
ENSINO MÉDIO

– 1º ANO –

MATEMÁTICA

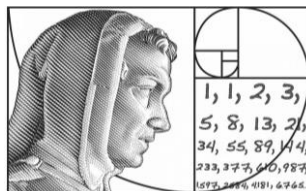
VOLUME 1

Apostila do 1º ano do Ensino Médio, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.





MATEMÁTICA



AULA 04

TIPOS DE CONJUNTOS

Nesta aula estudaremos alguns tipos de conjuntos, são eles: conjunto unitário, conjunto vazio, conjunto universo, subconjunto, conjuntos iguais.

CONJUNTO UNITÁRIO

Definição: São todos os conjuntos que possuem apenas um elemento.

Exemplo 1: O conjunto de todos os elementos da Igreja Católica que são chefes de estado.

$$S = \{\text{Papa}\}$$

Exemplo 2: O conjunto dos divisores de 1, inteiros e positivos:

$$S = \{1\}$$

Exemplo 3: O conjunto das soluções da equação $4x + 5 = 21$.

$$S = \{4\}$$

Exemplo 4: O conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai.

$$S = \{\text{Rio Grande do Sul}\}$$

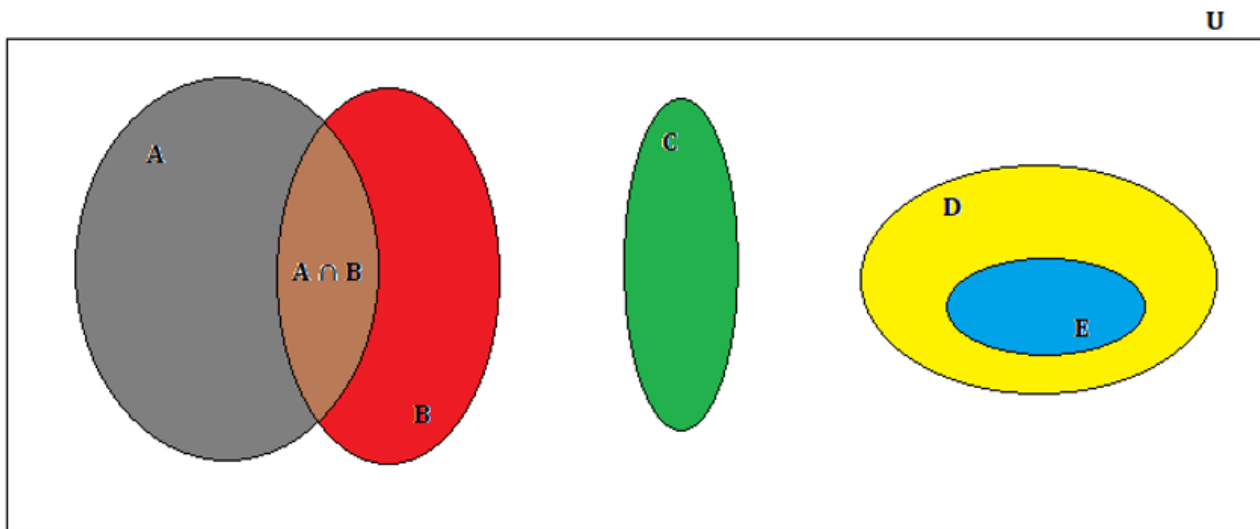
CONJUNTO VAZIO

Definição: São todos os conjuntos que não possuem elementos.

O conjunto vazio possui duas notações: $\emptyset$ ou $\{\}$.

CONJUNTO UNIVERSO

Definição: É o conjunto de todos os valores que a variável pode assumir e é representado pela letra U.



Assim, se estivermos resolvendo um problema cuja solução seja um número real, o conjunto universo é $\mathbb{R}$. Se a solução for do conjunto dos inteiros, o conjunto universo será $\mathbb{Z}$.

Porém, se o problema for de Geometria Plana, então o conjunto universo será o plano α .

Com isso, para descrever um conjunto é fundamental fixar o conjunto universo U em que estiver trabalhando:

$$A = \{x \mid x \in U \text{ e tem a propriedade } P\}$$

Vejamos alguns exemplos sobre conjunto universo:

Exemplo 1: Conjunto Universo = $U = \mathbb{Z}$

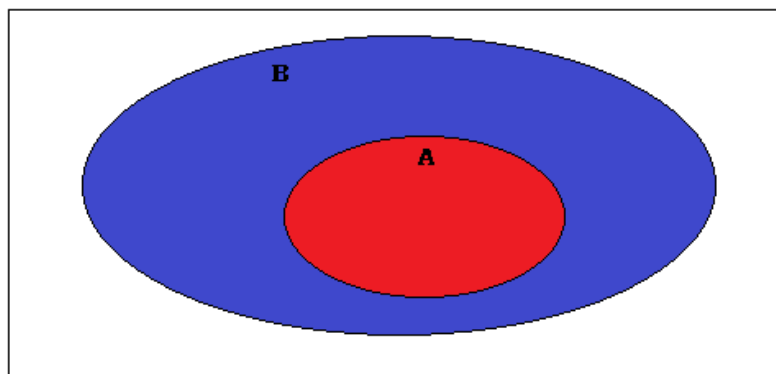
$$A = \{\underline{x} \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq x \leq 500\}$$

Exemplo 2: $U = \mathbb{R}$

$$B = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ e } y < 3\}$$

SUBCONJUNTO

Definição: Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A pertencer também a B.



Notação: $A \subset B$

Lê-se: A está contido em B

A notação $A \subset B$ diz que o conjunto **A** é subconjunto do conjunto **B**.

Observação 1: O símbolo $\subset$ é denominado **signal de inclusão** ou **contido**.

Observação 2: Quando o conjunto **A** não está contido no conjunto **B** usamos a notação $\not\subset$, ou seja, $A \not\subset B$.

Usando a notação acima e símbolos matemáticos podemos também definir subconjunto, como segue abaixo:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Vejamos alguns exemplos de subconjuntos:

Exemplo 1: Seja o conjunto $A = \{a, b\}$ e o conjunto $B = \{a, b, c\}$.

Logo,

$$A \subset B = \{a, b\} \subset \{a, b, c\}$$

todos os elementos do conjunto **A** pertencem ao conjunto **B**.

Exemplo 2: Seja o conjunto $C = \{m\}$ e o conjunto $D = \{m, n\}$.

Logo,

$$C \subset D = \{m\} \subset \{m, n\}$$

o único elemento do conjunto **C** pertence ao conjunto **D**.

Exemplo 3: Seja o conjunto $E = \{e, f\}$ e o conjunto $F = \{e, f\}$.

Logo,

$$E \subset F = \{e, f\} \subset \{e, f\}$$

todos os elementos do conjunto **E** pertencem ao conjunto **F**.

Exemplo 4: Seja o conjunto $G = \{i, j, k, l, m\}$ e o conjunto $H = \{i, j, k\}$.

Logo,

$$G \not\subset H$$

todos os elementos do conjunto **G** não pertencem ao conjunto **H**.

Porém,

$$H \subset G$$

todos os elementos do conjunto H pertencem ao conjunto G.

Exemplo 5: Seja o conjunto $I = \{x / x \text{ é inteiro e ímpar}\}$ e o conjunto $J = \{y / y \in \mathbb{Z}\}$.

Logo,

$$I \subset J$$

todos os elementos do conjunto I pertencem ao conjunto J.

CONJUNTOS IGUAIS

Definição 1: Dois conjuntos são ditos iguais quando todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto B e todos os elementos do conjunto B pertencem ao conjunto A.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Todo elemento de A é elemento de B e vice-versa.

Podemos definir de outra maneira os Conjuntos Iguais, utilizando a definição de subconjunto. Vejamos esta nova definição:

Definição 2: Dois conjuntos são ditos iguais quando um conjunto A é subconjunto de B e B é subconjunto de A.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

Portanto, há duas maneiras de demonstrar que dois conjuntos são iguais:

1ª Maneira: Mostrar que todo elemento de A é elemento de B e vice-versa.

2ª Maneira: Mostrar que um conjunto é subconjunto do outro e vice-versa.

Antes de analisarmos em algumas das propriedades da inclusão (contido), vejamos alguns exemplos de Conjuntos Iguais:

Exemplo 1: Seja o $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $B = \{b, d, e, a, c, f, g\}$. São conjuntos iguais?

Resolução: Podemos observar que todos os elementos de A pertencem a B e também vice-versa. Com isso, os conjuntos A e B são iguais, ou seja, $A = B$.

Exemplo 2: Seja $C = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ e $D = \{x / x \text{ é inteiro, positivo e ímpar}\}$. São conjuntos iguais?

Resolução: No conjunto C todos os números são ímpares, ou seja, é o conjunto dos números ímpares. A propriedade D nos diz que os elementos deste conjunto são inteiros, positivos e ímpares, ou seja, este conjunto engloba apenas e todos os números ímpares.

Portanto, $C = D$.

Exemplo 3: Seja $E = \{x / 2x + 1 = 5\}$ e $F = \{2\}$. São conjuntos iguais?

Resolução: No conjunto E a propriedade é uma equação do 1º Grau. Resolvendo esta equação obtemos $x = 2$, ou seja, o conjunto E possui um único elemento, o 2. Assim, temos $E = F$. Portanto, E e F são conjuntos iguais.

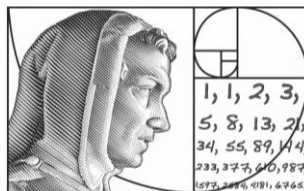
Exemplo 4: Seja $G = \{x / 3x + 2 = 5\}$ e $H = \{3\}$. São conjuntos iguais?

Resolução: No conjunto G a propriedade é uma equação do 1º Grau. Resolvendo esta equação obtemos $x = 1$, ou seja, o conjunto E possui um único elemento, o 1. Assim, os elementos do conjunto G e do conjunto H são diferentes e com isso $G \neq H$. Portanto, G e H não são conjuntos iguais.

ATIVIDADES

- 1) Classifique em conjunto vazio ou conjunto unitário:
 - a) $A = \{\text{polígonos que possuem três lados}\}$.
 - b) $B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } 12 < x < 13\}$
 - c) $C = \{x / x \text{ é par e } 7 < x < 9\}$
 - d) $D = \{\text{quadriláteros que possuem todos os ângulos obtusos}\}$
 - e) $E = \{x / x \text{ é número primo e } 90 < x < 96\}$
- 2) Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) cada sentença abaixo e justifique.
 - a) $A \subset D$
 - b) $A \subset B$
 - c) $B \subset C$
 - d) $B \subset D$
 - e) $C = D$
 - f) $A \not\subset C$
- 3) Faça um Diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A , B , C , D são conjuntos não vazios e $D \subset C \subset B \subset A$.
- 4) O conjunto formado pelos algarismos pares do número 31657:
 - a) É vazio.
 - b) É unitário.
 - c) Possui 3 elementos.
 - d) Possui 5 elementos.

- 5) Dos conjuntos abaixo, qual deles é vazio?
- a) $A = \{\text{número natural compreendido entre 13 e 15}\}$
 - b) $B = \{\text{número natural par compreendido entre 11 e 13}\}$
 - c) $C = \{\text{dias da semana que começam pela letra d}\}$
 - d) $D = \{\text{dias da semana que começam pela letra r}\}$



AULA 07

OPERAÇÃO COM CONJUNTOS PARTE II

DIFERENÇA DE CONJUNTOS

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se **diferença entre A e B** o **conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B**.

$$A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Vejamos alguns exemplos sobre Diferença de Conjuntos:

Exemplo 1: Seja o conjunto $A = \{a, b, c\}$ e o conjunto $B = \{b, c, d, e\}$. Quais são os elementos da diferença de conjuntos entre A e B?

Resolução: Os elementos da diferença de conjuntos entre A e B são todos os elementos de A que não pertencem a B, isto é:

$$A - B = \{a\}$$

Exemplo 2: Seja o conjunto $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e o conjunto $D = \{b, c, i\}$. Quais são os elementos da diferença de conjuntos entre C e D?

Resolução: Os elementos da diferença de conjuntos entre C e D são todos os elementos de C que não pertencem a D, isto é:

$$C - D = \{a, d, e, f, g, h\}$$

Exemplo 3: Seja o conjunto $E = \{a, b\}$ e o conjunto $F = \{c, d, e, f\}$. Quais são os elementos da diferença de conjuntos entre E e F?

Resolução: Os elementos da diferença de conjuntos entre E e F são todos os elementos de E que não pertencem a F, isto é:

$$E - F = \{a, b\}$$

Exemplo 4: Seja o conjunto $G = \{a, b, c, d\}$ e o conjunto $H = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Quais são os elementos da diferença de conjuntos entre G e H ?

Resolução: Os elementos da diferença de conjuntos entre G e H são todos os elementos de G que não pertencem a H , isto é:

$$G - H = \emptyset$$

Exemplo 5: Seja o conjunto $I = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ e o conjunto $J = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$. Quais são os elementos da diferença de conjuntos entre I e J ?

Resolução: Os elementos da diferença de conjuntos entre I e J são todos os elementos de I que não pertencem a J , isto é:

$$I - J = \{11, 13, 15\}$$

Exemplo 6: Seja o conjunto $K = \{x / x \in \mathbb{N}\} = \{\text{conjunto dos naturais}\}$ e o conjunto $L = \{2x / x \in \mathbb{N}\} = \{\text{conjunto dos números pares}\}$. Quais são os elementos da diferença de conjuntos entre K e L ?

Resolução: Os elementos da diferença de conjuntos entre K e L são todos os elementos de K que não pertencem a L , isto é:

$$K - L = \{2x + 1 / x \in \mathbb{N}\} = \{\text{conjunto dos ímpares}\}$$

Exemplo 7: Seja o conjunto $M = \{x / x \in \mathbb{Z}\} = \{\text{conjunto dos inteiros}\}$ e o conjunto $N = \{x / x \in \mathbb{N}\} = \{\text{conjuntos dos naturais}\}$. Quais são os elementos da diferença de conjuntos entre M e N ?

Resolução: Os elementos da diferença de conjuntos entre M e N são todos os elementos de M que não pertencem a N , isto é:

$$M - N = \{x / x \in \mathbb{Z}^{-}\} = \{\text{conjunto dos inteiros negativos}\}$$

Exemplo 8: Seja o conjunto $O = \{x / x \in \mathbb{R}\} = \{\text{conjunto dos reais}\}$ e o conjunto $P = \{x / x \in \mathbb{Q}\} = \{\text{conjuntos dos racionais}\}$. Quais são os elementos da diferença de conjuntos entre O e P ?

Resolução: Os elementos da diferença de conjuntos entre O e P são todos os elementos de O que não pertencem a P, isto é:

$$M - N = \{x / x \in I\} = \{\text{conjunto dos irracionais}\}$$

COMPLEMENTAR DE B EM A

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se **complementar de B em A** o conjunto formado por $A - B$ tal que $B \subset A$.

Com o símbolo

$$C_A^B \text{ ou } \bar{B}$$

Lê-se: O complementar de B em relação a A

Note que C_A^B somente é definido para $B \subset A$. Assim, temos:

$$C_A^B = A - B$$

Vejamos alguns exemplos sobre Complementar de um conjunto em relação a outro conjunto:

Exemplo 1: Seja o $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $B = \{b, c, d, e\}$. Quais são os elementos do complementar de B em A?

Resolução: Os elementos do complementar de B em A são todos os elementos de A que não pertencem a B, isto é:

$$C_A^B = A - B = \{a, f, g\}$$

Exemplo 2: Seja o $C = \{a, b, c\}$ e $D = \{a, b, c\}$. Quais são os elementos do complementar de D em C?

Resolução: Os elementos do complementar de D em C são todos os elementos de C que não pertencem a D, isto é:

$$C_C^D = \emptyset$$

Exemplo 3: Seja o $E = \{a, b, c\}$ e $F = \{b, c, d, e\}$. Quais são os elementos do complementar de F em E?

Resolução: Os elementos do complementar de F em E são todos os elementos de E que não pertencem a F, isto é:

$$C_E^F = \{a\}$$

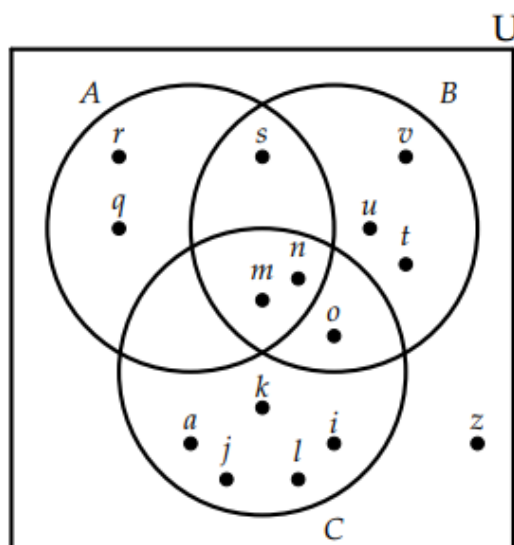
Exemplo 4: Seja o $G = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $H = \{b, c, d, e\}$. Quais são os elementos do complementar de H em G?

Resolução: Os elementos do complementar de H em G são todos os elementos de H que não pertencem a G, isto é:

$$C_G^H = \{a, f, g\}$$

ATIVIDADES

1. Analise o diagrama abaixo e conclua como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das proposições seguintes, justificando as falsas:



- ☐ O conjunto A tem cinco elementos.
- ☐ O conjunto B tem exatamente três elementos.
- ☐ Há três elementos comuns entre B e C.
- ☐ Há exatamente dois elementos comuns aos três conjuntos.
- ☐ Três elementos são exclusivos de A em relação a B e C.
- ☐ $r \in A$.
- ☐ $s \in (A \cap B)$.
- ☐ $\{m, n\} \subset \{A \cap B \cap C\}$.
- ☐ O conjunto A tem 2^6 elementos.
- ☐ $\emptyset \subset B$.
- ☐ $C - B = \{a, i, j, k, l\}$.
- ☐ $(A \cap B) - C$ é um conjunto unitário.

m. (____) $(A \cap C) - B = \emptyset$.

2. Considere os conjuntos $C = \{\text{maçã, banana, cereja, tâmara}\}$ e $D = \{\text{banana, cereja, figo}\}$. Encontre $C - D$ e $D - C$.

3. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Encontre $A - B$ e $B - A$.

4. Considere o conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Dado o conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, encontre o complementar de A em relação a U .

5. Suponha que U seja o conjunto de letras do alfabeto: $U = \{a, b, c, d, e, \dots, z\}$. Dado o conjunto $B = \{b, c, e, g, i\}$, encontre o complementar de B em relação a U .

6. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ e $C = \{b, d, e, g\}$. Determine:

a. $A - B$

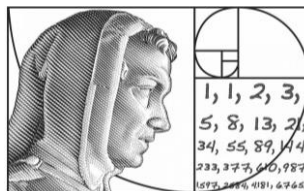
b. $B - A$

c. $C - B$

d. $(A \cup C) - B$

e. $A - (B \cap C)$

f. $(A \cup B) - (A \cap C)$



AULA 10

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS E REAIS



Definição: O **Conjunto dos Números Irracionais** engloba todos os números infinitos não-periódicos, isto é, todo número que **não** pode ser descrito como a divisão de dois inteiros.

Veja alguns exemplos de números que fazem parte do Conjuntos dos Irracionais:

$$I = \{\sqrt{2}; \pi; 0,232526...; 2,354224; \dots\}$$

Agora, iremos demonstrar o motivo para $\sqrt{2}$ ser irracional, tomando como um teorema.

Teorema: $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração: Primeiramente precisamos supor que $\sqrt{2}$ seja racional e com base nesta suposição chegaremos a uma contradição. Logo, a suposição inicial ($\sqrt{2}$ é racional) é falsa. Assim, concluímos que a $\sqrt{2}$ só pode ser irracional.

Supondo que $\sqrt{2}$ seja racional, então podemos escrevê-la como uma fração irredutível.

Seja $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad (\text{Fração Irredutível})$$

Elevando tudo ao quadrado obtemos as seguintes expressões

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = 2b^2$$

Todo número multiplicado por dois é par⁵ e como $a^2 = 2b^2$ então a^2 é **par**.

⁵ Propriedade dos Números Pares.

Se a^2 é par então **a é par**, pois a multiplicação de dois pares resulta em um número par⁶ e a multiplicação de dois números ímpares resulta em um número ímpar⁷.

Assim, podemos escrever **$a = 2k$** . Substituindo a por $2k$ obtemos

$$(2k)^2 = 2b^2$$

$$4k^2 = 2b^2$$

$$2k^2 = b^2$$

$$b^2 = 2k^2$$

Analogamente, temos que b^2 é par e b é par.

Como a e b são pares então $\frac{a}{b}$ não é uma fração irredutível. Assim, temos uma contradição. Logo, $\sqrt{2}$ não é racional.

Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

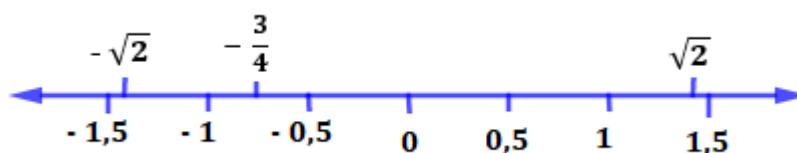
Definição: O **Conjunto dos Números Reais** é a união do Conjunto dos Números Racionais com o Conjunto dos Números Irracionais, isto é, são todos os números racionais e irracionais.

$$\mathbb{R} = \{\mathbb{Q} \cup I\} = \{x / x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in I\}$$

Os números reais vão representar todos os pontos de uma reta, isto é, cada ponto na reta representa um único número real

Assim, temos a **reta real**, que é construída através de uma *correspondência biunívoca* entre os números reais e os pontos da reta.

Observe alguns números reais inseridos na reta real:



6 Propriedade dos Números Pares.

7 Propriedade dos Números Ímpares.

INTERVALOS

Definição: É um conjunto que contém números reais e é limitado por dois extremos que podem estar contidos ou não no mesmo.

Quando **os extremos estão contidos no intervalo**, chamamos *intervalo fechado* e utilizamos a bolinha fechada (•) para representá-lo. Caso contrário, **extremos não estão contidos no intervalo**, chamamos *intervalo aberto* e utilizamos a bolinha aberta (○) para representá-lo.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, podemos definir nove intervalos. Vejamos-os:

1º. Intervalo Aberto: Possui os dois extremos abertos, isto é, a e b não estão contidos neste intervalo.



$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

2º. Intervalo Fechado: Possui os dois extremos fechados, isto é, a e b estão contidos neste intervalo.



$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

3º. Intervalo Fechado à Esquerda: Neste intervalo, os dois extremos são diferentes: fechado à esquerda, isto é, o a está contido no intervalo. Enquanto isso, o b é aberto, ou seja, o b não está contido no intervalo.



$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

4º. Intervalo Fechado à Direita: Neste intervalo, os dois extremos são diferentes: fechado à direita, isto é, o b está contido no intervalo. Enquanto isso, o a é aberto, ou seja, o a não está contido no intervalo.



$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

5º. Semirreta Esquerda Fechada: Este intervalo é limitado por $-\infty$ e b . O b é fechado, isto é, está contido neste intervalo.



$$(-\infty, b] =]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$$

6º. Semirreta Esquerda Aberta: Este intervalo é limitado por $-\infty$ e b . O b é aberto, isto é, não está contido neste intervalo.



$$(-\infty, b) =]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$$

7º. Semirreta Direita Fechada: Este intervalo é limitado por a e $+\infty$. O a é fechado, isto é, está contido neste intervalo.



$$[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

8º. Semirreta Direita Aberta: Este intervalo é limitado por a e $+\infty$. O a é aberto, isto é, não está contido neste intervalo.



$$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

9º. Reta Real: É o intervalo que integra toda a reta real, isto é, este intervalo é o próprio Conjunto dos Números Reais, pois todos os números reais estão contidos na reta real.



$$(-\infty, +\infty) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

Observação 1: Qualquer intervalo de extremos **a** e **b**, com **a** $\neq$ 0, contém números racionais e irracionais.

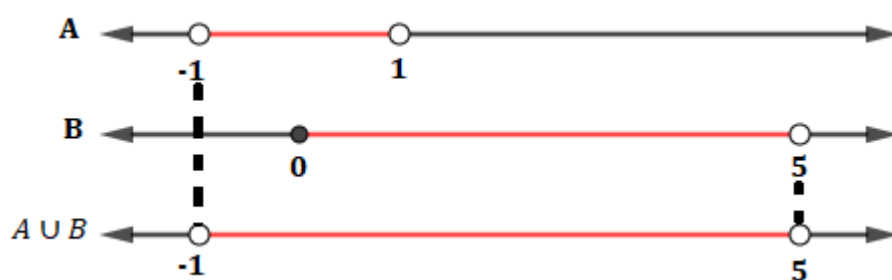
Observação 2: $-\infty$ e $+\infty$ não são números reais, apenas fazem parte dos intervalos ilimitados.

OPERAÇÃO COM INTERVALOS

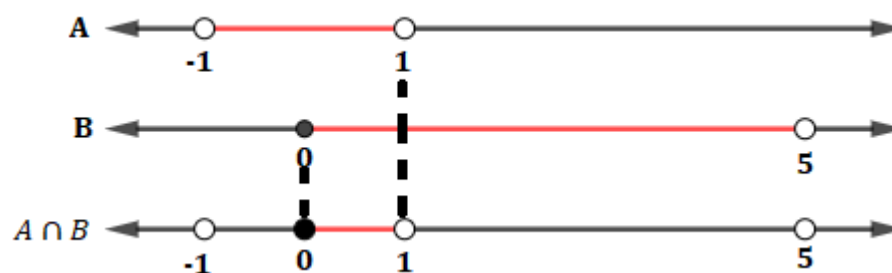
Como o intervalo é um subconjunto de $\mathbb{R}$ então podemos fazer união, interseção e a diferença dos intervalos, como veremos a seguir:

Dados $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}$ e $B = [0, 5[$, vamos determinar o conjunto $A \cup B$, $A \cap B$ e $A - B$.

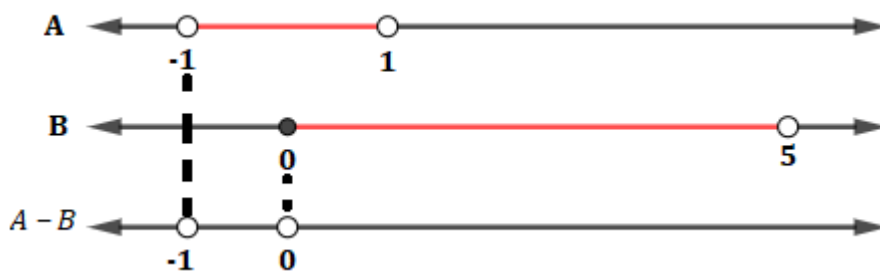
Exemplo 1: Façamos o cálculo $A \cup B$ para os dados acima:



Exemplo 2: Façamos o cálculo $A \cap B$ para os dados acima:



Exemplo 3: Calculemos $A - B$ para os dados acima:



ATIVIDADES

1. Marque as proposições abaixo com V para verdadeira e F para falso:

a. $0 \in \mathbb{N}$.

b. $(4 - 7) \in \mathbb{N}$.

c. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

d. $\mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$.

e. $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}^+$.

f. $(-2)^3 \in \mathbb{N}$.

g. $(-125) \cdot (-14) \in \mathbb{Z}^+$.

h. $1,9999 \dots \in \mathbb{Q}$.

i. $(50 - 28) \in \mathbb{Z}$.

j. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

k. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$.

l. $0 \in \mathbb{Q}$.

m. $14\,287 \in \mathbb{Q}$.

n. $0,525252 \dots \in \mathbb{Q}$.

o. $\left\{\frac{43}{81}, \frac{121}{7}\right\} \subset \mathbb{Q}$.

p. $2 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

q. $\frac{3}{17} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

r. $\frac{4}{2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$.

s. $\frac{21}{49}$ é *irredutível*.

t. $\frac{1}{4} < \frac{13}{15}$

u. $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$

v. $-9 \in \mathbb{R}$

w. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

x. $I \subset \mathbb{R}$

y. $\frac{1}{27} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

z. $\sqrt{169} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

aa. $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

bb. $(\sqrt{16} - 2\sqrt{2}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

cc. $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

dd. $\frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$

2. Mostre que $\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})} = 1 + \sqrt{3}$.

3. Prove que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

4. Represente graficamente na reta real os seguintes intervalos:

a. $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

b. $] -\infty, 2]$

c. $[-3, \frac{1}{2}]$

d. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$

e. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$

f. $] -\sqrt{5}, \sqrt{5} [$

g. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4\}$

h. $[0, 6[$

5. Dados $A =] -5, 2]$, $B = [-6, 6]$ e $C =] -\infty, 2]$, calcule:

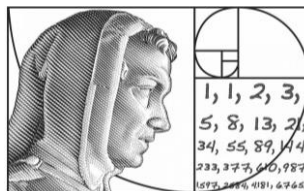
a. $A \cup B \cup C$

b. $A \cap B \cap C$

c. $(A \cup B) \cap C$

d. $A \cap (B \cup C)$

6. Dados os intervalos $A = [-1, 4)$, $B = [1, 5]$, $C = [2, 4]$ e $D = (1, 3]$, verifique se $1 \in (A \cap B) - (C - D)$.



AULA 14

O DIAGRAMA DE FLECHAS



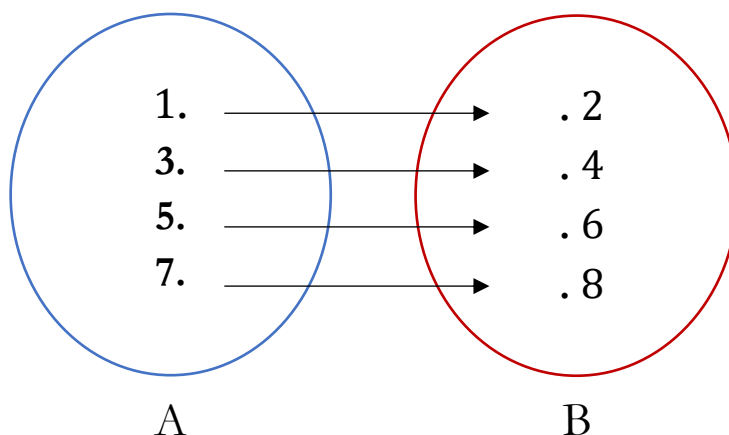
imos na aula anterior que uma relação na matemática é uma associação entre dois conjuntos, isto é, um subconjunto de um produto cartesiano.

Podemos representar as relações através de um diagrama de flechas.

Definição: O diagrama de flechas é a representação de dois conjuntos em forma de elipses cujos elementos de cada conjunto se encontram no interior da elipse e a correspondência entre esses elementos é representada por uma flecha.

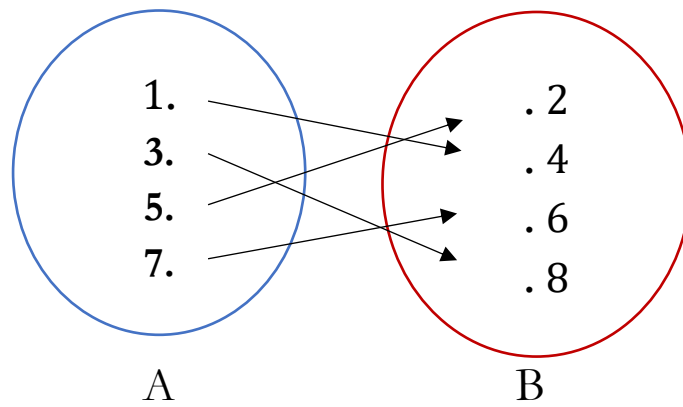
Exemplos:

1. Seja o conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e o conjunto $B = \{2, 4, 6, 8\}$. A relação entre esses conjuntos é dado pela soma de uma unidade dos elementos do conjunto A.



Com isso, formamos os seguintes pares ordenados: (1,2), (3,4), (5,6) e (7,8).

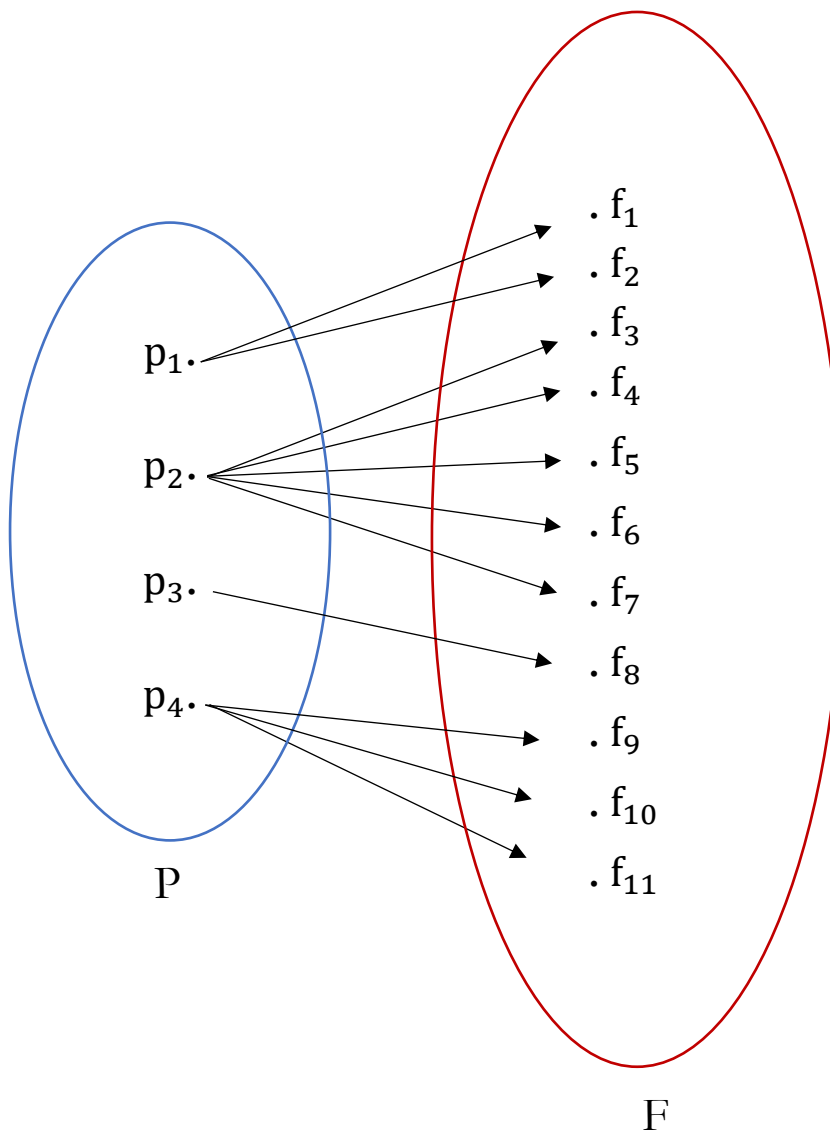
2. Seja o conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e o conjunto $B = \{2, 4, 6, 8\}$ vejamos uma outra relação com esses conjuntos através do diagrama de flechas.



Com isso, formamos os seguintes pares ordenados: (1,4), (3,8), (5,2) e (7,6).

3. Seja o conjunto P o conjunto dos pais, dados por $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, onde p_1 é o pai 1, p_2 é o pai 2 e assim por diante, e o conjunto F é o conjunto dos filhos que é dado por $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}\}$. O pai 1 possui dois filhos, o pai 2 possui 5 filhos, o pai 3 possui 1 filho e o pai 4 possui 3 filhos. Considerando o conjunto dos pais e dos filhos, monte as seguintes relações com o diagrama de flechas.

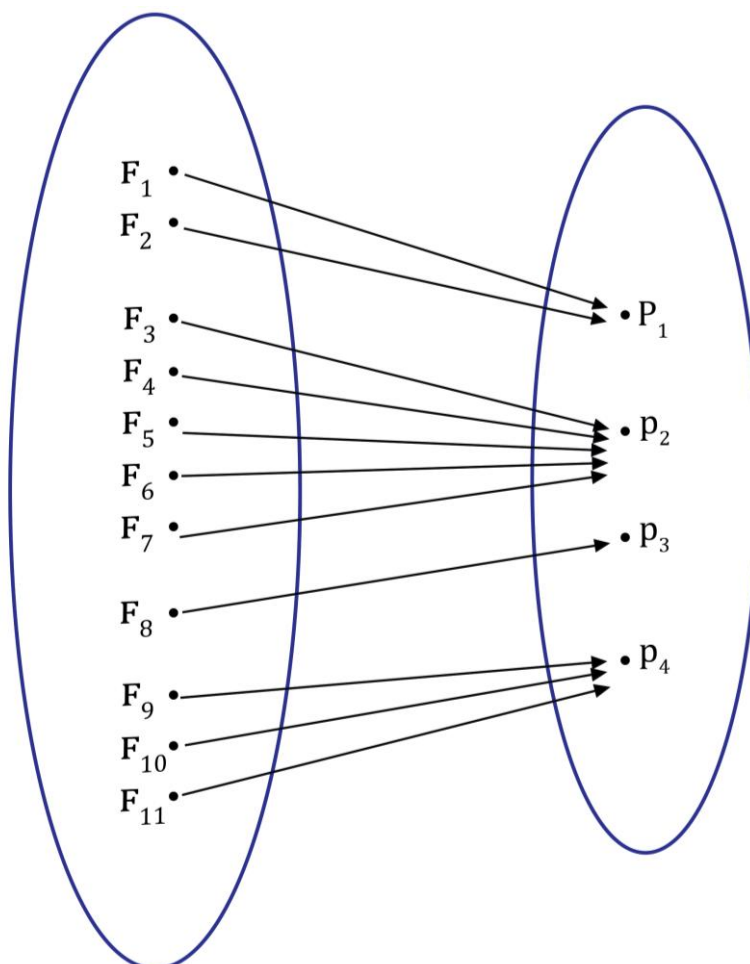
a) A que associa cada pai com o seu filho.



Considerando f_1 e f_2 sendo filhos do pai 1; f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 sendo filhos do pai 2; f_8 sendo filho do pai 3; e f_9, f_{10}, f_{11} sendo filhos do pai 4; podemos formar os seguintes pares ordenados:

$$(p_1, f_1), (p_1, f_2), (p_2, f_3), (p_2, f_4), (p_2, f_5), (p_2, f_6), (p_2, f_7), (p_3, f_8), (p_4, f_9), (p_4, f_{10}), (p_4, f_{11})$$

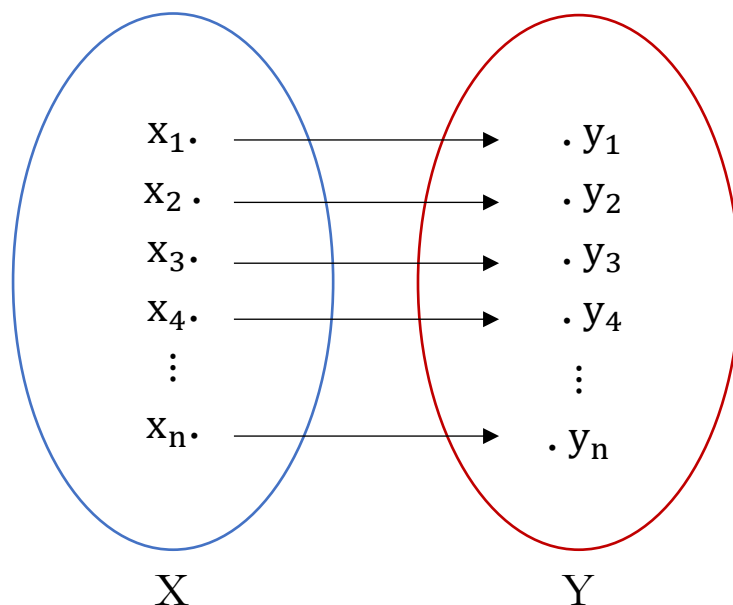
b) A que associa a cada filho com o seu pai.



Temos os seguintes pares ordenados:

$$(f_1, p_1), (f_2, p_1), (f_3, p_2), (f_4, p_2), (f_5, p_2), (f_6, p_2), (f_7, p_2), (f_8, p_3), (f_9, p_4), (f_{10}, p_4), (f_{11}, p_4)$$

4. Seja os conjuntos $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n\}$. Vejamos uma relação entre esses conjuntos através do diagrama de flechas.



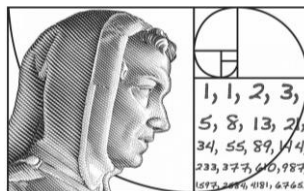
Com isso, formamos os seguintes pares ordenados: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) ..., (x_n, y_n) .

Observação: Os diagramas das flechas nos ajudam a entender melhor os conceitos de: domínio, contradomínio, imagem e função que estudaremos ao longo deste volume.

ATIVIDADES

1. Construa um diagrama de flechas relacionando o conjunto A com o conjunto B tal que $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ e B o conjunto dos números primos até o número 20. A relação desses conjuntos é dada pelo primeiro par flechando o primeiro primo; o segundo par flecha o segundo primo e assim por diante.
2. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, represente pelo diagrama de flechas a relação $R = \{(x, y) | x < y\}$ de A em B .
3. Seja $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, represente pelo diagrama de flechas a relação $R = \{(x, y) | x | y\}$ de A em B .
4. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, represente pelo diagrama de flechas a relação R de A em B definida como $xRy \Leftrightarrow y = x + 2$.
5. Seja $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, represente pelo diagrama de flechas a relação binária de A em B definida por:
 - a) $xRy \Leftrightarrow x + y = 2$.
 - b) $xSy \Leftrightarrow x^2 = y$.
 - c) $xTy \Leftrightarrow |x| = |y|$.
 - d) $xVy \Leftrightarrow x + y > 2$.
 - e) $xWy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 1$.

6. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Construa o gráfico cartesiano da relação R em A definida por $xRy \Leftrightarrow x$ e y são primos entre si.



AULA 18

DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO REAL



nessa aula estudaremos o domínio de uma função real.

Definição: O domínio de uma função real é o subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual todas as operações indicadas em $f(x) = y$ são possíveis.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos:

1. Encontre o domínio da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x$.

Resolução: Como $4x$ é possível para todo $\mathbb{R}$, então temos que:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

2. Encontre o domínio da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{3x - 6}$.

Resolução: Como $\sqrt{3x - 6}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $3x - 6 \geq 0$, isto é, $x \geq 2$, então

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$$

3. Encontre o domínio da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3}{x+2}$

Resolução: Como $(x + 2)$ é o denominador, não pode ser nulo, então temos que $x + 2 \neq 0$, isto é, $x \neq -2$. Portanto,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2\}$$

4. Encontre o domínio da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\sqrt{2x-8}}{\sqrt{x+1}}$.

Resolução: Nesse exemplo devemos analisar o numerador e o denominador, pois ambos possuem raízes quadradas. Assim, no numerador, o radicando da raiz quadrada não pode ser negativo, ou seja, ele tem que ser maior ou igual a zero. E no denominador o radicando deve ser maior que zero, pois o denominador não pode ser nulo.

Com isso, $\sqrt{2x - 8}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $2x - 8 \geq 0$, isto é, $x \geq 4$.

E também, $\sqrt{x + 1}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $x + 1 > 0$, isto é, $x > -1$. Portanto,

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 4\} =] - 1, 4]$$

ATIVIDADES

1. Dê o domínio das seguintes funções reais:

a) $f(x) = 5x + 3$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \frac{5}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

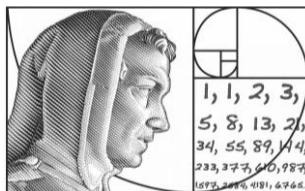
f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

g) $f(x) = \sqrt{x+2}$

h) $f(x) = \sqrt{5x-3}$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$



AULA 24

AVALIAÇÃO 1º EM – VOLUME 2

1. Dados os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 4\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 1\}$$

Represente graficamente os seguintes produtos:

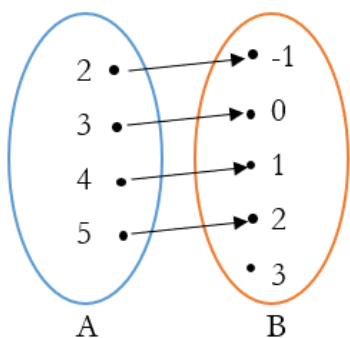
- a) $A \times B$
- b) $A \times C$
- c) $B \times C$
- d) $C \times B$

2. Seja $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, quais são os elementos da relação binária de A em B definida por:

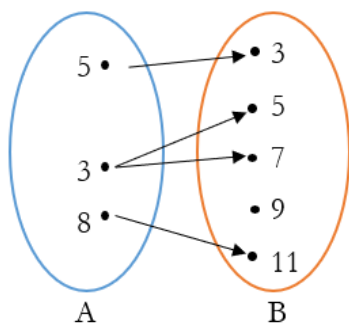
- a) $xRy \Leftrightarrow x + y = 2$.
- b) $xVy \Leftrightarrow x + y > 2$.

3. Diga se os diagramas são uma função de A em B e identifique o domínio, contradomínio, imagem de cada função e classifique as funções em injetora, sobrejetora e bijetora.

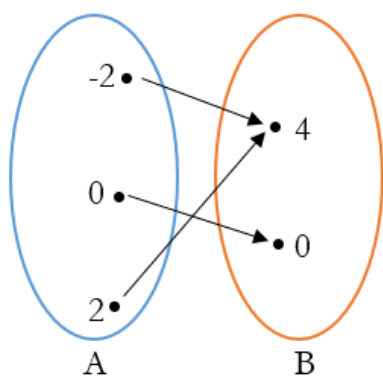
a)



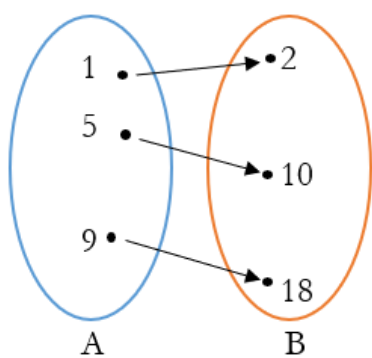
b)



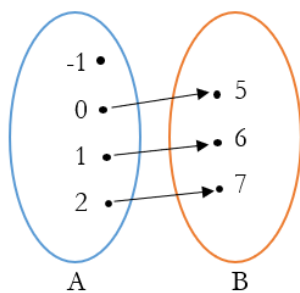
c)



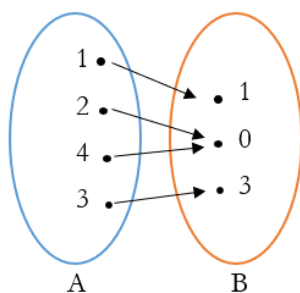
d)



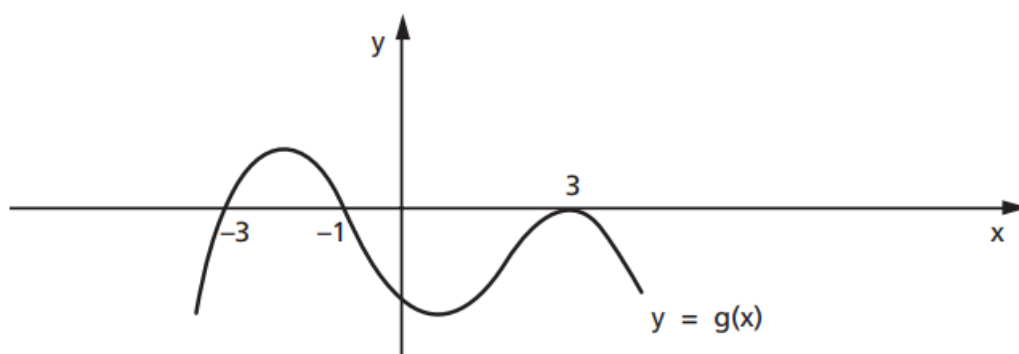
e)

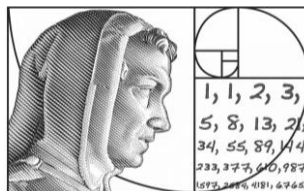


f)



4. Classifique como injetora, sobrejetora e bijetora as funções do exercício anterior.
5. Obtenha a equação da reta que passa pelo ponto $(-7,3)$ e tem coeficiente linear igual a 4.
6. Diga se a função é crescente ou decrescente e faça a análise do sinal da função afim:
- a) $f(x) = -2x - 5$
 - b) $g(x) = \frac{4-3x}{2}$
 - c) $h(x) = x - \sqrt{5}$
7. Construa o gráfico das funções abaixo:
- a) $f(x) = x + 2$
 - b) $g(x) = -3x + 1$
 - c) $h(x) = \frac{2x}{3}$
 - d) $t(x) = -\frac{x}{2} + 2$
8. Demonstre que o gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ é uma reta.
9. Estude os sinais das funções definidas em $\mathbb{R}$:
- a) $y = 4 - x$
 - b) $y = 5 + x$
 - c) $y = 3 - \frac{x}{2}$
 - d) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{2}$
 - e) $y = 2x - \frac{4}{3}$
10. Estude o sinal da função cujo gráfico esta representado abaixo.





AULA 25

INEQUAÇÃO DO 1º GRAU



esta aula, estudaremos as inequações do 1º grau e a função quadrática.

Iniciaremos estudando a definição de inequação do 1º grau e suas propriedades.

Primeiramente iremos entender a etimologia e o significado de inequação para depois adentrarmos na operação da inequação do 1º grau.

Inequação é uma palavra cuja etimologia vem da adição do prefixo in com a palavra equação.

O prefixo in é um prefixo de oposição, de negação; já a palavra equação é uma palavra cuja etimologia vem do latim *AEQUARE*, que significa igualar.

Toda vez que estudamos algo, devemos meditar sobre o seu significado, e não apenas o significado referente à matéria; devemos ir além, contemplar e meditar o significado das coisas.

Como a palavra inequação é oposição à palavra equação, o seu significado consiste em desigualdade.

Definição: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções cujo domínio são os $\mathbb{R}$. Chamamos de inequações as funções matemáticas que expressam uma desigualdade, isto é, todas as sentenças abaixo:

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) < g(x)$$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$f(x) \leq g(x)$$

São quatro os tipos de desigualdades:

$$a > b \text{ lê-se “} a \text{ maior que } b\text{”};$$

$$a < b \text{ lê-se “} a \text{ menor que } b\text{”};$$

$$a \geq b \text{ lê-se “} a \text{ maior que ou igual } b\text{”};$$

$$a \leq b \text{ lê-se “} a \text{ menor que ou igual } b\text{”}.$$

INEQUAÇÃO DO 1º GRAU

Definição: Uma inequação do 1º grau é toda desigualdade que envolve funções cuja incógnita esteja em primeiro grau.

Exemplos:

1. A sentença $2x - 8 > 4x$ é uma inequação?

Resolução: A sentença $2x - 8 > 4x$ é uma inequação, pois temos o sinal de desigualdade e $f(x) = 2x - 8$ e $g(x) = 4x$.

2. A sentença $-4x + 3 < -x + 5$ é uma inequação?

Resolução: A sentença $-4x + 3 < -x + 5$ é uma inequação, pois temos o sinal de desigualdade e $f(x) = -4x + 3$ e $g(x) = -x + 5$.

3. A sentença $x - 10 \geq 6x + 1$ é uma inequação?

Resolução: A sentença $x - 10 \geq 6x + 1$ é uma inequação, pois temos o sinal de desigualdade e $f(x) = x - 10$ e $g(x) = 6x + 1$.

4. A sentença $2x + 5 = 3x - 2$ é uma inequação?

Resolução: A sentença $2x + 5 = 3x - 2$ não é uma inequação, pois tem o sinal de igual.

Observação: Chama-se **Conjunto Universo** todos os possíveis valores que uma incógnita de uma equação ou inequação pode assumir.

Observação: Chama-se **Conjunto Solução** os valores que solucionam a inequação.

Observação: A solução de uma inequação é um intervalo de valores.

PROPRIEDADES DAS INEQUAÇÕES

Vamos estudar agora as propriedades das inequações do 1º grau:

1ª) Dados $x, y \in \mathbb{R}$ existe apenas uma das possibilidades abaixo:

$$x = y$$

$$x > y$$

$$x < y$$

2ª) (Transitiva) Se $x > y$ e $y > z$ então $x > z$.

3ª) (Soma) Se $x > y$ então para todo $z \in \mathbb{R}$ temos que $x + z > y + z$.

4ª) (Produto) Se $x > y$ então para todo $z \in \mathbb{R}_+$ temos que $x \cdot z > y \cdot z$.

5ª) (Produto negativo) Se $x > y$ então para todo $z \in \mathbb{R}_-$ temos que $x \cdot z < y \cdot z$.

6ª) Se $x \neq 0$ então $x^2 > 0$.

7ª) Se $0 < x < y$ então para todo $x, y \in \mathbb{R}_+$ temos que $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

ATIVIDADES

1. Estude os sinais das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 4x - 8$

b) $f(x) = -x + 1$

c) $f(x) = 2x - 1$

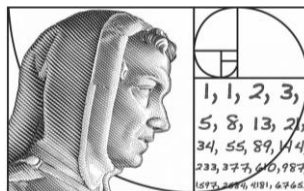
d) $f(x) = -7x - 5$

e) $f(x) = 3x - 2$

f) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{2}$

2. Defina inequação.

3. Defina as propriedades das inequações e dê dois exemplos de cada.



AULA 32

SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Nesta aula, estudaremos o sinal da função quadrática. Vimos que as funções quadráticas apresentam a seguinte forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0$$

Os valores de x podem variar, isto é, para cada elemento do domínio que x assume, existe uma única imagem $f(x)$. Dependendo do valor que x assume, o valor da função $f(x)$ pode variar de três formas: positivo, negativo ou nulo.

Para sabermos quando a função quadrática é positiva, negativa ou nula, devemos fazer um estudo do sinal dessa função.

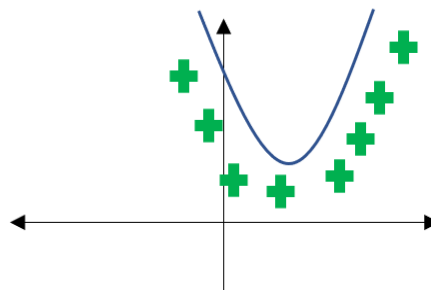
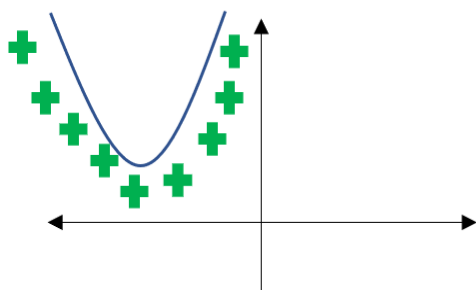
Definição: Estudar o sinal de uma função quadrática consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa, os intervalos nos quais a função tem imagem positiva e quando a imagem é nula.

Para determinarmos o sinal da função quadrática devemos analisar o discriminante e o coeficiente a . Como o discriminante possui três casos para ser analisado, iremos dividir em três casos o estudo do sinal da função quadrática.¹

1º CASO: $\Delta < 0$

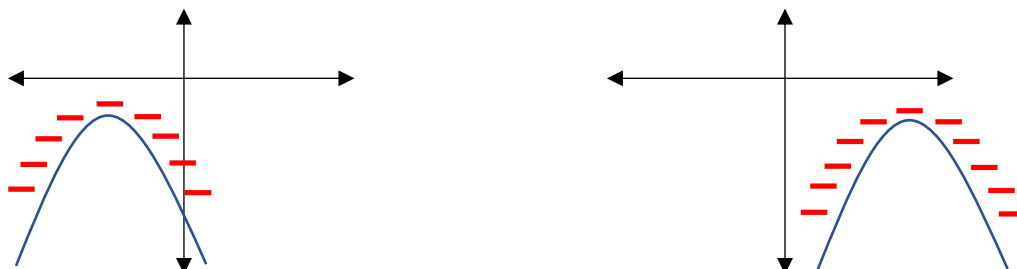
Nesse caso, o discriminante é menor do que zero, então a função não possui soluções reais, fazendo com que a parábola não intercepte o eixo das abscissas.

Quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima fazendo com que a função assumira valores somente positivos ($f(x) > 0$).



Observação: Notem que nos dois gráficos, todos os valores de $f(x)$ são positivos, por causa do $a > 0$ e do $\Delta < 0$.

Quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo fazendo com que a função assumam valores somente negativos ($f(x) < 0$).

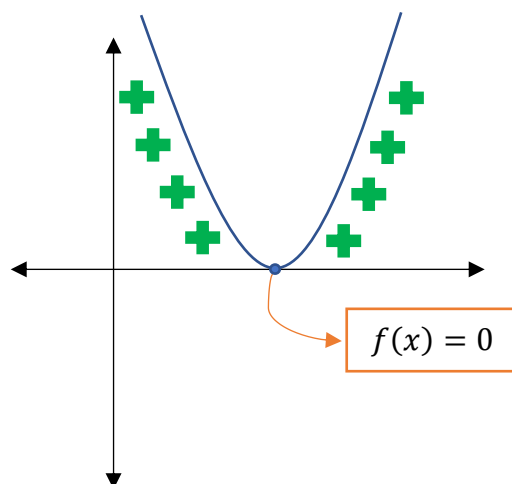


Observação: Notem que nos dois gráficos, todos os valores de $f(x)$ são negativos, por causa do $a < 0$ e do $\Delta < 0$.

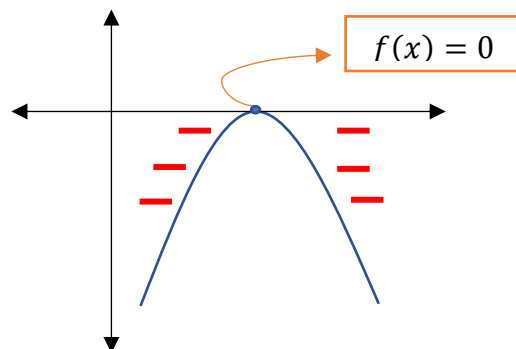
2º CASO: $\Delta = 0$

Nesse caso, o discriminante é igual a zero, então a função possui uma única solução real, isto é, $x_1 = x_2$, fazendo com que a parábola intercepte o eixo das abscissas em um único ponto.

Quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima fazendo com que a função assumam valores positivos e um valor nulo ($f(x) \geq 0$).



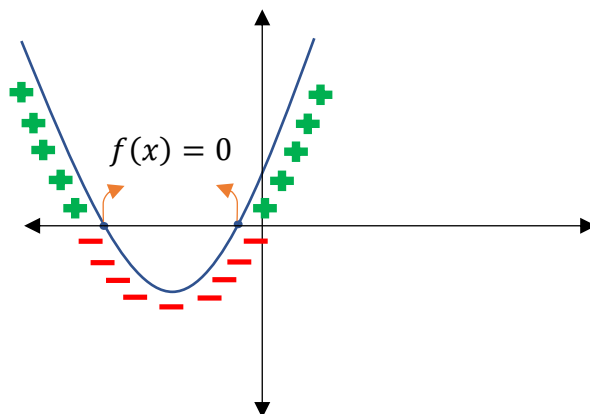
Quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo fazendo com que a função assumam valores negativos e um valor nulo ($f(x) \leq 0$).



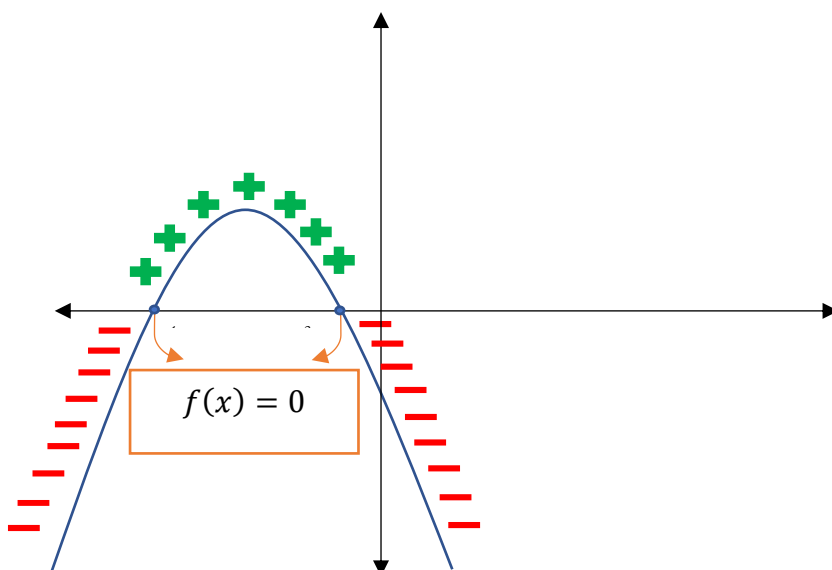
3º CASO: $\Delta > 0$

Nesse caso, o discriminante é maior que zero, então a função possui duas soluções reais, x_1 e x_2 , fazendo com que a parábola intercepte o eixo das abscissas em dois pontos.

Quando $a > 0$, a concavidade é voltada para cima fazendo com que a função assumam dois valores nulos ($f(x) = 0$), valores positivos (para todo $x < x_1$ e para todo $x > x_2$) e valores negativos ($x_1 < x < x_2$).



Quando $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo fazendo com que a função assumam dois valores nulos ($f(x) = 0$), valores negativos (para todo $x < x_1$ e para todo $x > x_2$) e valores positivos ($x_1 < x < x_2$).



ATIVIDADES

1. Estude os sinais das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

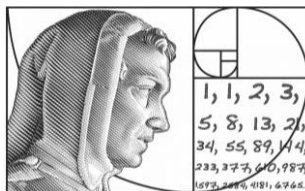
b) $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

d) $f(x) = x^2 - 16$

e) $f(x) = x^2 - 4x + 10$

f) $f(x) = 2x^2 + 20x - 50$



AULA 34

VÉRTICE

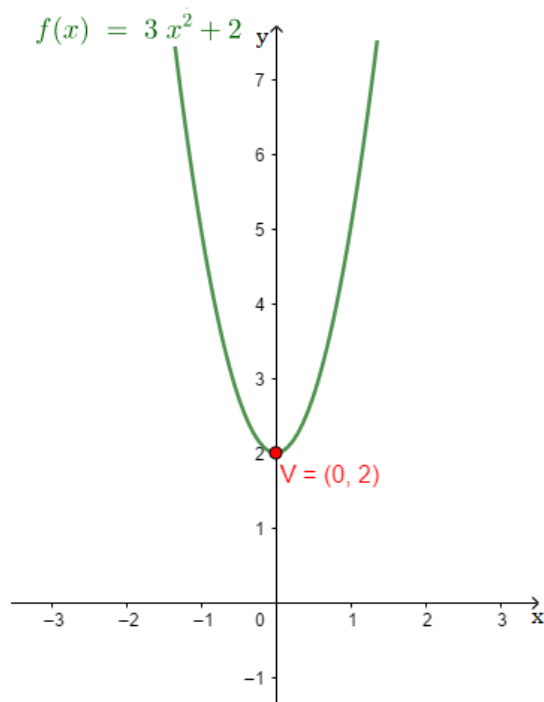
Definição: O par ordenado, onde um ponto atinge seu valor máximo ou seu valor mínimo, é identificado como o **vértice** da parábola.

O vértice é formado por um par ordenado que será identificado como (x_v, y_v) .

COEFICIENTE a	CONCAVIDADE	PONTO E VALOR MÁXIMO; PONTO E VALOR MÍNIMO
$a > 0$	Voltada para cima	
$a < 0$	Voltada para baixo	

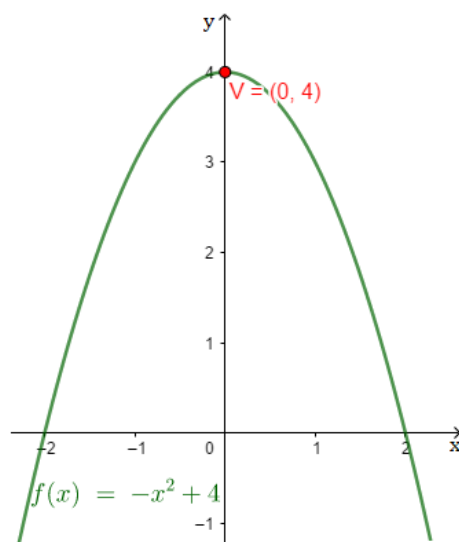
Exemplos:

1. Seja a função quadrática $f(x) = 3x^2 + 2$. O vértice é o ponto mais baixo desta função, pois $a > 0$.



Construindo o gráfico encontramos o vértice, $V = (0, 2)$.

2. Seja a função quadrática $f(x) = -x^2 + 4$ e o vértice desta função. O vértice é o ponto mais alto desta função, pois $a < 0$.



Construindo o gráfico encontramos o vértice, $V = (0, 4)$.

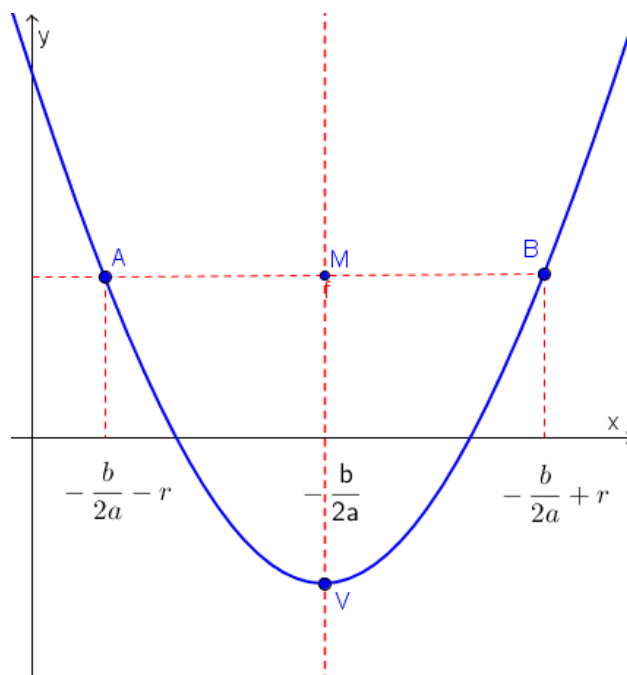
Como podemos encontrar o par ordenado do vértice?

Sabemos até agora que a função quadrática tem um eixo de simetria que passa pelo vértice, conforme explicitado no Teorema abaixo.

Teorema: O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice.

Demonstração: Os pontos da reta perpendicular ao eixo do x que passa pelo vértice da parábola, obedecem à equação $x = -\frac{b}{2a}$, pois todos os pontos dessa reta têm abscissa $-\frac{b}{2a}$.

Para provarmos que a parábola tem eixo de simetria na reta $x = -\frac{b}{2a}$, devemos mostrar que, dado um ponto $A\left(-\frac{b}{2a} - r, y\right)$, com $r \in \mathbb{R}$, pertencente ao gráfico da função, existe $B\left(-\frac{b}{2a} + r, y\right)$ também pertencente ao gráfico da função.



Tomando a função quadrática na forma canônica:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

E considerando que $A\left(-\frac{b}{2a} - r, y\right)$ pertence ao gráfico da função, temos:

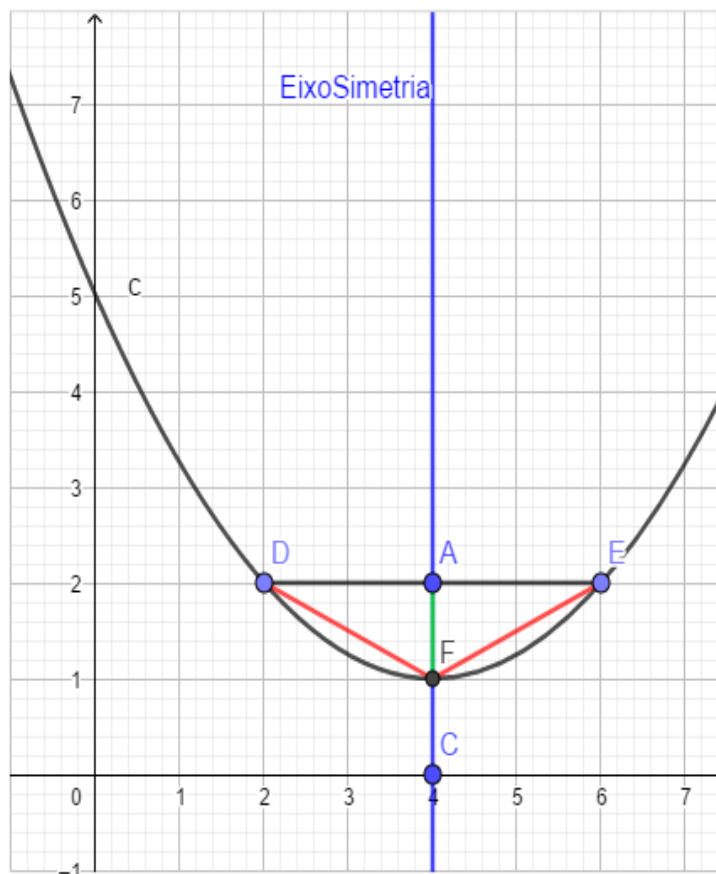
$$\begin{aligned} y = f\left(-\frac{b}{2a} - r\right) &= a \left[\left(-\frac{b}{2a} - r + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = \\ &= a \left[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[\left(-\frac{b}{2a} + r + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = f\left(-\frac{b}{2a} + r\right) \end{aligned}$$

Provando que $B\left(\frac{-b}{2a} + r, y\right)$ também pertence ao gráfico da função.¹⁰

O eixo de simetria faz com que a parábola possua dois lados espelhados. Note na figura ao lado que o ponto D está espelhado com o ponto E, pois, os dois pontos são equidistantes ao eixo de simetria, isto é, têm a mesma distância do eixo de simetria. Esses dois pontos são equidistantes, pois possuem a mesma imagem, no caso $f(x) = 2$.

Assim, as raízes da função são equidistantes ao eixo de simetria, e através de uma simples média aritmética, é possível encontrar o x_v (é o x do vértice).

Na figura ao lado, a função não possui raízes, mesmo assim, pode-se resolver com média aritmética, porém deve-se ter um cuidado ao escolher o $f(x)$, pois ele tem que pertencer à imagem da função.



Exemplos:

1. Seja a função quadrática $f(x) = x^2 + x - 2$.

Resolução: Primeiramente, vamos ver se esta função possui raízes reais.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4.1.(-2)$$

$$\Delta = 1 + 8$$

$$\Delta = 9$$

Encontrando agora o valor de x pela fórmula Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

10 IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar, 1: Conjuntos, Funções**. São Paulo: Atual, 2013. Cap.VII, p.152.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$\frac{-1 + 3}{2} = 1$

$\frac{-1 - 3}{2} = -2$

Portanto, as raízes da função $f(x) = x^2 + x - 2$ são os pares $(1,0)$ e $(-2,0)$.

O gráfico desta função será uma parábola com concavidade voltada para cima, uma vez que $a > 0$. Portanto, o vértice desta parábola será seu valor mínimo.

Vamos utilizar a notação $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$. Para encontrar o ponto x_v do vértice da parábola, basta fazer a média aritmética entre os valores x_1 e x_2 .

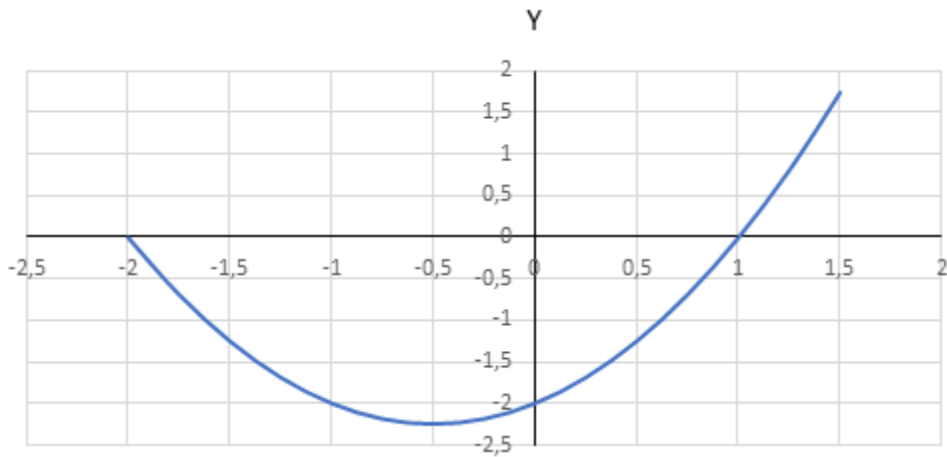
$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 - 2}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Agora, basta substituir x_v na função para encontrar o valor y_v .

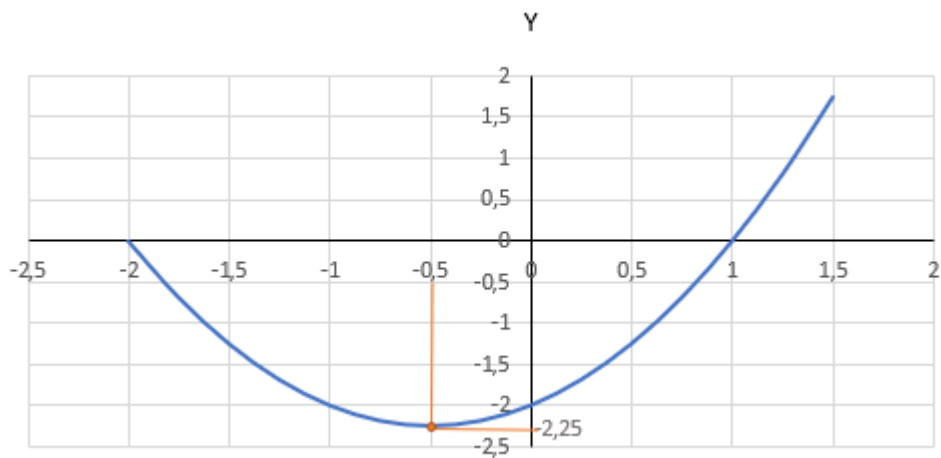
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x - 2 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1 - 2 - 8}{4} \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{-9}{4} = -2,25 \end{aligned}$$

Como $f\left(-\frac{1}{2}\right) = y_v$ então o vértice desta parábola é $(-0,5; -2,25)$.

Para verificar se este par ordenado é, de fato, o vértice desta parábola, basta construir o gráfico:



De fato, o vértice desta parábola é dado pelo par ordenado $(-0,5; -2,25)$, pois:



2. Seja a função quadrática $f(x) = 3x^2 + 2$.

Resolução: Esta função não tem raízes reais, pois $\Delta < 0$. Tomando $f(x) = 5$, temos que

$$3x^2 + 2 = 5$$

$$3x^2 = 5 - 2$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm \sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$

Vamos utilizar a notação $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, então, temos que

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

Vamos substituir o x_v na função para encontrarmos o y_v .

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

$$y_v = 3x_v^2 + 2$$

$$y_v = 3.(0)^2 + 2$$

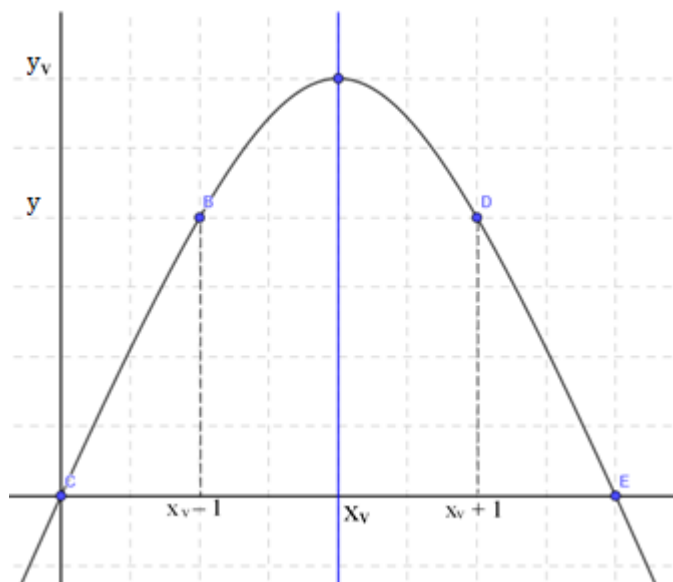
$$y_v = 3.(0)^2 + 2$$

$$y_v = 2$$

Portanto, o vértice da função $f(x) = 3x^2 + 2$ é $V = (0, 2)$, como havíamos encontrado no Exemplo 1 dos vértices.

Existe um outro modo de encontrar o par ordenado do vértice sem ser através da média aritmética e pode ser aplicado a qualquer situação do discriminante (Δ). Acompanhe a demonstração:

Demonstração: Vamos supor uma função quadrática com concavidade voltada para baixo como mostra a figura abaixo. A concavidade voltada para cima ocorre analogamente.



No gráfico acima, estão representados dois pontos B e D . Pode-se dizer que o vértice está nas coordenadas (x_v, y_v) . Os pontos B e D possuem a mesma ordenada (o mesmo valor de y) para valores diferentes de x . Observando esses pontos, como eles estão equidistantes ao vértice, pode-se considerar que os pares ordenados são:

$$B = (x_v - 1, y)$$

$$D = (x_v + 1, y)$$

Os pontos das abscissas de B e D são respectivamente $x_v - 1$ e $x_v + 1$. A função que descreve uma parábola é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como esses dois valores de x possuem a mesma imagem, eles podem ser igualados. Portanto:

$$f(x_v - 1) = f(x_v + 1)$$

$$a(x_v - 1)^2 + b(x_v - 1) + c = a(x_v + 1)^2 + b(x_v + 1) + c$$

Aplicando os produtos notáveis, têm-se:

$$a(x_v - 1)^2 + b(x_v - 1) + c = a(x_v + 1)^2 + b(x_v + 1) + c$$

$$a(x_v^2 - 2x_v + 1) + b(x_v - 1) + c = a(x_v^2 + 2x_v + 1) + b(x_v + 1) + c$$

Aplicando a propriedade distributiva, têm-se:

$$a(x_v^2 - 2x_v + 1) + b(x_v - 1) + c = a(x_v^2 + 2x_v + 1) + b(x_v + 1) + c$$

$$a \cdot x_v^2 - 2ax_v + a + bx_v - b + c = a \cdot x_v^2 + 2ax_v + a + bx_v + b + c$$

Termos iguais em lados opostos de uma igualdade podem ser cancelados. Cancelando esses termos, têm-se:

$$a \cdot x_v^2 - 2ax_v + a + bx_v - b + c = a \cdot x_v^2 + 2ax_v + a + bx_v + b + c$$

$$a \cdot x_v^2 - 2ax_v + a + bx_v - b + c = a \cdot x_v^2 + 2ax_v + a + bx_v + b + c$$

$$-2ax_v - b = 2ax_v + b$$

Passando o termo $-2ax_v$ para o segundo membro da igualdade e o termo $+b$ para o primeiro membro da igualdade, têm-se:

$$-2ax_v - b = 2ax_v + b$$

$$-b - b = 2ax_v + 2ax_v$$

Juntando os termos semelhantes, têm-se:

$$-b - b = 2ax_v + 2ax_v$$

$$-2b = 4ax_v$$

Trocando os lados da igualdade (somente para facilitar a leitura) e isolando o termo x_v , têm-se:

$$-2b = 4ax_v$$

$$4ax_v = -2b$$

$$x_v = \frac{-2b}{4a}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Observe a última igualdade a que se chegou: o “x do vértice”, ou simplesmente x_v , é igual à divisão entre o oposto do coeficiente b e o dobro de a . Esta última igualdade pode ser utilizada em qualquer parábola para encontrar o ponto x_v . Uma vez esse dado encontrado, basta substituir x_v na função, de tal forma que se têm o valor de y_v .

$$f(x_v) = a(x_v)^2 + bx_v + c$$

$$y_v = a \left(\frac{-b}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{-b}{2a} \right) + c$$

$$y_v = a \left(\frac{b^2}{4a^2} \right) - \left(\frac{b^2}{2a} \right) + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, temos que

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Portanto, temos que

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

Exemplos:

1. Seja a função $f(x) = 5x^2 + 6x + 1$. Encontre o vértice utilizando a fórmula encontrada acima.

Resolução: Ora, para encontrar o vértice da função $f(x) = 5x^2 + 6x + 1$ precisamos encontrar os coeficientes e o discriminante desta função.

Os coeficientes e o discriminante são:

$$a = 5$$

$$b = 6$$

$$c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4.5.1 = 36 - 20 = 16$$

Substituindo-os na fórmula, têm-se:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2.5} = \frac{-6}{10} = \frac{-3}{5} = -0,6$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{4.5} = \frac{-16}{20} = \frac{-4}{5} = -0,8$$

Portanto, $V = (-0,6; -0,8)$.

2. Seja a função $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Encontre o vértice utilizando a fórmula encontrada acima.

Resolução: Ora, para encontrar o vértice da função $f(x) = x^2 - 2x + 3$, precisamos encontrar os coeficientes e o discriminante desta função.

Os coeficientes e o discriminante são:

$$a = 1$$

$$b = -2$$

$$c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4.1.3 = 4 - 12 = -8$$

Substituindo-os na fórmula, têm-se:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2.1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{8}{4.1} = \frac{8}{4} = 2$$

Portanto, $V = (1, 2)$.

3. Seja a função $f(x) = -x^2 + 6x - 9$. Encontre o vértice utilizando a fórmula encontrada acima.

Resolução: Ora, para encontrar o vértice da função $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ precisamos encontrar os coeficientes e o discriminante desta função.

Os coeficientes e o discriminante são:

$$a = -1$$

$$b = 6$$

$$c = -9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4.(-1).(-9) = 36 - 36 = 0$$

Substituindo-os na fórmula, têm-se:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2.(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{0}{4.(-1)} = 0$$

Portanto, $V = (3, 0)$.

MÁXIMO E MÍNIMO

Retomemos alguns conceitos importantes:

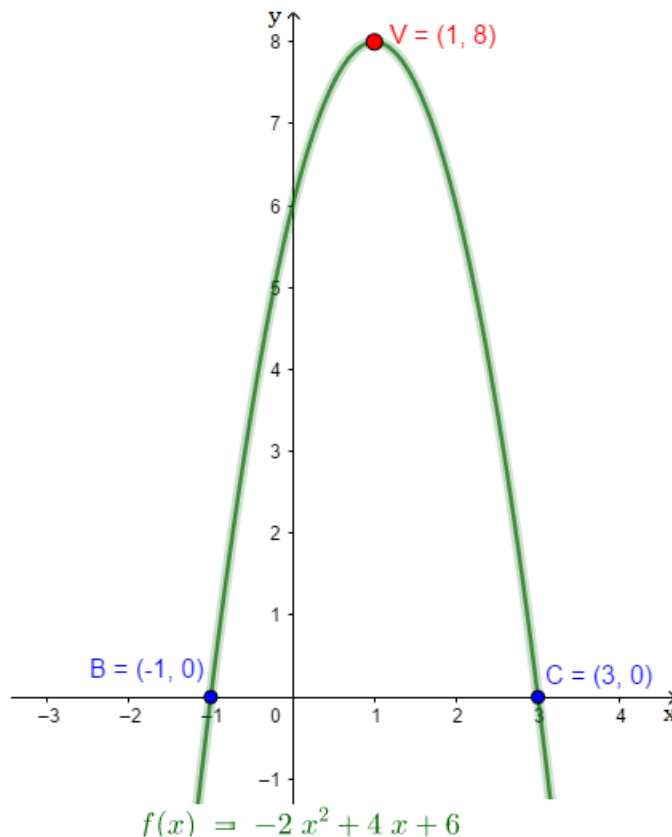
- 1) Uma função quadrática é toda função que pode ser escrita na forma $f(x)=ax^2+bx+c$.
- 2) O gráfico desta função é uma parábola.
- 3) A concavidade pode ser voltada para cima ou para baixo.
- 4) O vértice pode ser ponto de máximo ou ponto de mínimo.

A palavra máximo tem a etimologia do latim, MAGNUS que significava “grande”.

Na matemática, o significado de ponto de máximo está de acordo com o significado da palavra, pois é o ponto mais alto do gráfico.

Todas as funções do segundo grau contendo $a < 0$ dispõem de um **ponto de máximo**, isto é, temos um **ponto de máximo** somente em funções com a concavidade voltada para baixo.

Quando o vértice é ponto de máximo, o gráfico desta função é crescente até chegar ao ponto de máximo (vértice) e, depois disso, o gráfico torna-se decrescente.



Observe o gráfico da função $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$.

Notemos:

O ponto mais alto desta função é o ponto $V = (1, 8)$, por isto, chamamos este ponto de **ponto de máximo** da função.

Os pontos B e C são os pontos formados pela raiz da função.

A concavidade desta função é voltada para baixo, pois $a = -2$.

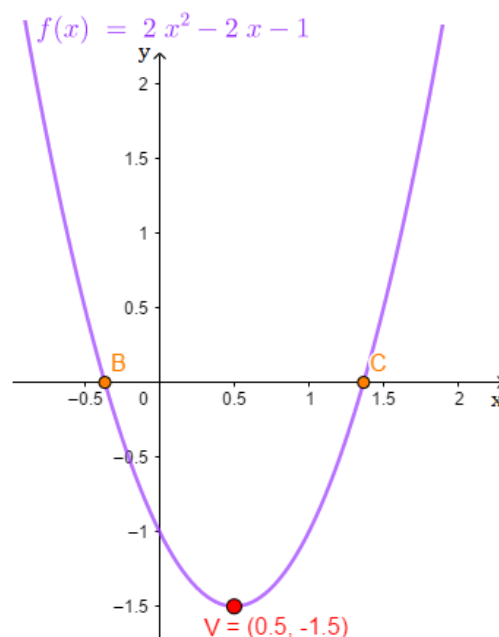
A palavra mínimo tem a etimologia no latim, MINIMUM que significa “o menor de todos”.

Na matemática, o significado de **ponto de mínimo** está de acordo com o significado etimológico da palavra “mínimo”, pois é o ponto mais baixo do gráfico.

Todas as funções do segundo grau contendo $a > 0$ dispõem de um **ponto de mínimo**, isto é, temos um **ponto de mínimo** somente em funções com a concavidade voltada para cima.

Quando o vértice é ponto de mínimo, o gráfico desta função é decrescente até chegar ao ponto de mínimo (vértice) e, depois disso, o gráfico torna-se crescente.

Observe o gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$.



Notemos:

O ponto mais baixo desta função é o ponto $V = (0.5, -1.5)$, por isto chamamos este ponto de **ponto de mínimo** da função.

Os pontos B e C são os pontos formados pela raiz da função.

A concavidade desta função é voltada para cima, pois $a = 2$.

RESUMO

1. Nas funções que possuem duas raízes reais, para encontrar o ponto x_v , basta fazer a média aritmética entre as raízes da função, ou seja:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

2. Encontrado o ponto x_v , basta substituí-lo na função para encontrar o ponto y_v :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c$$

$$f(x_v) = y_v$$

3. Em uma função cujo $\Delta = 0$, existe apenas uma raiz e, consequentemente, a parábola passa por apenas um ponto no eixo das abscissas (eixo x). Neste caso, o vértice será o próprio ponto que passa pelo eixo das abscissas.

4. Em uma função cujo $\Delta < 0$, não existem raízes reais. Logo, não será possível encontrar o vértice através da média aritmética das raízes. Mas, pode ser encontrado através de um $f(x)$ pertencente à imagem desta função, onde serão obtidos dois valores para x , e assim poderá ser feita a média aritmética.

5. Em uma função cujo $\Delta > 0$, existem duas raízes reais. Logo, será possível encontrar o vértice através da média aritmética das raízes.

6. As **coordenadas do vértice** serão as **coordenadas do ponto de máximo** ou de **mínimo**.

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

7. Na **função que possui ponto de máximo**, a **função começa crescente** e **após o vértice** torna-se **decrecente**.

8. Na **função que possui ponto de mínimo**, a **função começa decrescente** e **após o vértice** torna-se **crescente**.

ATIVIDADES

1. Determine os vértices das parábolas:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

b) $f(x) = -x^2 - 6x + 16$

c) $f(x) = x^2 + 4x$

d) $f(x) = -x^2 + 9$

e) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

2. Determine o valor máximo ou o valor mínimo e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^2 + 5x$

b) $f(x) = -3x^2 + 12x$

c) $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$

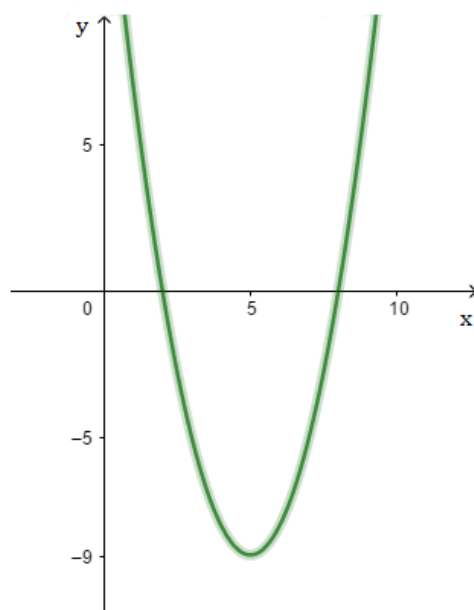
d) $f(x) = x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}$

e) $f(x) = -x^2 + 5x - 7$

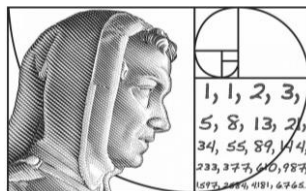
f) $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

3. Determine os valores de m para que a função quadrática $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha duas raízes reais e distintas.

4. O gráfico do trinômio do 2º grau $ax^2 - 10x + c$ é o da figura:



Determine a e c .



AULA 38

COMPARAÇÃO DE UM NÚMERO REAL COM AS RAÍZES DA EQUAÇÃO DO 2º GRAU



esta aula, estudaremos a comparação de um número real qualquer com as raízes da equação do 2º grau.

Definição: Comparar o número real α às raízes reais $x_1 \leq x_2$ da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, é verificar, sem calcular as raízes, que:

1º α está à esquerda de x_1 ($\alpha < x_1 \leq x_2$).

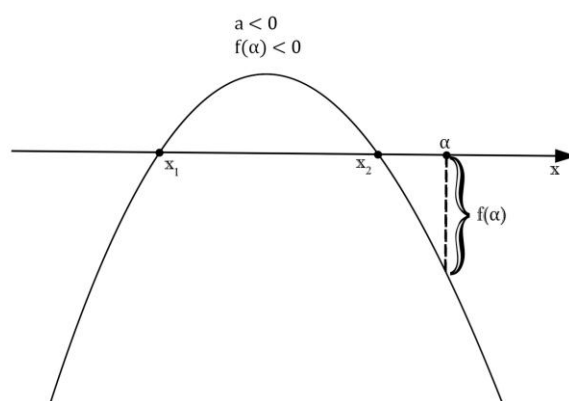
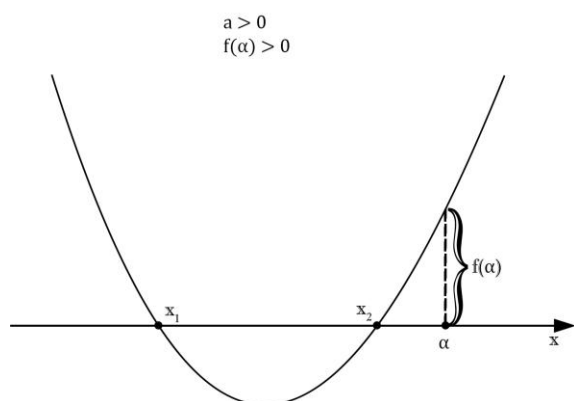
2º α está entre as raízes ($x_1 < \alpha < x_2$).

3º α está à direita de x_2 ($x_1 \leq x_2 < \alpha$).

4º α é uma das raízes ($\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$).

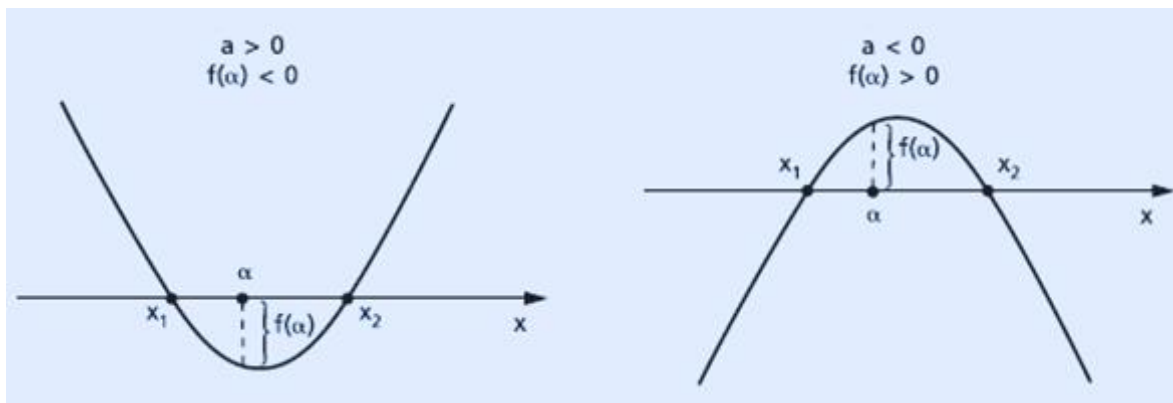
Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, cuja regra de sinal já foi ensinada no volume passado. Sendo assim, temos que:

- 1) Se α estiver à esquerda de x_1 ou à direita de x_2 , o produto $a \cdot f(\alpha)$ é positivo, ou seja, a (coeficiente de x^2) e $f(\alpha) = a(\alpha)^2 + b \cdot \alpha + c$ têm o mesmo sinal.



α à direita de x_2

- 2) Se α estiver entre as raízes x_1 e x_2 ($x_1 \neq x_2$), o produto $a \cdot f(\alpha)$ é negativo, ou seja, a (coeficiente de x^2) e $f(\alpha) = a(\alpha)^2 + b \cdot \alpha + c$ têm sinais opostos.



3) Se α é raiz da função $f(x)$, então $a \cdot f(\alpha) = 0$, pois $f(\alpha) = 0$.

RESUMO

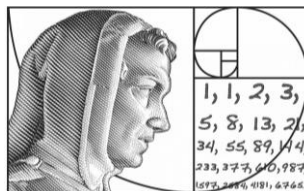
Conhecendo a posição de α em relação às raízes reais x_1 e x_2 de $f(x) = 0$, temos que:

- I. $\alpha < x_1 \leq x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$
- II. $x_1 \leq x_2 < \alpha \Rightarrow a \cdot f(\alpha) > 0$
- III. $x_1 < \alpha < x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) < 0$
- IV. $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2 \Rightarrow a \cdot f(\alpha) = 0$

Observação: Notem que nos casos I, II e IV o discriminante é $\Delta \geq 0$, enquanto no caso III temos $\Delta > 0$.

ATIVIDADES

- Compare o número -2 às raízes da equação $x^2 + 4x + 3 = 0$.
- Compare o número 1 às raízes da equação $-2x^2 + 4x + 5 = 0$.
- Compare o número -4 às raízes da equação $-x^2 - x + 6 = 0$.
- Compare o número -1 às raízes da equação $x^2 + 2x + 1 = 0$.



AULA 42

FUNÇÃO MODULAR



esta aula, iniciaremos o nosso estudo da função modular, examinando a sua definição e encontrando alguns pontos da função modular.

A Função Modular é uma função que apresenta módulos. Vejamos a sua definição:

Definição: Uma função modular é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$, isto é:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Observação: A função modular é uma função definida em duas sentenças.

Vejamos alguns exemplos de funções modulares:

Exemplos:

1. A função $f(x) = |3x + 4|$ é uma função modular.
2. A função $f(x) = |3x + 4| + |x - 2|$ é uma função modular.
3. A função $f(x) = |x^3|$ é uma função modular.
4. A função $f(x) = |x| - 1$ é uma função modular, pois é congruente ao de $f(x) = |x|$, porém transladada para baixo.

Agora, vamos ver alguns exemplos para encontrarmos a imagem aplicando a alguns pontos do domínio de uma função modular.

Exemplos:

1. Seja a função $f(x) = |x + 3|$, encontre a imagem cujo domínio é -5 .

Resolução: Aplicando o domínio -5 , temos que:

$$f(x) = |x + 3|$$

$$f(-5) = |-5 + 3|$$

$$f(-5) = |-2|$$

$$f(-5) = 2$$

Portanto, a imagem da função $f(x) = |x + 3|$ aplicado no domínio -5 , corresponde a 2.

2. Seja a função $f(x) = |x| - 3$, encontre a imagem cujo domínio é 2.

Resolução: Aplicando o domínio 2, temos que:

$$f(x) = |x| - 3$$

$$f(4) = |2| - 3$$

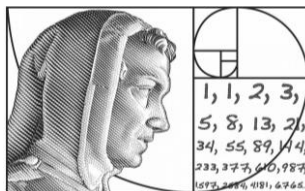
$$f(2) = 2 - 3$$

$$f(2) = -1$$

Portanto, a imagem da função $f(x) = |x| - 3$ aplicado no domínio 2, corresponde a -1 .

ATIVIDADES

1. Seja a função $f(x) = |2x + 5|$, encontre a imagem cujo domínio é -2 .
2. Seja a função $f(x) = |-x + x^2|$, encontre a imagem cujo domínio é 5.
3. Seja a função $f(x) = |x| - 3$, encontre a imagem cujo domínio é -8 .
4. Seja a função $f(x) = |x + 2| - 8$, encontre a imagem cujo domínio é 1.
5. Seja a função $f(x) = |x^3| + x$, encontre a imagem cujo domínio é -3 .
6. Seja a função $f(x) = |\sqrt{x} - 5|$, encontre a imagem cujo domínio é 5.
7. Seja a função $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$, encontre a imagem cujo domínio é 4.
8. Seja a função $f(x) = |4x - 6| + 1$ encontre a imagem cujo domínio é 9.



AULA 47

DOMÍNIO DA FUNÇÃO MODULAR



esta aula, estudaremos o domínio da função modular.

O domínio de uma função é uma das principais divisões do conteúdo Funções. E para encontrar o domínio de algumas funções, podem aparecer módulos. Assim, precisamos resolver inequações modulares.

Exemplos:

1. Determine o domínio da função $f(x) = \frac{1}{|x|-3}$ em $\mathbb{R}$.

Resolução: Sabe-se que $\frac{1}{|x|-3}$ só vale em $\mathbb{R}$ para $|x| - 3 \neq 0$.

Com isso, temos que:

$$|x| \neq 3 \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Portanto,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 3 \text{ ou } x = -3\}$$

2. Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{3 - |x - 1|}$ em $\mathbb{R}$.

Resolução: Sabe-se que $\sqrt{3 - |x - 1|}$ só vale em $\mathbb{R}$ para $3 - |x - 1| \geq 0$.

Com isso, temos que:

$$-|x - 1| \geq -3 \Rightarrow |x - 1| \leq 3$$

Pela propriedade das inequações modulares, temos que

$$|x - 1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4$$

Portanto,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$$

ATIVIDADES

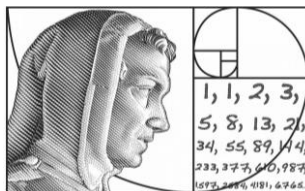
1. Encontre o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{|x|-10}$

b) $f(x) = \sqrt{2 - |x + 1|}$

c) $f(x) = \sqrt{|x - 1| - 1}$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - 3}}$



AULA 52

ASSOCIATIVIDADE DA FUNÇÃO COMPOSTA



esta aula, estudaremos a associatividade da função composta.

Antes de enunciarmos a associatividade da função composta, iremos, primeiramente, lembrar o conceito de associatividade.

Associativa: Para todo a, b e $c \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Já podemos imaginar que para a associatividade da função composta precisará de três funções distintas, como veremos no enunciado do Teorema abaixo:

Teorema: Quaisquer que sejam as funções

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Temos:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Demonstração: Seja x um elemento qualquer de A e seja $f(x) = y$, $g(y) = w$ e $h(w) = z$.

O caminho de ida é igual ao caminho de volta.

Assim, temos na ida que:

$$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(w) = z$$

Antes de analisarmos a volta, notemos que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = w$$

Na volta, temos que:

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(w) = z$$

Portanto, para todo $x \in A$, temos que:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

■ Q.E.D

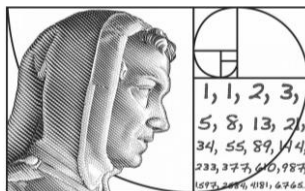
Observação: O símbolo significa “Quod erat demonstrandum”, cuja tradução é “Como queríamos demonstrar”. Esse símbolo é utilizado no final da demonstração afirmando que foi demonstrado.

■ Q.E.D

O domínio de uma função é uma das principais divisões do conteúdo Funções. E para encontrar o domínio de algumas funções, podem aparecer módulos. Assim, precisamos resolver inequações modulares.

ATIVIDADES

1. Sejam as funções $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 3x + 2$. Obtenha $(h \circ g) \circ f$.
2. Sejam as funções $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ e $h(x) = 3x + 2$. Obtenha $h \circ (g \circ f)$.
3. Sejam as funções $f(x) = 1 - x$, $g(x) = x^2 - x + 2$ e $h(x) = 2x + 3$. Obtenha $h \circ (g \circ f)$.



AULA 55

RECONHECENDO SE A FUNÇÃO É SOBREJETORA, INJETORA E BIJETORA ATRAVÉS DO GRÁFICO



esta aula, aprenderemos a reconhecer se a função é sobrejetora, injetora ou bijetora somente observando seu gráfico.

Nas representações cartesianas de uma função f qualquer, podemos perceber vários aspectos, apenas observando o gráfico da função, como por exemplo: as raízes da função. Mas também podemos descobrir, através da observação, se a função é sobrejetora, injetora ou bijetora. Para isso, devemos primeiramente fazer retas paralelas ao eixo x e depois analisar o número de pontos do gráfico que intersectam com as retas paralelas.

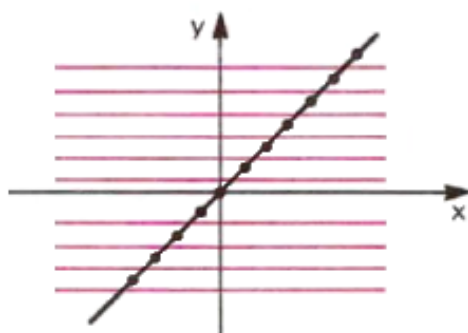
Vejamos como identificar através do gráfico cada função:

FUNÇÃO INJETORA

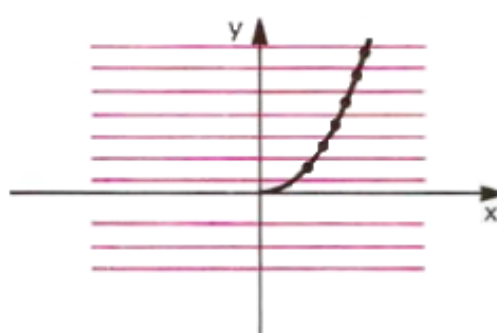
Se cada uma das retas paralelas ao eixo x cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico, então a função é **injetora**.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$



b) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$



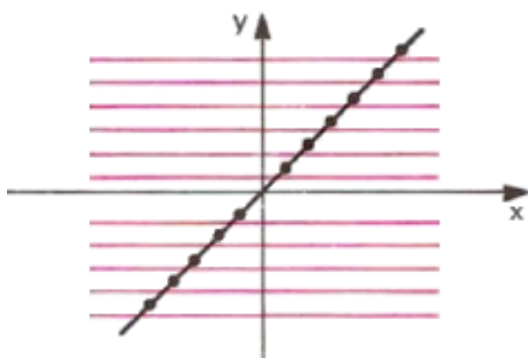
Exemplos de Funções Injetoras

FUNÇÃO SOBREJETORA

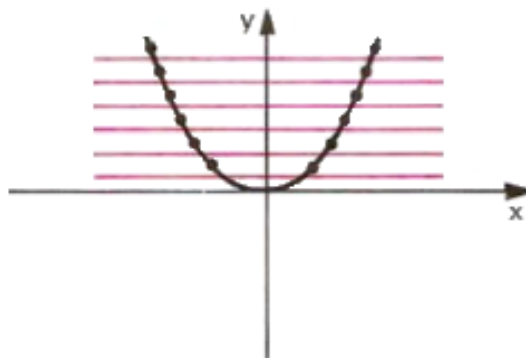
Se cada uma das retas paralelas ao eixo x cortar o gráfico em um ou mais pontos, então a função é **sobrejetora**.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x - 1$



b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $f(x) = x^2$



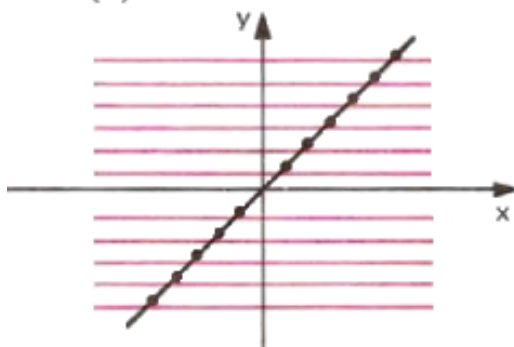
Exemplos de Funções Sobrejetoras.

FUNÇÃO BIJETORA

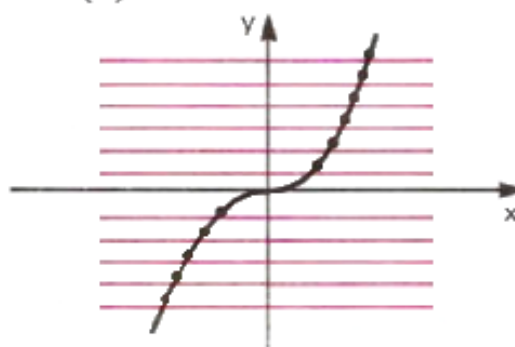
Se cada uma dessas retas paralelas ao eixo x cortar o gráfico em um só ponto, então a função é **bijetora**.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x$



b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x \cdot |x|$



Exemplos de Funções Bijetoras.

RESUMO

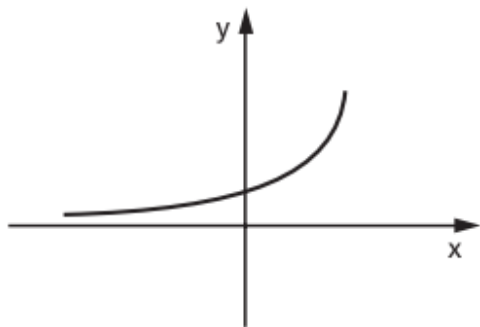
Seja a função f de A em B e considerando as retas horizontais por $(0, y)$ com $y \in B$, temos que:

- a) Se nenhuma reta corta o gráfico mais de uma vez, então f é **injetora**.
- b) Se toda reta corta o gráfico, então f é **sobrejetora**.
- c) Se toda reta corta o gráfico em um só ponto, então f é **bijetora**.

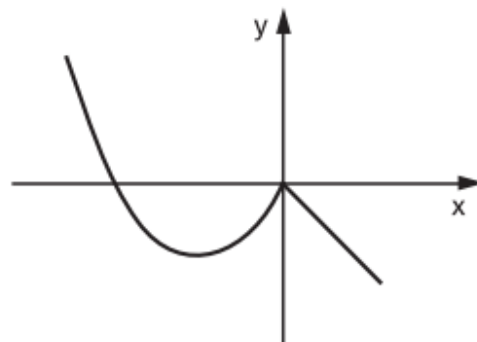
ATIVIDADES

1. Entre as funções em $\mathbb{R}$ abaixo representadas, qual é injetora? E sobrejetora? E bijetora?

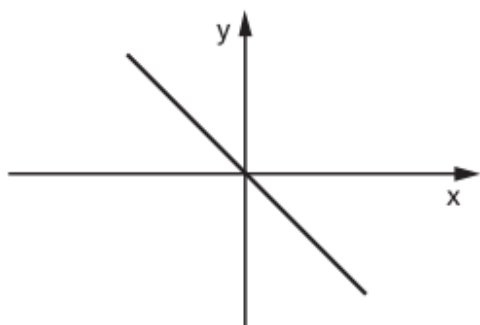
a)



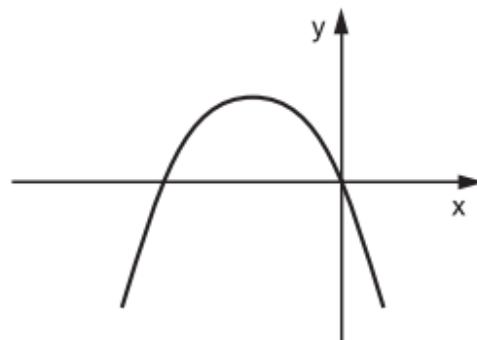
c)

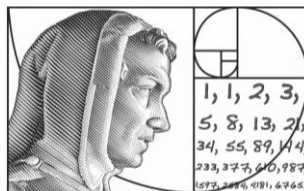


b)



d)





AULA 58

PROPRIEDADE DOS GRÁFICOS DE f E f^{-1}

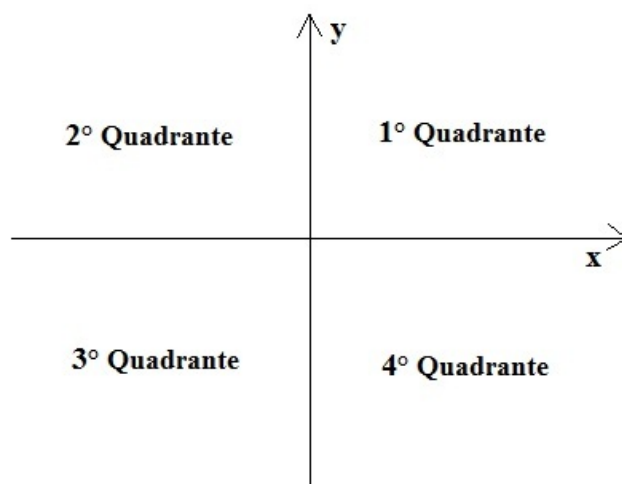


esta aula, estudaremos uma propriedade que envolve os gráficos de f e f^{-1} , isto é, uma propriedade que envolve os gráficos de uma função com o gráfico da função inversa dessa função.

Antes de mostrarmos a propriedade dos gráficos de f e f^{-1} , precisamos compreender algumas definições que precedem essa propriedade. Essas definições vão auxiliar na compreensão da propriedade que apresentaremos a seguir.

Definição: No plano cartesiano, os eixos x e y dividem o mesmo em quatro partes. O primeiro quadrante corresponde ao lado superior direito do plano cartesiano, o segundo quadrante é o lado superior esquerdo do plano cartesiano, enquanto o terceiro quadrante está abaixo do segundo e o quarto quadrante fica abaixo do primeiro quadrante.

Pela definição, podemos notar que os quadrantes estão dispostos em sentido anti-horário; na imagem abaixo podemos comprovar isso.



Quadrantes no Plano Cartesiano

A segunda definição é sobre **simetria**, esta palavra tem origem etimológica no grego e no latim, SYMMETRIA, que significa “justa proporção”. Na matemática, a simetria consiste em dividir algo em partes idênticas.

A terceira definição é do **ponto médio**.

Definição: O ponto médio é o ponto que divide o segmento ao meio, e isto, significa que o ponto médio está no centro do segmento.

A quarta definição é da **bissetriz**.

Definição: Bissetriz é uma semirreta que divide o ângulo ao meio.

A quinta definição é sobre as **retas perpendiculares**.

Definição: As retas perpendiculares são retas que se cruzam e formam quatro ângulos de 90° .

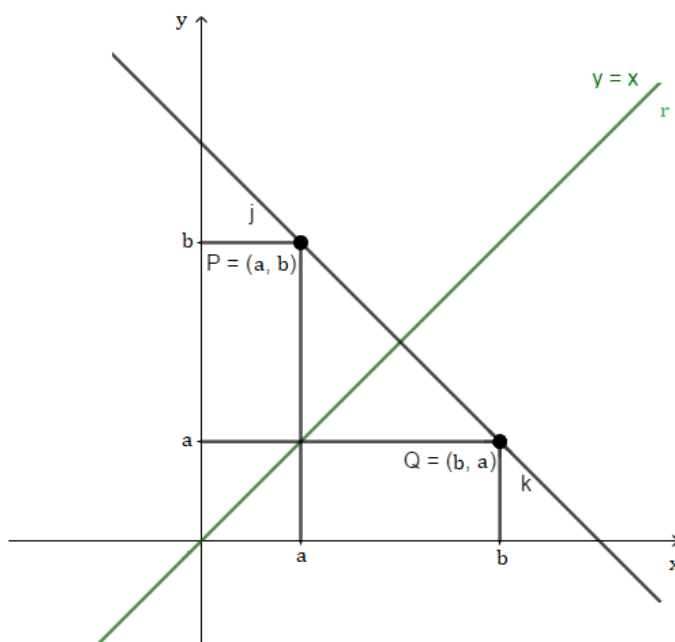
A sexta definição é sobre **equidistância**. Esta palavra tem origem no latim, AEQUIDISTANS que significa “distância igual”.

PROPRIEDADE DOS GRÁFICOS f E f^{-1}

Os gráficos cartesianos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes 1 e 3 do plano cartesiano.

Demonstração: Note que se $(a, b) \in f$, então $(b, a) \in f^{-1}$.

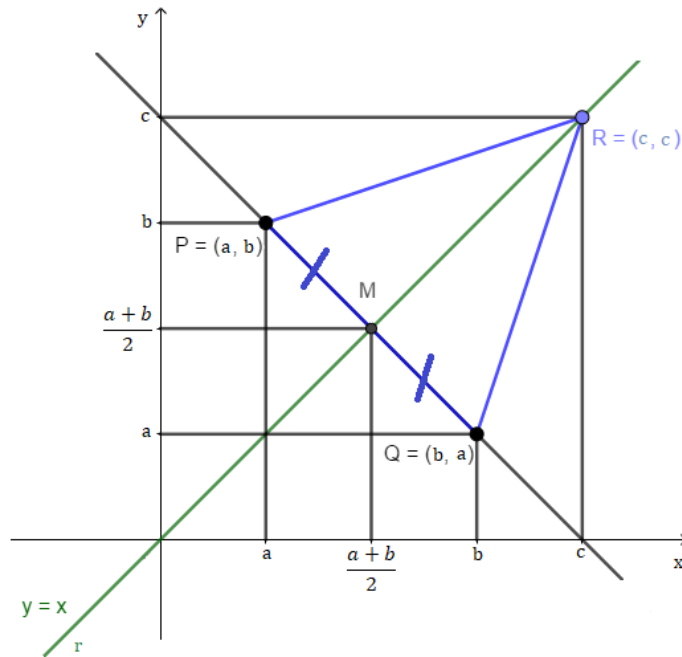
Para provarmos que os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (b, a)$ são simétricos em relação à reta r de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes 1 e 3), devemos provar que a reta que passa pelos pontos P e Q é perpendicular à reta r e que as distâncias dos pontos P e Q à reta r são iguais.



Pontos P , Q e a Bissetriz

O ponto M , médio do segmento $\overline{PQ}$, tem coordenadas $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$, portanto M pertence à reta r . Como M é o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$, isto é, $\overline{MP} = \overline{MQ}$, $M \in r$, está então provado que os pontos P e Q equidistam da reta r .

Para provarmos que a reta $\overline{PQ}$ é perpendicular à reta r , consideremos o ponto $R(c, c)$ da reta r , distinto de M , e provemos que o triângulo PMR é retângulo em M .



Ponto Médio M e o Triângulo PMR

Calculando a medida dos lados do triângulo PMR, encontramos:

$$\overline{PR}^2 = \left(\frac{a+b}{2} - a\right)^2 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 = 2\left(-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\overline{MR}^2 = \left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a+b}{2}\right)^2 = 2\left(c + \frac{-a-b}{2}\right)^2$$

$$\overline{PR}^2 = (c-a)^2 + (c-b)^2$$

Para provar que o triângulo PMR é retângulo em M, precisamos mostrar que:

$$\overline{PR}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{MR}^2$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\overline{PM}^2 + \overline{MR}^2 &= 2\left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &\quad + 2\left(c + \frac{-a-b}{2}\right)^2\end{aligned}$$

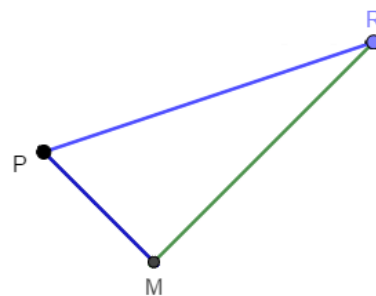
$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} + 2c^2 - 2ca - 2cb + \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2}$$

$$= a^2 + b^2 + 2c^2 - 2ca - 2cb$$

$$= a^2 - 2ca - 2cb + b^2 - 2cb + c^2$$

$$= (c-a)^2 + (c-b)^2$$

$$= \overline{PR}^2$$



Triângulo PMR

■ Q.E.D

Acabamos de demonstrar que as funções f e f^{-1} são simétricas em relação à bissetriz nos quadrantes 1 e 3 do plano cartesiano. Agora iremos visualizar o que significa esse Teorema fazendo a demonstração na prática, isto é, como ficam os gráficos de f e f^{-1} com a bissetriz no plano cartesiano.

Exemplos:

- a) Construa os gráficos das funções $f(x) = 8x + 5$ e $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{8}$ com a bissetriz do primeiro e terceiro quadrante em um mesmo plano cartesiano.

Resolução:

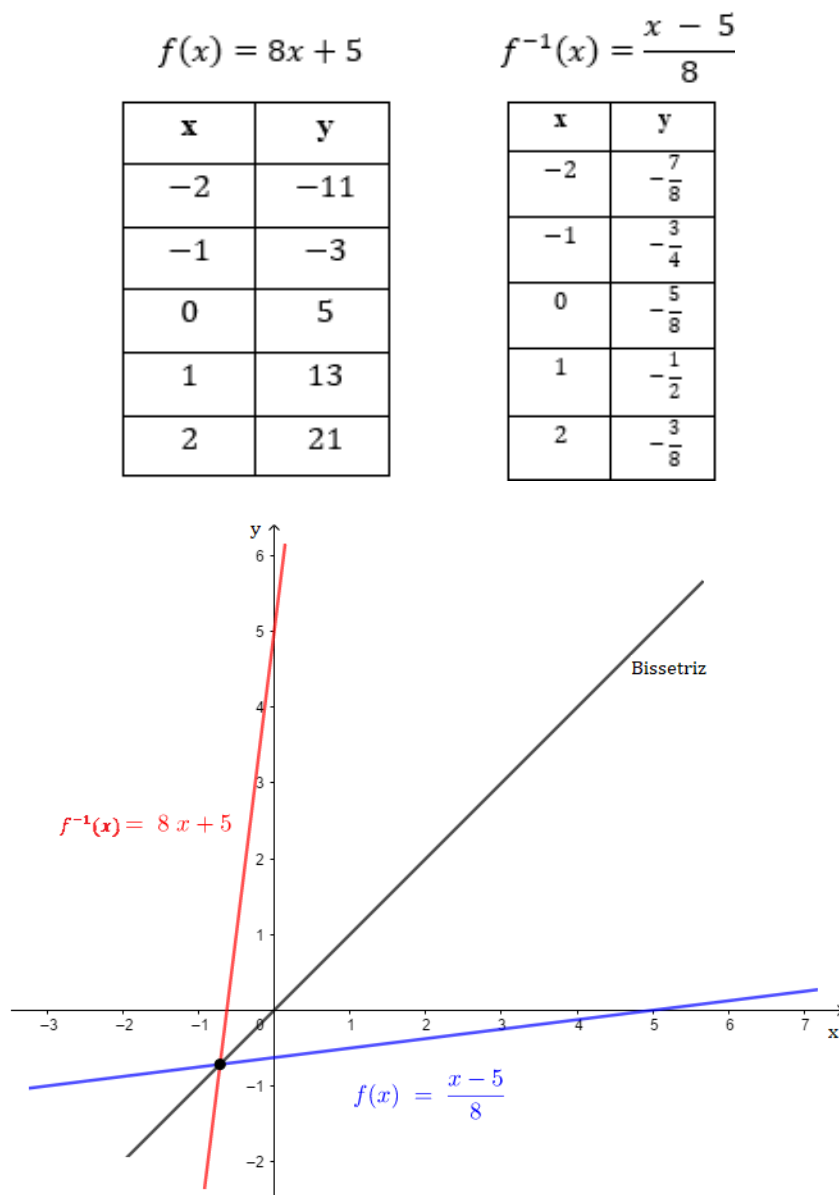


Gráfico das funções $f(x) = 8x + 5$ e $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{8}$.

- b) Construa os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ com a bissetriz do primeiro e terceiro quadrante em um mesmo plano cartesiano.

Resolução:

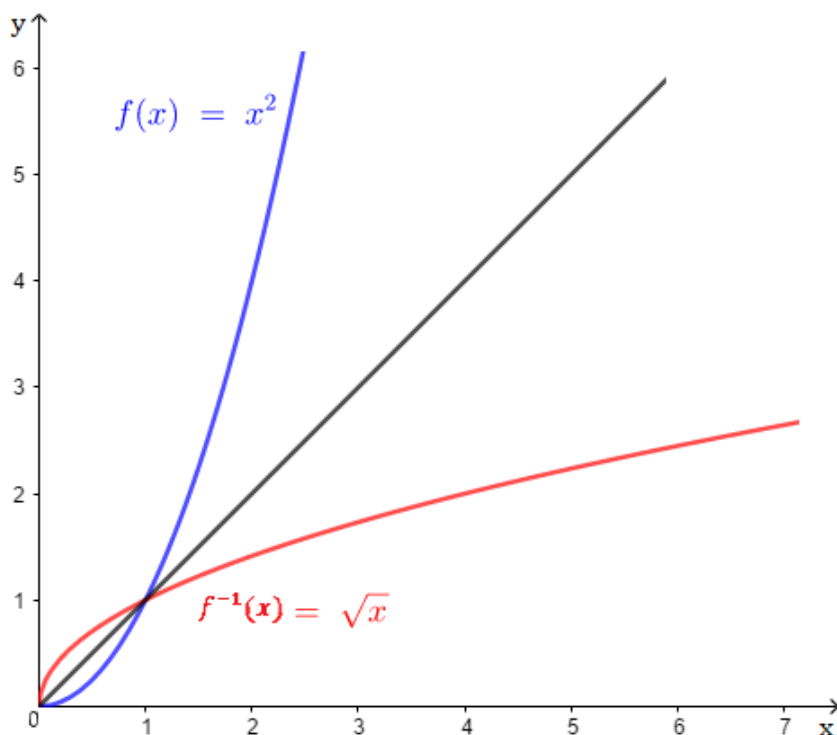


Gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

- c) Construa os gráficos das funções $f(x) = x + 1$ e $f^{-1}(x) = x - 1$ com a bissetriz do primeiro e terceiro quadrante em um mesmo plano cartesiano.

Resolução:

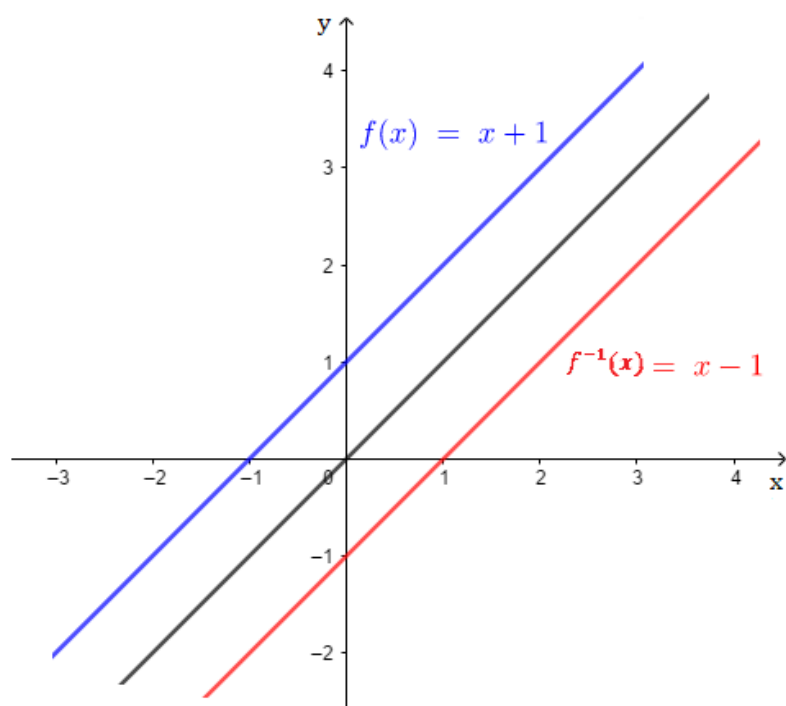


Gráfico das funções $f(x) = x + 1$ e $f^{-1}(x) = x - 1$.

- d) Construa os gráficos das funções $f(x) = x^3$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ com a bissetriz do primeiro e terceiro quadrante em um mesmo plano cartesiano.

Resolução:

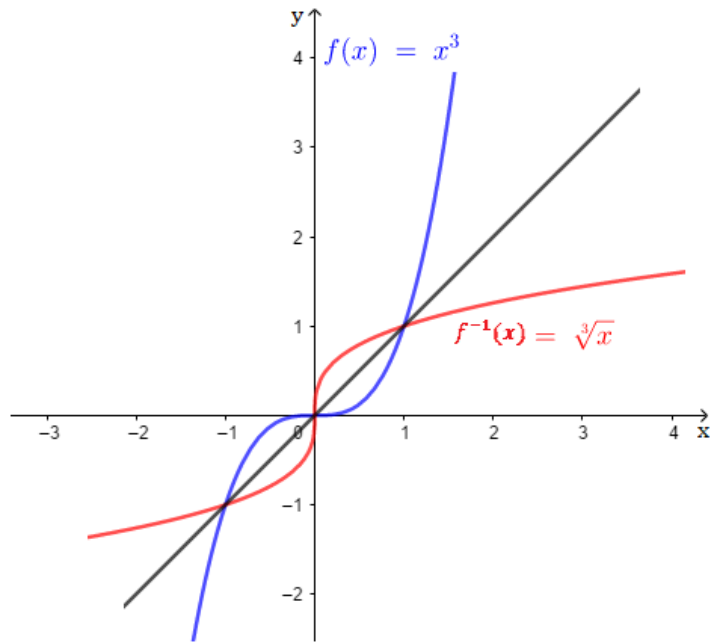


Gráfico das funções $f(x) = x^3$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

ATIVIDADES

- 1) Seja a função f em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$. Construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} .
- 2) Nas funções que seguem, construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1} .

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x + 1$$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x+4}{3}$$

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 - x^3$$