado por motor ou resistente, dependendo do ângulo entre a força o deslocamento. Se o ângulo for de 0° , o trabalho é motor, se for de 180° , é resistente.

O trabalho, de per se, só irá demonstrar sua relevância física quando o conceito de **energia cinética** for introduzido. Entretanto, a capacidade de realizar trabalho rápido, de se realizar trabalho no menor tempo possível, é o que define a **potência** de uma determinada máquina. Deste modo, é importante que o aluno não perca a motivação ao se deparar com conceito tão abstrato – aprendamos a manipulá-lo, para que depois nós o utilizemos em contextos mais interessantes.



James Prescott Joule

Para concluir a parte teórica da aula, é útil falarmos de unidades: considerando que o trabalho é o produto da força pela distância percorrida, a unidade de trabalho é Newtons vezes metro, já que o Newton é a unidade padrão de força e o metro é a unidade padrão de comprimento, de deslocamento. A esse produto de Newtons por metro, damos o nome de **Joule**, em homenagem ao físico britânico ilustrado na imagem anterior: James Prescott Joule (1818-1889), que foi um dos descobridores da lei da conservação de energia (que estudaremos em breve!) e que trouxe grandes contribuições na área da termodinâmica, assim como algumas contribuições na área do eletromagnetismo.

Exemplo 1: Um homem empurra um objeto por 10 metros, exercendo sobre ele uma força de 15 Newtons. A força e o deslocamento são paralelos. Qual foi o trabalho realizado?

Resolução: Para calcularmos o trabalho, basta multiplicar a força pelo deslocamento.

$$W = F \cdot d = 15 \cdot 10 = 150 \text{ J}$$

O trabalho executado por essa força é de 150 Joules!

Exemplo 2: Um soldado (figura abaixo) empurra um trenó de treino, com velocidade constante, por 20 metros. Considerando que o coeficiente de atrito dinâmico do trenó com o chão é de 0,3, qual é o trabalho realizado pelo soldado? Use $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Resolução: Se olharmos para o enunciado, percebemos que a força realizada pelo soldado não é dada diretamente, senão que é dada de modo indireto. Podemos calcular a força lendo com atenção o enunciado. O primeiro fato ali descrito é que o trenó se move com velocidade constante. Ora, se a velocidade é constante, quer dizer que sobre ele não atua força alguma. O deslocamento é zero, então? Não: há também a força de atrito – a composição dessas duas

forças é que é nula, de modo que, assim, sabemos que a força exercida pelo soldado é exatamente igual à força de atrito.

A força de atrito pode ser calculada fazendo o produto do coeficiente de atrito dinâmico pela força normal. A força normal é, em superfícies planas e sem ação de outras forças verticais, o produto da massa pela aceleração gravitacional. Dado tudo isso, calculemos, começando pela força de atrito:

$$f_{at} = \mu_d mg = 0,3 \cdot 50 \cdot 10 = 150 \text{ N}$$

Assim, sabemos que, dada a aceleração nula, a força de atrito é igual em módulo à f_{at} . Com isso, podemos calcular o trabalho.

$$W = Fd = 150 \cdot 20 = 3000 \text{ J}$$

Note que, se quiséssemos calcular o trabalho executado, não pelo soldado, mas pela força de atrito, teríamos um trabalho resistente de magnitude exatamente igual ao trabalho motor exercido pelo soldado, a saber

$$W_{at} = -3000 \text{ J}$$

Com isso, passemos para os exercícios.

ATIVIDADES

1. Um homem puxa uma caixa utilizando uma corda. A força produzida pelo homem é de 334 Newtons e o deslocamento total é de 17 metros. Qual é o trabalho realizado pelo homem?

2. Uma caminhonete puxa um trailer de 1 tonelada por 5 quilômetros. O coeficiente de atrito dinâmico das rodas com o asfalto é de 0,6. A velocidade é mantida constante ao longo do trajeto. Qual é o trabalho realizado pela força que a caminhonete faz no trailer?

3. Em uma superfície sem atrito, uma força constante desloca um objeto de massa $m = 8 \text{ kg}$ por uma distância de 48 metros. Esse movimento é realizado em 4 segundos.

- Qual é a velocidade média do objeto nesse trajeto?
- Qual é a sua aceleração?
- Qual é a força, em Newtons, realizada no objeto?
- Qual é o trabalho total realizado por essa força?



AULA 46

ENERGIA POTENCIAL



esta aula, falaremos de uma forma de energia que é como que a contrapartida da energia cinética no contexto de mecânica: a energia potencial. Do que se trata? Busquemos uma motivação olhando para o trabalho realizado por algumas forças bem específicas.

Se alguém pega um objeto, o levanta, aumentando sua altura em h . O trabalho feito pela força gravitacional, neste caso, é um trabalho resistente que vale:

$$W = -mgh$$

Se esse corpo for solto, ele cairá, e a força gravitacional será então paralela ao deslocamento do objeto: teremos um trabalho motor de magnitude igual ao trabalho resistente avaliado anteriormente:

$$W = mgh$$

Se alguém pegar uma mola (na qual uma extremidade está presa a uma parede) e a pressionar, mudando seu comprimento para x , essa mola irá realizar um trabalho resistente proporcional à variação de seu comprimento com relação ao comprimento relaxado x_0 :

$$W = -k(x - x_0)^2/2$$

Se essa mola for solta, ela vai esticar: o trabalho que ela realizará será, portanto, motor, e seu valor será:

$$W = \frac{k(x - x_0)^2}{2}$$

Assim, o trabalho líquido total realizado por essas forças só depende do ponto inicial e final. Se eu levantar um objeto e depois voltá-lo ao mesmo ponto, o trabalho líquido realizado pela força gravitacional será nulo. O mesmo vale para a força de mola. Forças assim são chamadas **conservativas**, em contraposição ao que ocorre na força de atrito, que sempre realiza trabalho resistente, e esse trabalho dependerá da trajetória.

A grande ideia aqui é que as forças conservativas podem ser expressas como a variação de um **potencial**. É possível descrever isso de modo matematicamente mais preciso fazendo uso do conceito de derivada (em várias dimensões, usar-se-ia um conceito chamado **gradiente**). Mas, tais conceitos matemáticos exigem um conhecimento matemático que não é comum a um aluno do ensino médio. Pesquisar a respeito disso é uma boa pedida. Esse potencial citado tem justamente a ver com a energia potencial que definiremos agora.

Vamos começar analisando a força-peso, a força gravitacional. Considere uma pedra, levantada por uma pessoa até uma altura h do chão. Essa pessoa, então, solta a pedra. Desconsiderando os efeitos da resistência do ar, a energia cinética adquirida pela pedra no percurso até o chão é justamente o trabalho que a força gravitacional nela realiza:

$$W = mgh$$
$$mgh = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Essa energia cinética “brota” da força gravitacional, e tanto é maior o trabalho que pode ser realizado (ou a energia cinética que o corpo pode adquirir), quanto maior for a altura em que o objeto for colocado. Esse “potencial” que um objeto tem de, sob campo gravitacional, adquirir energia cinética (tanto mais, quanto maior for a altura), é o que chamamos de **energia potencial gravitacional**. A energia potencial gravitacional V em um ponto de altura h do chão, é numericamente igual ao trabalho que a força gravitacional realizaria levando o objeto dessa altura h para o chão:

$$V(h) = mgh$$

Fica claro que a energia potencial é dependente do referencial, pois a altura ' h ' que nele aparece é, na realidade, a diferença de altura entre o ponto no qual se está e a referência.

Exemplo 1: Uma bola de borracha, de 100 gramas, é solta de um ponto A que se encontra a 5 metros do chão. Ele é solto, bate no chão e quica de volta para cima, atingindo uma altura de 3 metros. Use $g = 10 \text{ m/s}^2$ e responda:

Qual é a energia potencial gravitacional na altura inicial, no chão e na altura máxima após quicar no chão?

Se colocássemos o referencial na altura máxima que a bolinha atinge após quicar, ou seja, a 3 metros do chão, qual seria a energia potencial nos três pontos citados?

Quanta energia é dissipada no ato da bolinha quicar no chão?

Resposta: Esse exercício explora bastante o conceito de energia potencial. Para calcularmos a energia potencial nesses três pontos, basta usar a definição da energia potencial:

$$V = mgh$$

No ponto inicial, $h = 5$ metros e $V = 0,1 \cdot 10 \cdot 5 = 5 \text{ J}$.

No chão, $h = 0$ e, portanto, $V = 0$.

Na altura máxima após quicar, $h = 3$ metros e $V = 0,1 \cdot 10 \cdot 3 = 3 \text{ J}$.

Agora, passemos ao cálculo da energia potencial considerando $y = 3$ metros como o marco referencial. Para tal, basta subtrairmos 3 metros das alturas utilizadas acima, para calcular a energia potencial. Uma altura de 5 metros está 2 metros acima de uma altura de 3 metros. Uma altura de 0 metros (com relação ao chão) está 3 metros abaixo (ou -3 metros acima) de uma altura de 3 metros. Uma altura de 3 metros está exatamente no marco zero referencial e se esta mesma altura for tomada como origem do sistema de referências. Deste modo, teremos:

Ponto inicial: $h = (5 - 3) = 2$ metros, $V = mgh = 0,1 \cdot 10 \cdot 2 = 2$ J.

No chão, $h = (0 - 3) = -3$ metros, $V = mgh = 0,1 \cdot 10 \cdot (-3) = -3$ J.

Na altura máxima após quicar, $h = (3 - 3) = 0$ metros, $mgh = 0$ J.

A última pergunta indaga a respeito da energia dissipada no ato da bola quicar. Tentemos entender o que isso, quer dizer: quando a bolinha sai do alto, a energia potencial gravitacional transforma-se em energia cinética, conforme a bolinha vai descendo. Quando ela atinge o chão, o sentido de sua velocidade é invertido e ela passa a subir. Em um caso ideal, o módulo da velocidade, a magnitude da velocidade, permaneceria a mesma, apenas o sentido mudaria. Entretanto, se fosse esse o caso, a bolinha subiria até 5 metros de altura de novo – **verifique!** De algum modo, a energia “útil” do sistema diminuiu em 2 Joules. Guardemos este fato.

Passemos agora à outra força conservativa, a força elástica. Imaginemos uma bolinha ligada a uma extremidade de uma mola, cuja outra extremidade está colada à parede. Se pressionarmos essa bolinha e a segurarmos nessa posição comprimida, a bolinha não terá qualquer movimento. Sua energia cinética será nula. Se eu soltar a bolinha, a mola a empurrará – a energia **potencial** “guardada” na mola compressa irá se transformar em energia cinética, acelerando a bolinha. Mas **quanta** energia potencial ficará guardada dentro da mola? É como no caso da força gravitacional: essa energia potencial será tanto maior quanto maior for o trabalho **resistente** realizado pela mola no ato de compressão.

$$V = -W = \frac{k(x - x_0)^2}{2}$$

De igual modo, como a força de mola é conservativa, a energia potencial de uma mola comprimida é exatamente igual ao valor do trabalho que a mola realiza para sair do ponto de compressão e voltar para seu ponto de equilíbrio. Claro, como no caso da força gravitacional, a escolha do referencial faz diferença.

Para sair do abstrato e compreender melhor de que estamos falando, passemos a um outro exemplo.

Exemplo 2: Uma pessoa sobe em uma balança de farmácia, que mede o peso da pessoa com base na compressão que a força-peso da pessoa causa na mola. Considerando uma pessoa de $m = 80$ kg e considerando $g = 10$ m/s², responda:

A compressão em uma mola cuja constante é $k = 400$ N/cm.

A energia potencial armazenada na mola.

Imaginemos essa mesma mola, com essa energia potencial nela armazenada, pronta para impulsionar para cima uma massa de 1 kg. Essa massa voará quantos metros para cima?

Resolução: Na primeira parte do exercício, temos um exercício clássico de estática: a força resultante é zero (ninguém se move) e a força peso é exatamente contrabalanceada pela força de mola realizada pela balança. Deste modo, temos (considerando $x_0 = 0$):

$$\begin{aligned} kx &= mg \\ x &= \frac{mg}{k} = 80 \cdot \frac{10}{400} = 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Tendo o deslocamento e a constante de mola, podemos obter a energia potencial armazenada na mola.

$$V = \frac{kx^2}{2} = 400 \cdot \frac{2^2}{2} = 800 \text{ N} \cdot \text{cm} = 8 \text{ N} \cdot \text{m} = 8 \text{ J}$$

Quantos metros para cima podemos arremessar, com essa energia potencial guardada na mola, uma massa de 1 quilograma? Podemos imaginar que toda a energia potencial será transformada em energia cinética no ato do arremesso. Assim, podemos obter a velocidade com que ele sai do chão e usar as equações básicas da cinemática para ver o quão alto ele subirá. Existe, entretanto, um modo mais simples de se fazer isso: quando o objeto estiver no alto, toda sua energia cinética terá se convertido em força **potencial gravitacional**. Estamos usando, antes deste princípio ser enunciado, algo chamado de **conservação da energia mecânica**. De acordo com este princípio, poderemos encontrar a altura máxima do objeto igualando a energia potencial gravitacional do objeto com a energia potencial elástica que o empurrou!

$$\begin{aligned} \frac{kx^2}{2} &= 8 = mgh \\ h &= \frac{8}{mg} = \frac{8}{1 \cdot 10} = 0,8 \text{ m} \end{aligned}$$

Uma massa de 1 kg seria, desconsiderando a resistência do ar, arremessada 80 centímetros para cima!

Antes de passarmos à próxima aula, na qual será enunciada o princípio da conservação da energia mecânica, façamos algumas atividades de fixação.

ATIVIDADES

Resolva o Exemplo 2 conforme os seguintes passos:

Igual a energia potencial da mola à energia cinética da bolinha, encontrando a velocidade.

Use a velocidade obtida para calcular, usando cinemática, a altura máxima que a massa irá atingir.

Uma bala de canhão, de 1 quilograma, está voando a uma velocidade de 80 m/s. Sua altura com relação ao chão é de 100 metros. Contando este momento como instante inicial, calcule a energia cinética e potencial gravitacional da bala nos instantes

$t = 0$ segundos;

$t = 5$ segundos;

$t = 10$ segundos.

Uma mola, após ser comprimida 30 centímetros, armazena 6 J de energia potencial.

Qual é a constante dessa mola?

Essa energia arremessaria uma massa $m = 0,1$ kg a que distância para cima?



AULA 51

EXTENSÃO A SISTEMAS DE N PARTÍCULAS



As duas aulas anteriores, falamos a respeito do momento linear, da conservação deste mesmo momento linear e do conceito de centro de massa para sistemas de duas partículas. Percebemos que, em sistemas assim, a posição do centro de massa atua como uma espécie de “ponto fixo” representativo em sistemas nos quais não age nenhuma força externa. Dentro desse sistema, coisas podem mexer e acelerar, mas o centro de massa não se altera, porque o sistema como um todo não está sofrendo forças, e, portanto, não pode mudar seu estado de movimento (1ª Lei de Newton).

Agora, passemos à análise de um sistema de N partículas. Toda a argumentação feita até agora para sistemas binários será mantida de modo análogo. Sigamos!

O momento linear $\vec{P}$ de um sistema de N partículas é a soma do momento linear de cada uma das partículas constituintes, ou seja,

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots \vec{p}_N$$
$$\vec{P} = m_1 \frac{\Delta \vec{r}_1}{\Delta t} + \cdots + m_N \frac{\Delta \vec{r}_N}{\Delta t}$$

Vamos analisar a questão do problema de N partículas examinando primeiro o de 3 partículas. Sabemos que é possível reduzir o problema de duas partículas de massa m_1 e m_2 ao problema de uma “partícula” de massa $M = m_1 + m_2$ e posição $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$. Se acrescentarmos mais uma partícula, qual será o centro de massa? Basta utilizar a mesma lógica que utilizamos no problema de 2 partículas, só que agora uma das partículas é o próprio centro de massa do sistema.

$$\vec{R}' = \frac{M\vec{R} + m_3 \vec{r}_3}{M + m_3}$$

Abrindo essa expressão, temos:

$$\vec{R}' = \frac{(m_1 + m_2) \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Assim, percebemos que a lógica se mantém! Note que, se essa expressão for válida para um valor N de partículas:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots m_N \vec{r}_N}{m_1 + \dots m_N}$$

Teremos, para $N + 1$, pela mesma lógica:

$$\vec{R}' = \frac{\frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots m_N \vec{r}_N}{m_1 + \dots m_N} \times (m_1 + \dots m_N) + m_{N+1} \vec{r}_{N+1}}{m_1 + \dots m_{N+1}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots m_{N+1} \vec{r}_{N+1}}{m_1 + \dots m_{N+1}}$$

Deste modo, provamos **por indução** que essa é a fórmula para a posição do centro de massa para um número N qualquer de partículas! As provas por indução ocupam lugar de destaque no estudo da matemática e da física avançada.

Deste modo, o momento linear de um sistema de N partículas como um todo é:

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + \dots m_N \vec{v}_N$$

Considere que todas as partículas interagem com todas as partículas com forças de contato. Se eu somar todas essas forças, duas a duas, as forças de ação anularão as forças de reação. Considerando que existam forças externas $\vec{F}_i^{ext}$ agindo em cada uma das partículas, teremos a seguinte forma para a 2ª Lei de Newton:

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}_1^{ext} + \dots + \vec{F}_N^{ext} = \vec{F}^{ext}$$

Deste modo, o resultado obtido para duas partículas se mantém – embora possa haver movimentos relativos e acelerações no sistema de partículas, o centro de massa só muda seu estado de movimento se sobre o sistema atuarem forças externas! Desse modo, o momento linear de um determinado sistema permanece igual se o somatório das forças externas que agem sobre ele for 0.

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = 0 \rightarrow MV \text{ constante}$$

Eis aí o famoso **princípio da conservação do momento**, agora aplicado em um sistema de número qualquer de partículas. Esse é um princípio poderoso, que nos dá ferramentas para solucionarmos uma vasta gama de problemas. Antes de entrarmos fundo nas aplicações concernentes a este princípio, examinaremos em alguns exemplos que envolvem o cálculo do centro de massa e do momento linear de sistemas de muitas partículas.

Exemplo 1: Considere o sistema binário Terra – Lua. O planeta Terra tem massa $m_1 \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg e considere que seu centro de massa (que coincide com seu núcleo) está na origem do sistema de coordenadas. Distante 384 000 km no sentido positivo do eixo $\hat{x}$, está a Lua, cuja massa $m_2 \approx 7,4 \cdot 10^{22}$ kg. A que distância da Terra estará o centro de massa do sistema Terra-Lua?



Resolução: Para resolver esse problema, basta utilizarmos a fórmula pertinente para cálculo do centro de massa. Todo o sistema se encontra

ao longo do eixo $\hat{x}$ do plano cartesiano, de modo que podemos simplificar a notação escrevendo

$$x_{Terra} = 0$$

$$x_{Lua} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$$

Assim, podemos calcular o centro de massa

$$x_{cm} = \frac{x_{terra}m_{terra} + x_{Lua}m_{Lua}}{m_{Terra} + m_{Lua}} = \frac{0 + 3,84 \cdot 10^5 \cdot 7,4 \cdot 10^{22}}{6 \cdot 10^{24} + 7,4 \cdot 10^{22}}$$

$$x_{cm} = \frac{2,8416 \cdot 10^{28}}{6,074 \cdot 10^{24}} \approx 0,468 \cdot 10^4 = 4,68 \cdot 10^3 \text{ km}$$

Ou seja, o centro de massa do sistema Terra-Lua se encontra a 4680 km do centro da Terra. Como o raio da Terra é de 6380 km, o centro de massa do sistema Terra-Lua se encontra abaixo da superfície terrestre.

Exemplo 2: Em um determinado sistema, temos quatro objetos, cujas posições e massas são as seguintes:

$$m_1 = 2 \text{ kg e } \vec{r}_1 = (3 \text{ m}, 3 \text{ m})$$

$$m_2 = 1 \text{ kg e } \vec{r}_2 = (1 \text{ m}, 1 \text{ m})$$

$$m_3 = 5 \text{ kg e } \vec{r}_3 = (0 \text{ m}, 2 \text{ m})$$

$$m_4 = 3 \text{ kg e } \vec{r}_4 = (2 \text{ m}, 4 \text{ m})$$

Considerando isso, responda:

a) Qual é a posição do centro de massa do sistema?

b) Se o objeto 3 for submetido a uma força de $10 \hat{y} \text{ N}$ por 2 s , qual será sua nova posição? E a nova posição do centro de massa?

Resolução: Primeiro, calculemos a posição do centro de massa utilizando a fórmula recém-deduzida.

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

Em termos das coordenadas $\hat{x}$, temos:

$$X = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2}{2 + 1 + 5 + 3} = \frac{13}{11} \text{ m}$$

E em $\hat{y}$:

$$Y = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{11} = \frac{39}{11} \text{ m}$$

Assim, $\vec{R} = \frac{1}{11} (13, 39)$ ou $\frac{13}{11} (1, 3)$ metros.

b) O objeto 3 foi submetido a uma força de 10 Newtons. Primeiro, utilizemos a 2ª Lei de Newton para calcular sua aceleração.

$$F = m_3 a_3 = > 10 = 5 \cdot a_3$$

$$a_3 = \frac{10}{5} = 2 \text{ m/s}^2$$

Como a força aponta na direção positiva do eixo y , a aceleração também se dará nessa direção. Assim, podemos usar a fórmula para deslocamento no movimento retilíneo uniformemente variado para calcular a sua posição final após ação dessa força:

$$y_f = y_0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$y_f = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 = 2 + 4 = 6 \text{ m}$$

Assim, a nova posição do objeto 3 será $\vec{r}_3 = (0 \text{ m}, 6 \text{ m})$. Como só houve alteração na posição y deste objeto, só precisaremos recalcular essa componente do centro de massa

$$Y = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{11} = \frac{59}{11}$$

Assim, $\vec{R} = \frac{1}{11}(13, 59)$.

Passemos aos exercícios!

ATIVIDADES

1. Ao longo de uma linha reta, encontram-se três massas pontuais. A primeira tem 100 gramas e se encontra a 10 centímetros da origem. A segunda, 200 gramas e se encontra a 20 centímetros da origem. A terceira tem 300 gramas e se encontra a 30 centímetros da origem. Qual é o centro de massa deste sistema?

2. Uma bomba é arremessada por um canhão, descrevendo trajetória parabólica. Em pleno voo, ela explode, despedaçando em milhares de pedaços. Qual será o tipo de trajetória descrita pelo centro de massa da bomba após a explosão? Justifique.

3. Um canhão de 200 quilogramas atira uma bala de 2 kg a uma velocidade de 400 km/h. Considerando um sistema sem atrito, qual será a velocidade adquirida pelo canhão em virtude do “coice” dado pelo tiro? **Indicação:** Use o princípio da conservação do momento linear.



AULA 55

COLISÕES II



Com base nos complexos resultados obtidos na aula passada, podemos chegar a algumas conclusões acerca do comportamento geral de pares de partículas que colidem de modo elástico. Começemos tomando como base as equações que deduzimos na aula anterior, que nos dão a velocidade final de partículas que constituem um par como função de suas velocidades iniciais.

$$v_f^a = \left(\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} \right) v_i^a + \frac{2m_b}{m_a + m_b} v_i^b$$
$$v_f^b = \frac{2m_a}{m_a + m_b} v_i^a + \left(\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} \right) v_i^b$$

Vamos analisar essas equações em alguns casos especiais, onde elas se simplificam. Isso nos trará mais entendimento a respeito do que esperar quando vemos tipos específicos de colisões elásticas.

CASO 1: MASSAS IGUAIS

Nesse caso, temos $m_a = m_b = m$. As equações, neste caso, se apresentam:

$$v_f^a = \left(\frac{0}{2m} \right) v_i^a + \frac{2m}{2m} v_i^b = v_i^b$$
$$v_f^b = \frac{2m}{2m} v_i^a + \left(\frac{0}{2m} \right) v_i^b = v_i^a$$

Ou seja, quando, em uma colisão unidimensional, dois objetos de mesma massa colidem, eles simplesmente **trocam de velocidade**!

Exemplo: Duas bolinhas de borracha, ambas pesando 200 gramas, rolam por um trilho horizontal. A primeira tem $v_1 = 5$ m/s, enquanto a segunda tem $v_2 = -3$ m/s. As duas colidem. Qual será a velocidade das bolinhas após a colisão?

Resolução: Como dito anteriormente, quando a colisão é elástica (bolas de borracha) e as massas são iguais, os objetos apenas trocam de velocidade. Assim, temos:

$$v_1^f = 3 \text{ m/s}$$
$$v_2^f = 5 \text{ m/s}$$

CASO 2: ALVO (BOLINHA B) EM REPOUSO ($v_b = 0$)

Agora, analisaremos a situação em que um dos objetos (consideraremos, sem perda de generalidade, que se trata do objeto ‘b’) está em repouso, ou seja, sua velocidade é nula. Assim, as equações se apresentam:

$$v_f^a = \left(\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} \right) v_i^a$$
$$v_f^b = \frac{2m_a}{m_a + m_b} v_i^a$$

Podemos tirar ainda mais informações dessas equações. Se o objeto em repouso for muito **mais leve** do que o objeto em movimento (ou seja, $m_b \ll m_a$), teremos:

$$v_f^a \approx v_i^a$$
$$v_f^b \approx 2v_i^a$$

Ou seja, a partícula mais pesada simplesmente “atropela” a partícula mais leve, sem qualquer mudança em sua velocidade. Já a partícula mais leve é arremessada com velocidade duas vezes maior do que aquela da partícula mais leve. Essa situação, aparentemente **viola** a conservação do momento, mas é só aparentemente, porque esse resultado-limite é fundamentado em uma aproximação, que visa ilustrar o que ocorre. Se fôssemos analisar friamente a conservação de momento neste caso, perceberíamos que v_f^a é ligeiramente menor do que v_i^a , e v_f^b é ligeiramente menor do que o dobro de v_i^a .

Exemplo: Uma bola de boliche, de massa 4 kg e velocidade $v_b = 10$ m/s, colide com uma bola de ping-pong em repouso, de massa $m_p = 0.003$ kg. Qual será a velocidade final das bolinhas após a colisão?

Resolução: Vamos utilizar a fórmula recém-deduzida. Com base nessa fórmula, considerando que a bola de boliche é muito mais pesada, temos:

$$v_b^f = v_b = 10 \text{ m/s}$$

Ou seja, a bola de boliche não sofre qualquer desaceleração relevante. Já a bolinha de ping-pong adquirirá velocidade duas vezes maior do que a da bola de boliche:

$$v_p^f = 2 \cdot 10 = 20 \text{ m/s}$$

Se fôssemos utilizar a fórmula original para a bola de boliche, sem aproximações, teríamos:

$$v_b^f = \left(\frac{4 - 0,003}{4,003} \right) \cdot 10 = 0,998 \cdot 10 = 9,985011242 \dots \text{ m/s}$$

Ou seja, sem aproximações, a bola de boliche sofre desaceleração de 0,015 m/s. É uma desaceleração bem pequena, de modo que ignorá-la é, sim, razoável.

CASO 3: OBJETO EM REPOUSO MUITO MAIS MASSIVO DO QUE OBJETO EM MOVIMENTO ($m_b \gg m_a$)

Neste caso, as fórmulas que relacionam as velocidades finais com as velocidades iniciais se tornam:

$$v_f^a = \left(\frac{m_a - m_b}{m_a + m_b} \right) v \approx \left(\frac{-m}{m} \right) v = -v$$

$$v_f^b = \frac{2m_a}{m_a + m_b} v \approx (0)v = 0$$

Ou seja, o objeto leve (a) bate no objeto pesado (b) e ricocheteia, mantendo a magnitude de sua velocidade, mas com sentido inverso. Já o objeto pesado sequer se mexe. Esse é um caso bem fácil de se observar, embora não se trate explicitamente de uma colisão elástica, por exemplo: se alguém chuta uma bola de futebol em um carro, a bola ricocheteia e o carro sequer sai do lugar.

Note que, em todos esses casos, há forças envolvidas. Como vimos em aulas anteriores, o conceito de força é análogo ao conceito da taxa de variação do momento linear em um determinado intervalo de tempo. Essas forças atuam em momentos extremamente curtos (o tempo de colisão é curto), o que demonstra também que elas são extremamente intensas, pois envolvem uma variação grande do momento linear em tempos curtos. Esse tipo de força é denominada **força impulsiva** e a variação do momento linear relativa a ela é chamada **impulso**.

Para calcularmos o impulso de uma força, basta vermos como varia o momento linear de um determinado objeto após a ação dessa força. Para calcularmos a magnitude dessa força, devemos tomar essa variação do momento linear e dividir pelo tempo no qual essa força agiu (como se trata de uma força impulsiva, tais tempos são em geral bastante curtos).

Exemplo: Um martelo de meio quilograma é balançado a 15 m/s. O seu usuário visava acertar um prego, mas acertou o próprio polegar. Considerando que o martelo cessou seu movimento, após a colisão com o polegar, em 0.01 s, qual é a magnitude da força impulsiva, feita pelo martelo no dedo, envolvida neste trágico acidente?



Resolução: O momento linear do martelo em movimento era

$$P = mv = 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Quando ele atingiu o polegar do sujeito, seu momento linear foi a zero. A força impulsiva **no martelo**, relativa à essa desaceleração, foi, portanto:

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{0 - 7,5}{0,01} = -750 \text{ N}$$

E assim, pela Terceira Lei de Newton, a força impulsiva do martelo no dedo foi:

$$F = -(-750 \text{ N}) = 750 \text{ N}$$

É uma força considerável, equivalente a uma pessoa de 75 kg sentada sobre o dedo da outra pessoa (claro, esse peso precisaria estar concentrado em uma área semelhante ao da cabeça de um martelo. Doloroso!)

Com base nisso, passemos aos exercícios.

ATIVIDADES

1. Um operário limpava um prédio sem os equipamentos de proteção. Ele tem um mal súbito e despenca lá de cima. Desconsiderando a resistência do ar e considerando que ele cai de uma altura $h = 10$ m, responda

- a) Com que velocidade o operário chega ao chão?
- b) Se a massa do operário é $m = 70$ kg e ele desacelera em $t = 0.02$ s após atingir o chão, qual é a força impulsiva que nele age?
- c) A força impulsiva que age no operário ao bater no chão é equivalente a que força-peso?

2. Dois corpos se aproximam com velocidades iguais em magnitude e opostas em sentido. A magnitude da velocidade é de 5 m/s. Qual será a velocidade final dos objetos (magnitude e sentido) se a massa dos objetos for igual?

3. Um carro a 120 km/h bate em um bloco de concreto, desacelerando em 0,07 s. A massa do carro é de 950 kg.

- a) Qual é a força impulsiva que o bloco de concreto realiza no carro?
- b) Suponha uma força peso igual em magnitude a essa força impulsiva. Qual deveria ser a massa do objeto que causa essa força-peso?



AULA 60

REVISÃO 4 – FORÇA DE ATRITO



esta aula, falaremos a respeito de uma força **não conservativa**, a força de atrito. Em maior ou menor escala, o atrito (ou arrasto, que é o nome que damos ao atrito de um sólido com um fluido, seja ele líquido ou gasoso) está sempre presente nos sistemas reais que estudamos.

Imagine um prato apoiado sobre uma mesa. Se nós o empurrarmos no sentido positivo do eixo $\hat{x}$, ele deslizará para a frente, partindo de uma velocidade v . Essa velocidade vai caindo, até que o prato pare de se mover. Deste modo, a aceleração média ao longo desse processo é

$$a = \frac{0 - v}{\Delta t} = -\frac{v}{\Delta t}$$

Ora, se há aceleração, há força. Essa força terá o mesmo sentido e mesma direção da aceleração. Como a aceleração é negativa (ou seja, como a aceleração se dá no sentido negativo do eixo x), então a força também aponta nessa mesma direção. Se nós tivéssemos jogado o prato no sentido **negativo** do eixo $\hat{x}$ (ou seja, se $\vec{v} = -v\hat{x}$), o prato também deslizaria até parar, de modo que

$$a = \frac{0}{\Delta t} - \frac{(-v)}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t}$$

Nesse caso, a aceleração (e portanto, a força) aponta no sentido positivo do eixo x . Essa força que faz o prato parar, que denotamos **força de atrito**, sempre aponta na direção **contrária** ao movimento.

Quando o atrito aparece em situações nas quais os objetos estão já em movimento, como é o caso do prato em questão, esse atrito é **dinâmico**. Esse atrito é diretamente proporcional a duas grandezas: à força normal e a um coeficiente μ_d chamado **coeficiente de atrito dinâmico**. Assim, a magnitude da força de atrito dinâmico é

$$f_{at} = \mu_d \cdot N$$

A direção da força será a mesma do movimento, e o sentido da força, oposto ao movimento. A grandeza μ_d depende da natureza dos sólidos em contato e também do grau de polimento das superfícies.

Se um corpo estiver parado com relação a uma superfície, não é qualquer força que o fará se mexer. Imagine que estejamos tentando empurrar uma mesa. Se dermos nela um peteleco ou apenas encostarmos nela de leve, ela não se moverá. Para que ela se mova, é necessária uma força mínima, que, por assim dizer, a tire da inércia e a coloque em movimento. Ora, a força que impede que se dê o movimento é a chamada **força de atrito estático**. Essa força tem magnitude igual e sentido oposto à força que nela age. Isso vale até um valor máximo, que é numericamente igual ao produto do chamado **coeficiente de atrito estático** pela força normal. A partir desse ponto, o objeto passa a se mover e a força que atuará no objeto, contra o movimento, será a força de atrito dinâmico. Podemos calcular a força necessária para colocar um objeto em movimento, tomando

$$F = \mu_e N$$

É importante notar que $\mu_e > \mu_d$ – é mais difícil tirar um objeto do local do que botá-lo em movimento, isso, é claro, quando há atrito envolvido.

O coeficiente de atrito estático é razoavelmente fácil de se medir experimentalmente. Poderíamos, por exemplo, colocar um bloco sobre um plano inclinado, cujo ângulo com o chão (eixo horizontal) fosse θ . Assim, a força normal fica

$$N = mg \cos \theta$$

Já a componente da força-peso que puxa o objeto rampa abaixo é

$$P = mg \sin \theta$$

Agora, precisamos inclinar o plano até que a força de atrito fique máxima, o que quer dizer, em outras palavras, que inclinaremos o plano até que o bloco fique na iminência de escorregar. Ora, neste caso, podemos equilibrar as seguintes forças, usando o fato de que a força de atrito é igual à componente da força peso paralela à rampa

$$mg \sin \theta = \mu_e N = \mu_e mg \cos \theta$$

Podemos anular mg dos dois lados e passar o cosseno dividindo para o outro lado. Assim, obtemos

$$\tan \theta = \mu_e$$

Conseguimos calcular o coeficiente de atrito estático com base no ângulo no qual o bloco está na iminência de escorregar (na prática, poderíamos subir o ângulo de 1° em 1° . Vai chegar um ponto em que subir 1° faz com que o objeto escorregue. O ângulo θ a ser usado na conta será, portanto, o ângulo imediatamente anterior a esse.

Exemplo: Um jovem rapaz realizou o experimento delineado acima. Ele aumentou o ângulo de 5° em 5° e o bloco escorregou quando o ângulo atingiu 40° . Qual será o coeficiente aproximado de atrito estático?

Resposta: Sabemos que o coeficiente de atrito estático é tal que

$$\mu_e > \tan 35^\circ$$

$$\mu_e < \tan 40^\circ$$

Como $\tan 35^\circ \approx 0,700$ e $\tan 40^\circ \approx 0,643$, podemos afirmar que

$$0,70 \geq \mu_e > 0,643$$

Quando um objeto se move no ar (ou em qualquer outro fluido, seja líquido ou gasoso), o ar faz uma força no objeto que se opõe ao movimento. Em geral, considera-se (com base experimental) que a força de resistência do ar tem intensidade diretamente proporcional à velocidade v^2 do corpo.

$$F_r = kv^2$$

O coeficiente de proporcionalidade k depende de vários aspectos, a saber

Do formato do corpo (informação essa quantificada pelo coeficiente de arrasto aerodinâmico C_x). Note que esse coeficiente depende da direção do movimento.

Da **maior** área de seção transversal (para calcular essa área, veja a direção do movimento e “corte” o objeto, na região mais larga, na direção perpendicular ao movimento. Essa é a maior área de seção transversal).

Da densidade ρ do ar.

Essas três medidas se relacionam com k do seguinte modo

$$k = \frac{1}{2} \rho A C_x$$

Ora, a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade – chegará um ponto em que a velocidade será tão grande que a força de arrasto será suficiente para contrabalancear a força gravitacional. Assim, a força resultante no objeto passa a ser nula, e ele passa a se movimentar uniformemente. Para encontrar qual é essa velocidade, denotada **velocidade limite** v_l , basta que nós usemos a Segunda Lei de Newton com $a = 0$.

$$0 = mg - kv_l^2$$

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Exemplo: Um objeto possui $k = 0,01$ e massa $m = 10$ kg. Qual será sua velocidade limite?

Resposta: O cálculo dessa velocidade limite pode ser feito de modo direto por meio da aplicação da fórmula recém-deduzida

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{10 \times 10}{0,01}} = \sqrt{\frac{100}{0,01}} = \sqrt{10000} = 100 \text{ m/s}$$

Ou seja, o objeto não passará de 100 m/s: se ele chegar nessa velocidade, ele parará de acelerar.

Exemplo: Um objeto possui massa de 2 kg. O coeficiente de atrito estático dele com a superfície plana sobre a qual ele está é de $\mu_e = 0,7$. Já o coeficiente de atrito dinâmico é 0,6. Após 18 metros, a superfície acaba, e o objeto cai. O coeficiente k que dita a força de arrasto entre esse objeto e o ar é de $0,0125 \text{ N s}^2/\text{m}^2$.

a) Qual deverá ser a força para colocar o objeto em movimento?

b) Considerando que essa força continua atuando no objeto até que ele caia da superfície, qual será a velocidade horizontal com a qual ele cairá?

c) Qual é a razão entre o módulo da velocidade com que ele sai da superfície e sua velocidade limite de queda?

Resolução: a) Para descobrir a força necessária para colocar o objeto em movimento, basta calcularmos a força de atrito estático:

$$F_e = \mu_e mg = 0,7 \cdot 2 \cdot 10 = 14 \text{ N}$$

b) Para obter a velocidade horizontal com que o objeto cairá, precisamos primeiro calcular qual será a força **resultante** sobre o objeto, considerando já a ação do atrito estático:

$$F_{res} = 14 - \mu_d mg = 14 - 0,6 \cdot 2 \cdot 10 = 14 - 12 = 2 \text{ N}$$

Podemos encontrar a aceleração usando a Segunda Lei de Newton:

$$F = ma$$

$$2 = 2 \cdot a$$

$$a = 1 \text{ m/s}^2$$

E assim, podemos encontrar, via Equação de Torricelli, a velocidade com que ele cairá:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s$$

$$v^2 = 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot 18$$

$$v^2 = 36$$

$$v = 6 \text{ m/s}$$

c) Para encontrar sua velocidade limite (e considerando que o objeto é homogêneo no modo pelo qual ele “corta” do ar horizontalmente ou verticalmente), basta usarmos:

$$v_l = \sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 10}{0,0125}} = \sqrt{\frac{20}{0,0125}} = \sqrt{1600} = 40 \text{ m/s}$$

A razão entre a velocidade com que ele sai da superfície e a velocidade terminal do objeto é:

$$\frac{6}{40} = 0,15$$

Agora, analisemos nossa proficiência no tema por meio de exercícios.

ATIVIDADES

1. Um caixote de massa 20 kg está em repouso sobre a carroceria de um caminhão que percorre uma estrada plana, horizontal, com velocidade constante de 72 km/h. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico, entre o caixote e o piso da carroceria, são aproximadamente iguais e valem $\mu = 0,25$. (Use $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

a) Qual é a intensidade da força de atrito que está atuando no caixote? Justifique.

b) Determine o menor tempo possível para que esse caminhão possa frear sem que o caixote escorregue.

2. Em um salto de paraquedismo, identificam-se duas fases no movimento de queda do paraquedista. Nos primeiros instantes do movimento, ele é acelerado. Mas devido à força de resistência do ar, o seu movimento passa rapidamente a ser uniforme com velocidade v_1 , com o paraquedas ainda fechado. A segunda fase tem início quando o paraquedas é aberto. Rapidamente, ele entra novamente em um regime de movimento uniforme, com velocidade v_2 . Supondo que a densidade do ar é constante, a força de resistência do ar sobre um corpo é proporcional à área sobre a qual atua a força e ao quadrado de sua velocidade. Se a área efetiva aumenta 100 vezes quando o paraquedas se abre, qual é a razão entre v_2 e v_1 ?

3. Um plano inclinado faz um ângulo de 30° com a horizontal. Determine a força constante que, aplicada a um bloco de 50 kg, paralelamente ao plano, faz com que ele deslize:

I. para cima, com aceleração de $1,2 \text{ m/s}^2$;

II. para baixo, com a mesma aceleração de $1,2 \text{ m/s}^2$. Despreze o atrito do bloco com o plano e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4. Um pequeno bloco de granito desce por um plano inclinado de madeira, que forma um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito dinâmico entre o granito e a madeira é μ e a aceleração local da gravidade é g . Nessas condições, a aceleração do movimento do bloco é dada por:

a) $g \cdot (\sin(\theta) - \mu \cdot \cos \theta)$

b) $g \cdot (\cos \theta - \mu \cdot \sin \theta)$

c) $g \cos \theta$

d) $g \sin \theta$

e) g



AULA 63

REVISÃO 7 – CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR



a aula anterior, percebemos que o produto da força pelo deslocamento, o trabalho, está diretamente associado com o conceito de energia e com leis de conservação bastante profundas. O produto da força pelo tempo também tem, como veremos, aplicações. Essa grandeza é chamada **impulso**:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

A unidade do impulso é Newton vezes segundo. Podemos, por meio de um gráfico no qual a força está escrita em função do tempo, calcular o impulso olhando para a área sob esse gráfico. O impulso tem mesma direção da força que lhe dá origem.

Ora, o impulso está diretamente ligado ao conceito de **momento linear**, que é dado pelo produto da massa do objeto pela sua velocidade.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

O momento linear, assim como o impulso, é um vetor, e é um vetor que tem mesma direção e sentido que a velocidade. Sua unidade também é Newton vezes segundo.

Ora, imagine um objeto de massa m , no qual atuam diversas forças. A resultante dessas forças é $\vec{F}$. Essa força é paralela à velocidade que o objeto tem.

Pela 2ª Lei de Newton, podemos obter:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Ora, se a força é constante, a aceleração também o é. Desse modo, podemos tomar:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

Assim, passando o tempo para a esquerda, temos:

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

O termo na esquerda é justamente a variação do impulso, $\Delta\vec{I}$. O termo na direita expressa a variação no momento linear. Esse é o famoso **teorema do impulso**!

O impulso de uma força, em um intervalo de tempo, é igual à variação do momento linear deste mesmo corpo no mesmo intervalo de tempo.

A grandeza momento linear de um objeto ou de um sistema, portanto, varia na presença de forças externas a esse objeto ou a esse sistema. Fora dessa situação, o momento linear permanece constante. Isso vale tanto para objetos isolados ou sistemas de vários objetos isolados, sem ação de forças externas a este sistema. Esse é o famoso teorema da conservação do momento linear!

Em um sistema de várias partículas, cada uma tem um momento linear. Elas podem se chocar e trocar momento linear entre si, variando suas velocidades. Entretanto, a soma do momento linear de todas as partículas permanece constante. Com relação a um determinado referencial, o chamado centro de massa do sistema de várias partículas permanece inerte, ou seja, ele permanece, na ausência de forças externas ao sistema, parado ou em movimento retilíneo uniforme (com relação a um referencial inercial). Para calcularmos o centro de massa de um sistema de várias partículas, basta tomarmos a média ponderada da posição de cada partícula. A massa das partículas irá ditar o peso relativo de cada uma das partículas, na média ponderada, com relação às demais.

$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + \cdots m_N x_N}{m_1 + \cdots + m_N}$$

De modo análogo, a velocidade do centro de massa pode ser calculada com base na velocidade de cada uma das partículas. Se não houver forças externas agindo, essa velocidade é constante:

$$V_{cm} = \frac{m_1 v_1 + \cdots m_N v_n}{m_1 + \cdots m_N}$$

Exemplo: No gelo, onde o atrito é pequeno, um patinador de 80 kg e uma patinadora de 50 kg deslizavam com velocidade $v = 4$ m/s no sentido positivo do eixo $\hat{x}$. O patinador, então, “jogou” a patinadora, que saiu deslizando com velocidade de $v = 6$ m/s no sentido positivo do eixo x . Qual é a velocidade do patinador após o arremesso?

Resolução: Para resolver esse exemplo, precisamos usar o princípio da conservação do momento (que é equivalente à Segunda Lei de Newton aplicada a um sistema de partículas). Assim, o momento inicial, do sistema como um todo, é a soma do momento linear da patinadora (m_2) com o momento linear do patinador (m_1). Como todo o movimento acontece em uma mesma direção, não precisamos levar o caráter vetorial da velocidade em conta. Assim, o momento linear do sistema é:

$$P = m_1 v + m_2 v = (m_1 + m_2) v = (80 + 50) \times 4 = 520 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Quando o patinador arremessa a patinadora, ela adquire momento linear igual a:

$$p_2 = m_2 v_2 = 50 \times 6 = 300 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}\vec{P} &= p_1 + p_2 \\ 520 &= p_1 + 300 \\ 220 &= p_1 \\ 220 &= 80 \times v_1 \\ v_1 &= \frac{220}{80} = 2,75 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Ou seja, sua velocidade após o arremesso da patinadora é de 2,75 m/s.

Uma das aplicações mais comuns do princípio da conservação do momento linear é no caso em que ocorrem **colisões**. O caso mais simples é aquele que envolve as chamadas **colisões totalmente inelásticas**. Nesse tipo de colisão, não há conservação de energia, mas apenas conservação de momento. A energia é conservada **somente** na medida em que, em um dado referencial, o **centro de massa** está em movimento. Assim, todos os movimentos internos ao sistema cessam – resta apenas o movimento do centro de massa. Isso quer dizer que os objetos que colidem irão “grudar” após a colisão. Isso faz a obtenção do movimento dos objetos após a colisão ser muito simples – basta definirmos a velocidade do centro de massa antes da colisão, pois esse será o movimento que ambos os objetos adquirirão, grudados, após colidirem.

Exemplo: Dois objetos sofrem uma colisão totalmente inelástica. O primeiro tem massa $m_1 = 2$ kg e velocidade inicial $\vec{v}_1 = (5, 3)$ m/s (5 m/s na direção do eixo x e 3 m/s na direção do eixo y). O segundo tem massa $m_2 = 5$ kg e velocidade inicial $\vec{v}_2 = (-2, -2)$. Qual será a velocidade do sistema após a colisão?

Resolução: Se a colisão é totalmente inelástica, os dois objetos sairão grudados após a colisão. Para encontrar a velocidade com que essas duas partículas grudadas se movimentarão, calcularemos, em primeiro lugar, a velocidade do centro de massa antes da colisão. A velocidade do centro de massa admite decomposição vetorial, de modo que eu deva calcular, separadamente, a coordenada x e a coordenada y dessa velocidade. Assim, temos

$$\begin{aligned}\vec{V}_{cm} &= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ V_{cm}^x &= \frac{m_1 v_1^x + m_2 v_2^x}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 5 + 5 \times (-2)}{2 + 5} = \frac{0}{7} = 0 \text{ m/s} \\ V_{cm}^y &= \frac{m_1 v_1^y + m_2 v_2^y}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 3 + 5 \times (-2)}{7} = -\frac{4}{7} \text{ m/s}\end{aligned}$$

Assim, os dois objetos irão passar a se movimentar com velocidade $4/7 \text{ m/s}$ (aproximadamente 0.57 m/s) no sentido negativo do eixo y . Não haverá velocidade na direção x .

Em casos mais gerais envolvendo colisões, os objetos colidem e espalham-se separadamente. Assim, o movimento de cada um deles não mais se identificará com o movimento do centro de massa do sistema. Esse é o caso das colisões **parcialmente inelásticas** e das colisões **elásticas**. Nas colisões elásticas, não há presença de forças dissipativas, ou seja, a **energia mecânica** do sistema é também conservada. Assim, o estudo das colisões é um excelente laboratório teórico para utilizarmos em conjunto esses dois princípios de conservação.

O que é importante notar é que, se tomarmos o centro de massa do sistema como referencial inercial (coisa que podemos fazer na ausência de forças externas), poderemos afirmar

Se a colisão é totalmente inelástica, a energia cinética de cada partícula com relação ao centro de massa é nula.

Se a colisão é parcialmente inelástica, a energia cinética das partículas com relação ao centro de massa irá diminuir.

Se a colisão é elástica, a energia cinética das partículas com relação ao centro de massa não irá mudar.

Na próxima aula, estudaremos, de modo mais detido, as colisões parcialmente inelásticas e as colisões elásticas, repetindo, de modo mais sucinto e direto, os temas abordados na apostila anterior. Agora, fiquemos com os exercícios.

ATIVIDADES

1. Uma massa $m = 100 \text{ g}$ gira, com movimento circular uniforme, ao redor de um eixo, estando amarrada por uma corda. O raio de giro é de $1/\pi$ metros e ela dá 3 voltas por segundo. Em certo momento, a corda arrebenta e a massa sai voando, colidindo, de forma totalmente inelástica, com uma caixa de isopor de $m = 50 \text{ g}$. Qual será a velocidade dos objetos após a colisão?

2. Duas partículas, de massa m_1 e m_2 e velocidade v_1 e v_2 , se movem ao longo de uma linha reta, se chocando frontalmente. Após a colisão, as partículas passaram a se mover juntas. Essa é uma colisão elástica, parcialmente inelástica ou totalmente inelástica?

3. Qual é o momento linear de um touro de 1 tonelada correndo em nossa direção a 36 km/h ? Se ele o chifrar, transferindo para você todo seu momento linear, com que velocidade você sairá voando? Use aqui a sua massa real.



AULA 66

MATÉRIA, MATÉRIA-PRIMA E O PRINCÍPIO DA INDIVIDUAÇÃO



Como vimos na aula passada, cada “coisa” é ente, é algo que tem ser. A realidade é ao mesmo tempo o conjunto de todas as coisas que têm ser e também aquilo que lhes dá o ser, é o “ato de ser” (na terminologia de Santo Tomás) ou a “formalidade de realidade” na terminologia do filósofo católico contemporâneo Xavier Zubiri (1898 – 1983). Deus é o fundamento de tudo isso – a tudo ele doa um ser participado, finito, onde cada ente específico reflete, a seu modo finito, a infinita beleza e grandeza de Deus. O que faz cada ente ser um ente específico, de uma “espécie” específica, é a forma substancial, que é o princípio que ordena, integra e articula a matéria que constitui o ente. Mas não falamos ainda dessa matéria. O que ela é? Vamos, nesta aula, buscar compreendê-la, na medida em que sua obscuridade isto permite.

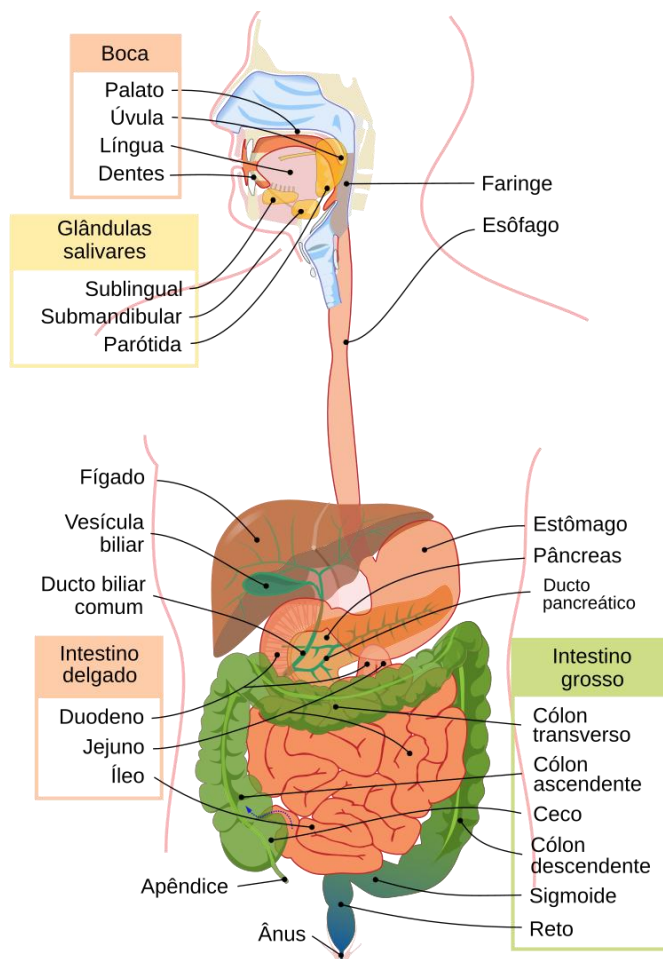
A forma é um princípio que plasma a matéria. A palavra “matéria” tem raiz etimológica à palavra “mater” (mãe), pois ela tem algo de “feminino” – ela é “receptáculo”, enquanto a forma ordena tal receptáculo. Quando falamos, por exemplo, de um objeto inanimado, como uma pedra de sódio puro (tal pedra não é encontrada na natureza, pois o sódio tende, por sua reatividade, a se misturar com outros elementos), percebemos que parti-la ao meio nada faz com sua forma substancial. Ela continua uma pedra de sódio (menor, é claro). Se olharmos essa pedra sob óptica de um potente microscópio eletrônico, perceberemos que essa pedra é composta de átomos de sódio organizados (isso pode ser descoberto com base na chamada espectroscopia de raio-X) de acordo com uma ordem chamada cúbica de corpo centrado. Essa “unidade básica” que se repete é muito pequena, de modo que assim se compreende o porquê da coisa continuar funcionando exatamente igual quando partida no meio.

Se tomamos, por exemplo, um ente vivo, percebemos que a complexidade é ordens de magnitude maior. Um mamífero, por exemplo, tem em seu corpo diversos sistemas funcionando de modo concomitante. O sistema cardiovascular bombeia sangue oxigenado para todo organismo, permitindo que as células constituintes de cada órgão façam a respiração celular. Esse mesmo sistema recebe o sangue já saturado de gás carbônico. Quem coloca o oxigênio dentro do sangue? É outro sistema, o sistema respiratório. Que sistema fornece a energia para que todos os outros sistemas permaneçam em funcionamento? De modo mais direto, é o sistema digestório, que é responsável por transformar em energia os alimentos consumidos pelo mamífero. O sistema nervoso central, o qual possui subdivisões, controla,

em companhia do sistema endócrino, os outros sistemas. As toxinas produzidas pelo metabolismo celular são capturadas e eliminadas pelo sistema excretor. Para que esse mamífero se mova, é necessário que haja o sistema muscular e o sistema esquelético. Para que o mamífero possa se reproduzir e deixar descendentes, há o sistema reprodutor. Assim, fica claro que a forma substancial articula vários sistemas que, embora não possam ser compreendidos à parte de todo, tem suas próprias leis e funcionam conforme suas próprias regras.

Ora, cada um desses sistemas é constituído de órgãos, cada um com uma ou mais funções. É a articulação desses órgãos, conforme uma regra de funcionamento, que permite que o sistema funcione. Cada órgão é constituído de diversos tecidos, cada um com um funcionamento próprio. É a articulação que a lei constitutiva do órgão faz nos tecidos que permite que tais tecidos trabalhem e realizem a função que aquele órgão tem. De modo sucessivo, o tecido é formado e subordina a si as células, as células articulam e subordinam a si e à sua lei de funcionamento, as organelas. As organelas são feitas e subordinam a si cadeias de proteínas e lipídeos, e essas cadeias são constituídas de moléculas que são constituídas de átomos. Conforme “descemos” para realidades cada vez menores e mais simples, percebemos um movimento na direção da simplificação e da organização “de baixo para cima”. Quando falamos de um ser humano, nem o materialista mais maluco ousaria dizer que um ser humano funciona do modo pelo qual funciona, porque esse funcionamento “emerge”, de modo reducionista, do funcionamento dos sistemas que o constituem. O sistema é para o homem, não o homem para o sistema – ninguém vê um sistema esquelético saindo por aí a andar sozinho, até porque não andaria, e se andasse, estaria endemoninhado (infelizmente, nos termos modernos, está na moda a adoração da Sancta Muerte, um blasfemo demônio em forma de esqueleto vestido com o manto da Virgem Santíssima).

Agora, quando falamos de estruturas menores, é possível compreender as maiores com base nas leis da Física – nesse domínio, o reducionismo tem mais valor. Um átomo pode ser descrito como o comportamento coletivo de suas partículas constituintes em adição das



A complexidade do sistema digestório.

forças fundamentais que regem tais partículas, que são, a saber: o próton (carga positiva), o nêutron (carga neutra) e o elétron (carga negativa). Os prótons e os nêutrons são constituídos de quarks. Quando descemos ao domínio dessas partículas, nem mesmo a posição ou a velocidade delas está bem definida – elas, curiosamente, embora “imponham” suas leis de baixo para cima no que se refere à formação dos átomos, por exemplo, são praticamente pura indefinição.

Entretanto, elas ainda têm uma ou outra característica bem definida, como o *spin* ou a massa. Se fosse possível (e, por princípio, não é), descer até algo mais fundamental do que as partículas elementares, chegaríamos a algo totalmente indefinido (e, por isso, incognoscível – é por isso que não podemos chegar a este ponto): a chamada **matéria-prima**. No fim, o que temos em um determinado corpo complexo, com determinada forma substancial, é uma ordenação de sistemas interligados que são eles mesmos formados de sistemas menores. Esses sistemas só existem enquanto parte do ser vivo – é a própria forma substancial humana que lhes dá coesão e, separada dele, ela desaparece.

Quando falamos, entretanto, dos seres humanos, temos que a alma humana é também princípio de coesão e ordenação das subestruturas do mesmo homem. Entretanto, ela é um fator de ordenação que não é eterno apenas enquanto manifestação concreta de uma “ideia” eterna presente na mente de Deus, ela é eterna enquanto “indestrutível” – a alma humana “encarnada” em seu corpo, para o qual foi feita, não deixa de existir no momento da morte, pois ela é “conatural” com as formas substanciais, que são em si mesmas (não enquanto manifestadas em um ser específico), eternas.

Entretanto, isso levanta algumas dúvidas. Note que a ideia, a “forma substancial” de um determinado ente, é a mesma para todos os entes daquela espécie. A forma substancial é o que faz a coisa ser o que ela é, não enquanto indivíduo, mas enquanto membro de uma determinada espécie. É a forma de cachorro que faz o cachorro ser cachorro, assim como é a fórmula química da pedra de sódio (bem como sua ordenação cristalina, proveniente de critérios de minimização de energia mais efeitos térmicos) que faz essa pedra de sódio ser uma pedra de sódio. O mesmo deve valer para o homem – não é a alma que individualiza o ser humano.

Ora, como se explica então a individualidade, a característica pessoal de cada ser humano? Segundo Santo Tomás, é a ordenação dessa alma à matéria para qual ela foi feita que a individualiza. Podemos entender isso no seguinte sentido, fazendo um intercâmbio com a ciência moderna: os seres humanos (todos os seres vivos, na verdade) possuem um código genético que define quase que peremptoriamente quais serão as características físicas e mentais daquela pessoa em específico. A forma substancial (alma) é o que mantém coeso um corpo que tem um determinado material genético, com determinadas características herdadas, um corpo que será de modo tal e qual. Assim, existe uma simbiose, um “ser feito para” entre a alma e o corpo para o qual ela foi feita. A “lei de formação” deste corpo está, grosso modo, no código genético. Assim, pode-se compreender a “nostalgia”, explica Santo Tomás, sentida pela alma **já na bem-aventurança divina**, nostalgia esta proveniente da ausência do corpo. É por isso que, após o Juízo Final e a vitória final de Cristo, Deus nos reunirá novamente aos nossos corpos, desta vez glorificados.

O que é importante notar é que, quanto mais complexo o objeto, mais ele é indiviso. Uma pedra, ao ser quebrada, continua tendo a mesma forma substancial – ainda é pedra. Uma planta, ao ter o galho cortado e transplantado, pode dar origem a uma nova planta (que é como que um “clone” genético da primeira). Um animal, ao ser decepado, fica aleijado – nenhum animal novo nascerá daquele pedaço isolado do corpo para o qual foi feito. Partir um homem ao meio destrói o homem.

Mas é a mera complexidade que dita a indivisibilidade daquela forma substancial? Isso não é totalmente verdadeiro, pois a complexidade é meramente a expressão visível e concreta do potencial daquela alma. E tal potencial é o potencial para **conhecer**. Uma pedra reflete a grandeza de Deus “tendo ser”, ou seja, ela está aí, é de verdade, é concreta, podemos tocar, não é um fruto de nossos sonhos e de nossa mente. Já uma planta, além de existir, é também viva, ela se nutre e cresce, tendo em si os meios para se replicar, gerar mais exemplares da mesma espécie que ela. Um animal tem também alma sensitiva – ele consegue receber informações de fora e agir com base nelas. Nós, enquanto seres humanos, temos inteligência, somos capazes de abstrair a forma substancial das coisas e operar de modo racional sobre essas informações.

Entretanto, fazemos isso de modo cambaleante, pois a informação nos chega aos poucos e existe em nós um fundo de obscuridade, que é uma sorte de revolta da “matéria” (em sentido lato) contra nossa alma. Já os Anjos são puros espíritos – recebem todas as informações de modo intuitivo, de golpe, e portanto, suas decisões são definitivas – não há esse processo lógico-argumentativo-sentimental presente nos seres humanos. Os Anjos, por não terem matéria, são puras “formas”, e essas formas são diferentes para cada Anjo: os seres angelicais são tão individuais que, se fôssemos usar o mesmo critério que usamos para objetos materiais no que se refere à generalização de sua espécie, teríamos que chamar cada Anjo de uma coisa diferente. Cada Anjo tem uma forma substancial diferente.

Acima dos anjos, conforme a natureza das coisas (e desconsiderando efeitos da Graça), só existe o próprio Deus, unidade absoluta em essência, Aquele que É, Trindade de Pessoas, que sustenta tudo no ser participando o seu próprio Ser infinito em pequenas parcelas finitas, cada qual manifestando a seu modo a grandeza de Deus.

Passemos aos exercícios.

ATIVIDADES

1. O pulmão humano tem uma forma substancial? Justifique sua resposta.
2. Em que sentido existimos com mais “plenitude” do que uma pedra? Justifique.



AULA 72

O ARGUMENTO COSMOLÓGICO PARA A EXISTÊNCIA DE DEUS



própria realidade dá testemunho da existência de Deus: basta que vejamos as cinco vias para a existência de Deus presentes na obra de Santo Tomás de Aquino. Entretanto, mesmo o panorama um tanto quanto matematizante e nominalista da Física Moderna, por incompleto que seja, pode ser uma via para a existência de Deus. O seguinte argumento foi obtido do artigo “Transcendencia y Física”, do filósofo basco Xavier Zubiri (1898 – 1983), em tradução do filósofo contemporâneo Joathas Bello (1975 -). Zubiri não é um tomista, e não existe uma aprovação eclesiástica oficial de sua filosofia. Entretanto, os argumentos aqui são excelentes, de modo que vale a pena expô-los aqui.

A ideia do artigo do Zubiri era averiguar se a existência do Universo tal como descrito pela física moderna seria suficiente para provar a necessidade de um ser que existisse por si mesmo, que fosse “ser por essência” – em outras palavras, um ser no qual “ser” e “essência” se identificasse – Deus.

O “mundo” da Física Moderna se restringe ao inanimado. Entretanto, suas leis abarcam todo o Universo – hoje, dadas as novas teorias cosmológicas, busca-se entender o Universo em larga escala, suas mudanças, seus movimentos, sua estrutura geométrica intrínseca. O mundo físico e o mundo cósmico possuem uma “identificação” (embora o mundo cósmico seja maior – o outro é apenas uma abstração).

Entende-se, na Física Moderna, o Universo físico como uma aglomeração de estrelas, poeira cósmica, objetos rochosos, buracos negros, etc. Esses objetos constituem galáxias, que também se unem em aglomerados ou superaglomerados de galáxias. Em larga escala, o Universo parece homogêneo. O Universo conhecido atualmente, que é o Universo visível, tem cerca de 93 bilhões de anos-luz de diâmetro (note que 1 ano luz é aproximadamente igual a 10 trilhões de quilômetros).

Todos esses objetos cósmicos mudam com o tempo. As galáxias parecem um todo homogêneo, mas seus constituintes vivem em movimento relativo um com relação ao outro. Nuvens de gás se aglomeram em virtude da força gravitacional, formando estrelas com planetas ao redor. Estrelas supermassivas explodem, dando origem aos metais pesados que constituem os núcleos dos planetas rochosos. Outras estrelas apenas esfriam, tornando-se

compactas anãs brancas. Com base no que se observa no céu, é possível inclusive afirmar a idade das estrelas que observamos e qual será seu destino após x anos.

No que se refere às galáxias, temos que ela inicia com forma irregular. Conforme o gás vai sendo consumido nos processos de geração estelar, a sua forma passa para espiral. Por fim, quando a galáxia é já antiga, ela se torna elíptica.

No que se refere às estrelas, temos que elas começam a brilhar fundindo hidrogênio, transformando-o em hélio e energia pura. Quando este acaba, a estrela começa a fundir hélio em carbono + energia. Essa mudança em seu “combustível” fará com que ela se expanda, ficando vermelha. Quando acaba o hélio, temos uma distinção: se a estrela possuir massa pequena, não conseguirá fundir carbono. Ela, então, perderá a sua camada externa e se tornará uma pequena estrela branca, a chamada anã branca. Se ela for muito massiva, conseguirá fundir carbono, gerando energia. Esse processo de fusão nuclear irá persistir até que no núcleo da estrela reste apenas ferro. O ferro, quando fundido em materiais mais massivos, não gera energia – consome. Assim, a estrela fica instável e explode em um dos eventos mais violentos do Universo – a supernova (ou hipernova, se a estrela for suficientemente grande).

A energia liberada nesse processo é tão grande que, se ocorresse com o Sol (não ocorrerá, pois ele é uma estrela pequena), todo o sistema solar seria vaporizado. A estrela então se torna um objeto compacto, como uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. A supernova promove a fusão nuclear de materiais pesados, gerando assim os elementos da tabela periódica mais pesados que o ferro. Esse processo expelle tais materiais, jogando-os para muito longe, o que dá origem a novas nuvens de gás que poderão ser substrato para formação de novas estrelas, de composição química diferente das primeiras. A formação destas depende, segundo a Física Moderna, de duas coisas

Das leis da Física (lei da gravidade, leis da eletricidade e do magnetismo, leis da termodinâmica, comportamento quânticos, etc.).

Da **configuração** dos objetos.

A configuração dos objetos levados em conta na análise, depende da configuração anterior, e assim sucessivamente. Configurações mais organizadas se tornam menos organizadas com o passar do tempo – isso é consequência das leis da termodinâmica, que sempre levam o sistema para estágios de maior “desordem”, de maior bagunça. Além disso, condições iniciais muito semelhantes podem dar origem a configurações finais muito diferentes – essa é a definição de “sistema caótico” para a Física Moderna. Entretanto, diante do panorama da Física Moderna macroscópica, o resultado é sempre determinístico – temos uma configuração inicial, e essa configuração evoluirá de modo perfeitamente determinístico até uma configuração final.

Além do mais, o Universo visível **se expande** – quanto mais distante está um objeto de nós, mais rápido ele se move para longe de nós. Essa é outra característica aparentemente fundamental do Universo físico.

Deste modo, o Universo “se desenvolve” (dada a configuração e conforme as leis da Física) e se expande. A hipótese mais aceita atualmente pelos físicos, é a de que, em um momento inicial, o universo estava contraído em um único ponto infinitamente denso, de

grande instabilidade (é a hipótese do Big Bang, do Padre Lemaître). Os dados da Física Moderna apontam para uma idade do Universo de cerca de 14 bilhões de anos. Assim, com base nessas informações, podemos compreender qual foi a “condição inicial” do Universo, qual era a sua configuração a 14 bilhões de anos. Isso nada diz a respeito do que havia “antes”, e sequer diz se essa pergunta faz algum sentido.

Com base nisso, façamos outra pergunta: o Universo “repousa” em si mesmo ou necessita de outro para lhe dar existência? Entendendo o Universo como a unidade das coisas que o mesmo universo contém (no sentido em que tudo faz parte da mesma realidade), a pergunta é: esse conjunto de coisas, em seu misto de atualidade e potencialidade, de mudança e de permanência, existe por si mesmo? Sua existência é necessária?

De acordo com o modelo de Universo dado pela Física Moderna, o Universo **não** pode “repousar em si mesmo”. Se se imagina que o Universo se expande ao mesmo tempo que sua densidade fica constante, é preciso que surja mais matéria do nada. É repugnante imaginar que matéria surja do nada em um único instante, mas tal hipótese sugere que matéria surja do nada em infinitos instantes de tempo. Que causa é essa que faria surgir matéria? Isso não seria impossível, mas o argumento que daremos contra a outra hipótese, que é aquela na qual a densidade do Universo muda conforme ele se expande, refutará a essa também.

Passemos então à segunda hipótese, ignorando aqui que as “potencialidades” desse Universo devem contemplar a possibilidade de entes inteligentes. Considere o Universo em um determinado inicial, sujeito às leis da Física. Esse Universo “evolui” no tempo, sempre dependendo do estado imediatamente anterior e das leis da Física que nele agem se cada configuração em um determinado instante de tempo depende do instante de tempo imediatamente inferior.

A consequência disso é que cada configuração depende de uma configuração anterior, que **não é determinada pelas próprias leis físicas que pressupõem a existência de tal configuração**. Em outras palavras, o Universo físico é regido por equações que exigem um certo conjunto de parâmetros iniciais, mas os parâmetros precisam ser dados por algo extrínseco ao próprio universo físico. Se as leis da física são como que a “forma” que determina como o Universo irá evoluir, as condições iniciais são como que a “matéria” – a evolução será diferente dependendo da matéria envolvida, assim como uma vitamina será diferente conforme os ingredientes forem diferentes. Isso vale também, de modo ainda mais peremptório, para o caso no qual a matéria é gerada do nada.

Agora, precisamos analisar a natureza desse algo extrínseco que dá as condições iniciais. Se ele é quem dá as condições iniciais, temos duas hipóteses – ou ele é também uma realidade “física”, que evolui conforme equações e parte de condições iniciais, ou ele é a realidade transcendente mesma. Como a primeira hipótese levará a uma causa transcendente à causa transcendente, a consequência seria uma cadeia potencialmente infinita de “geradores” de condições iniciais. Tal retorno ao infinito é absurdo, pois não responde nada, nunca acharíamos uma causa transcendente, pois o Universo físico está aí e sua “evolução” parte mesmo de um conjunto de condições iniciais.

Ora, como uma realidade essencialmente existente (que é o que estamos buscando) não compõe mudanças, tal “causa” da escolha das condições iniciais do movimento ou evolução do Universo físico não pode ser “parte” deste mesmo Universo, pois este é claramente não-necessário: o Universo poderia ser diferente, a estrela x poderia estar na posição y , etc. Entretanto, a causa dessas condições iniciais permanece para sempre “unida” ao mesmo Universo físico.

Além do mais, as próprias leis que regem o movimento ou a evolução do Universo físico, não têm fundamento em si mesmas! Não são as condições iniciais definidas “de fora” que geram as leis físicas, “formais”, que determinarão a sua evolução. As próprias leis da Física são “extrafísicas”, são inerentes de uma causa externa à matéria na qual age – algo, Alguém, fez os objetos interagirem do modo que interagem. Assim, essa causa postulou a configuração inicial do Universo e também as leis que fariam este mesmo Universo entrar em movimento. “Deus não se move, mas nada se moveria se Deus não lhe fizesse entrar em movimento”

Para acompanhar o argumento na íntegra, pode-se acessar o seguinte endereço eletrônico:

<https://ictys.blogspot.com/2018/09/zubiri-sobre-fisica-contemporanea-e.html>

Assim, a própria estrutura da cosmologia moderna, sua estrutura matemática, apontam para uma causa transcendente, extrínseca a esse mesmo Universo e que **possui ser por essência**. No fim das contas, tudo retorna ao postulado fundamental enunciado de modo simples pelo filósofo Mario Ferreira dos Santos, ainda que sua filosofia tenha seguido por caminhos perigosos: “Algo existe, o nada absoluto não existe”. Se algo existe, é porque alguma coisa **precisava** existir, porque alguma coisa existe “por definição”, por essência. Se não fosse esse o caso, nada existiria, e do nada, nada surge (porque não possui em si nem potencialidades e nem nada para atualizá-lo – se houvesse algo, não seria nada!).

Se se compreende isto, se compreende qualquer argumento filosófico para a existência de Deus.



*Imagem da galáxia de Andrômeda, que se encontra a 2 milhões de anos-luz de nós.
Essa é a galáxia grande mais próxima da nossa galáxia.*

ATIVIDADES

- Explique, com suas próprias palavras, porque o nada absoluto não pode existir. Alguns cientistas, como Peter Atkins, afirmam que a origem do Universo está em uma sorte de “vácuo quântico” do qual podem brotar partículas espontaneamente. Ele afirma que isso é uma “criação do nada”. Por que ele está enganado? Explique.
- O que significa dizer que a existência de algo é “necessária”? A nossa existência é “necessária” no sentido filosófico? Justifique.



Nossa Senhora Auxiliadora, rogai por nós!

Santíssima Virgem Maria a quem Deus constituiu
Auxiliadora dos Cristãos,
nós vos escolhemos como Senhora e
Protetora desta casa.

Dignai-vos mostrar aqui Vosso auxílio poderoso.

Preservai esta casa de todo perigo: do incêndio, da
inundação, do raio, das tempestades,
dos ladrões, dos malfeitores, da guerra e de todas as
outras calamidades que conheceis.

Abençoi, protegei, defendei, guardai como coisa vossa
as pessoas que vivem nesta casa.

Sobretudo concedei-lhes a graça mais importante,
a de viverem sempre na amizade de Deus,
evitando o pecado.

Dai-lhes a fé que tivestes na Palavra de Deus,
e o amor que nutristes para com Vosso Filho Jesus e
para com todos aqueles pelos quais
Ele morreu na Cruz.

Maria, Auxílio dos Cristãos, rogai por todos que
moram nesta casa que Vos foi consagrada.

Amém.