
ENSINO MÉDIO

– 1º ANO –

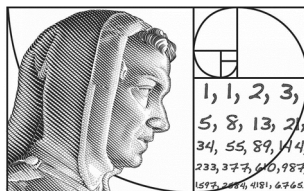
MATEMÁTICA

VOLUME 2

Apostila do 1º ano do Ensino Médio, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



Aula 108	231
Avaliação Geral - Parte II.....	231



AULA 63

POTÊNCIA DE EXPOENTE NEGATIVO

Nesta aula, estudaremos as potências de expoente negativo.

Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos que

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos:

1. Calcule as potências abaixo:

a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

b) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

c) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$

d) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{16}{25}\right)} = \frac{25}{16}$

e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{2}\right)^5} = \frac{1}{\left(-\frac{243}{32}\right)} = -\frac{32}{243}$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-7} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^7} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{128}\right)} = -128$

g) $\left(\frac{10}{23}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{10}{23}\right)^1} = \frac{1}{\left(\frac{10}{23}\right)} = -\frac{23}{10} = -2,3$

Observação: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$, temos que

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}$$

Observação: Para todos os $a \neq 0$, a^{-1} é chamado de **inverso** de a , pois

$$a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

Observação: Se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, 0^{-n} é um símbolo sem significado, pois não existe zero no denominador.

Usando as definições de potência com expoente natural e com expoente negativo, podemos fazer a seguinte definição:

Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$ tem

$$a^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \text{ e } a \neq 0 \\ a^{n-1} \cdot a, & n > 0 \\ \frac{1}{a^{-n}}, & n < 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

ATIVIDADES

1. Simplifique as expressões, supondo $a \cdot b \neq 0$.

a) $\frac{(a^3 \cdot b^{-2})^{-2}}{(a^{-4} \cdot b^3)^3}$

b) $(a^{2n+1} \cdot a^{1-n} \cdot a^{3-n})$

c) $\frac{a^{2n+3} \cdot a^{n-1}}{a^{2(n-1)}}$

d) $\frac{a^{2(n+1)} \cdot a^{3-n}}{a^{1-n}}$

e) $\frac{a^{n+4} - a^3 \cdot a^n}{a^4 \cdot a^n}$

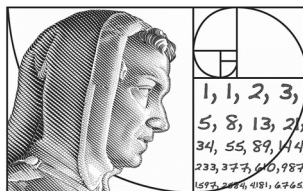
2. Resolva a equação:

$$8x^2 = 3 \cdot 2^2 - (3^{-2})^{-1} + (0,2)^{-3}$$

3. Determine o valor da expressão:

$$\frac{4^3 \cdot 2^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot 3^{-2}}{5 \cdot (1,2)^{-1}}$$

4. Se $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ e $b = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$ determine a^b .



AULA 66

POTÊNCIA DE EXPOENTE IRRACIONAL



esta aula, estudaremos as potências de expoente irracional.

Definição: Sejam dados $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Temos que b^α é uma potência de expoente irracional.

O número irracional é um número infinito e não periódico, assim as potências com expoente irracional vão possuir expoentes infinitos e sem período. Com isso, essas potências serão obtidas através de aproximações por expoentes racionais, como veremos a seguir:

1. Calcule a potência $5^{\sqrt{3}}$.

Resolução: Sabemos que

$$\sqrt{3} \cong 1,7320508075688772935274463415059$$

e também que $1 < \sqrt{3} < 2$.

Assim, temos que:

$$5^1 < 5^{\sqrt{3}} < 5^2$$

$$5^{1,7} < 5^{\sqrt{3}} < 5^{1,8}$$

$$5^{1,73} < 5^{\sqrt{3}} < 5^{1,74}$$

$$5^{1,732} < 5^{\sqrt{3}} < 5^{1,733}$$

$$5^{1,7320} < 5^{\sqrt{3}} < 5^{1,7321}$$

$$5^{1,73205} < 5^{\sqrt{3}} < 5^{1,73206}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Portanto, a cada casa decimal que descobrimos na $\sqrt{3}$, nos possibilita uma aproximação maior da potência $5^{\sqrt{3}}$, isto é, vamos descobrindo um intervalo mais próximo. Este processo é feito pelas calculadoras, até obtermos que:

$$5^{\sqrt{3}} \cong 16,24245$$

Observações:

$$1^{\alpha} = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Se $\alpha < 0$, 0^{α} , não tem significado, pois não existe zero no denominador.

Para as potências com expoente irracional, valem as propriedades da potência de expoente racional.

Vejamos algumas simplificações utilizando as propriedades de potência.

Exemplos:

1. Simplifique $7 \cdot 5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{-\sqrt{3}}$.

Resolução:

$$7 \cdot 5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{-\sqrt{3}} = 7 \cdot 5^{\sqrt{3} + (-\sqrt{3})} = 7 \cdot 5^{\sqrt{3} - \sqrt{3}} = 7 \cdot 5^0 = 7 \cdot 1 = 7$$

2. Simplifique $2^{1+\sqrt{3}} \cdot 4^{-\sqrt{12}}$.

Resolução:

$$2^{1+\sqrt{3}} \cdot 4^{-\sqrt{12}} = 2^{1+\sqrt{3}} \cdot 2^{-4\sqrt{3}} = 2^{1+\sqrt{3} + (-4\sqrt{3})} = 2^{1-3\sqrt{3}}$$

3. Simplifique $\frac{5^{\sqrt{18}}}{5^{\sqrt{8}}}$.

Resolução:

$$\frac{5^{\sqrt{18}}}{5^{\sqrt{8}}} = 5^{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}}$$

ATIVIDADES

1. Simplifique:

a) $3 \cdot 2^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-\sqrt{3}}$

f) $9^{\sqrt{2}} : 3^{\sqrt{8}}$

b) $\left(2^{\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{2}}$

g) $\left(5^{\sqrt{2}+\sqrt{3}} : 25^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

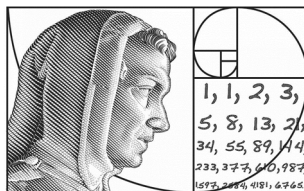
c) $\left(4^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{3}}$

h) $\left(4^{\sqrt{5}} : 8^{\sqrt{20}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$

d) $\left(3^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1}$

i) $\left(\frac{2^{\sqrt{27}} \cdot 8^{\sqrt{75}}}{4^{\sqrt{48}}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

e) $2^{1+\sqrt{3}} \cdot 4^{-\sqrt{2}}$



AULA 69

FUNÇÃO EXPONENCIAL



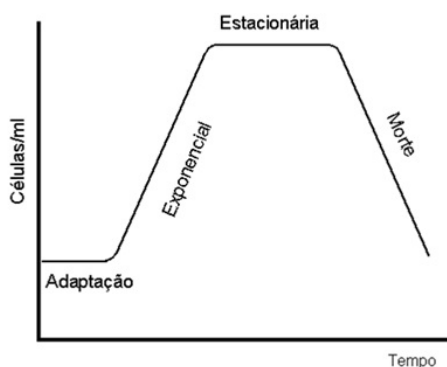
palavra exponencial vem do latim EXPONERE, que significa pôr à vista, destacar, expor, por fora, colocar fora.

Nesta aula, abordaremos as funções exponenciais que são potências que apresentam uma incógnita no expoente e sua base é sempre maior que zero e diferente de um.

Na função exponencial, a base é diferente de 1, pois 1 elevado a qualquer número, resulta sempre em 1, ou seja, seria uma função constante e não exponencial. E, além disso, a base não pode ser negativa, pois a base negativa não pode ter expoente racional, pois o radicando seria negativo na raiz.

A função exponencial está presente em outras áreas do conhecimento, como: Geografia, Química e Biologia.

Vejam alguns exemplos:



Crescimento Bacteriano.

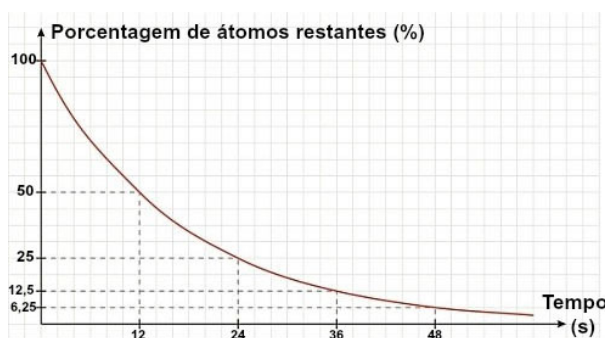


Figura 1 - Meia Vida de um átomo.

Definição: Dado $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, denominamos função exponencial de base a , uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$ que é definida por

$$f(x) = a^x$$

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

1ª Propriedade: Para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, temos que:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = b^0 = 1$$

2ª Propriedade: A função exponencial $f(x) = a^x$ é **crescente** se, e somente se, $a > 1$, isto é

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

3ª Propriedade: A função exponencial $f(x) = a^x$ é **decrescente** se, e somente se, $0 < a < 1$, isto é

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

4ª Propriedade: A função exponencial $f(x) = a^x$ é **injetora** para $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, pois tanto para $0 < a < 1$ e $a > 1$ se tomarmos $x_1 \neq x_2$, teremos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observação: A função exponencial $f(x) = a^x$ está definida com $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ e $x \in \mathbb{R}$, então, $a^x > 0$. Assim, temos que:

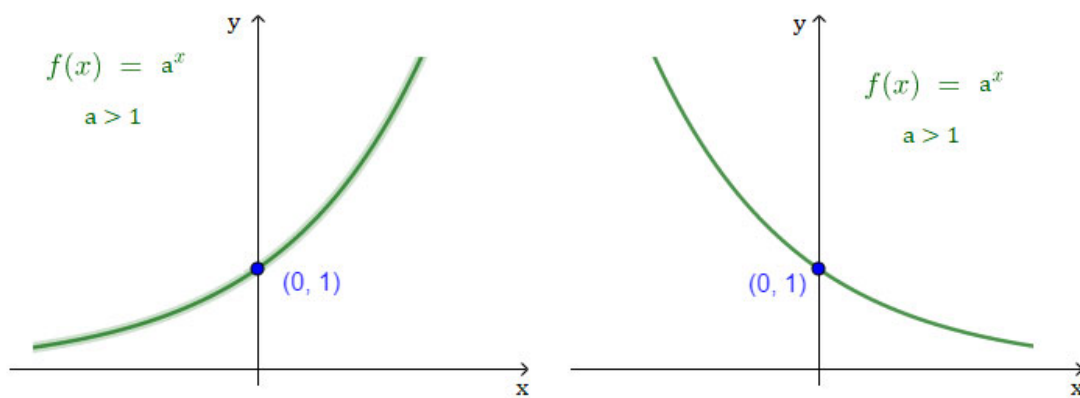
$$I_m = \mathbb{R}_+^*$$

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL

As funções exponenciais possuem características que já foram apresentadas, vejamo-las:

- A função exponencial corta o **eixo y** no ponto **(0, 1)**, pois $f(0) = 1$.
- Se $a > 1$ a função exponencial é **crescente**.
- Se $0 < a < 1$ a função exponencial é **decrescente**.
- A função exponencial sempre estará **acima do eixo x**, pois $f(x) = a^x > 0$.

Estas informações são fundamentais para elaborar um gráfico da função exponencial, pois são os fundamentos desta função, como veremos nas figuras abaixo.



Função Exponencial

E o que vai variar é o valor de a . Conforme este valor, a curva terá uma inclinação, como veremos nos exemplos abaixo.

Exemplos:

1. Construa o gráfico da função $f(x) = 3^x$.

Resolução: Montando a tabela com a função $f(x) = 3^x$, temos que:

x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9

Assim, temos o seguinte gráfico:

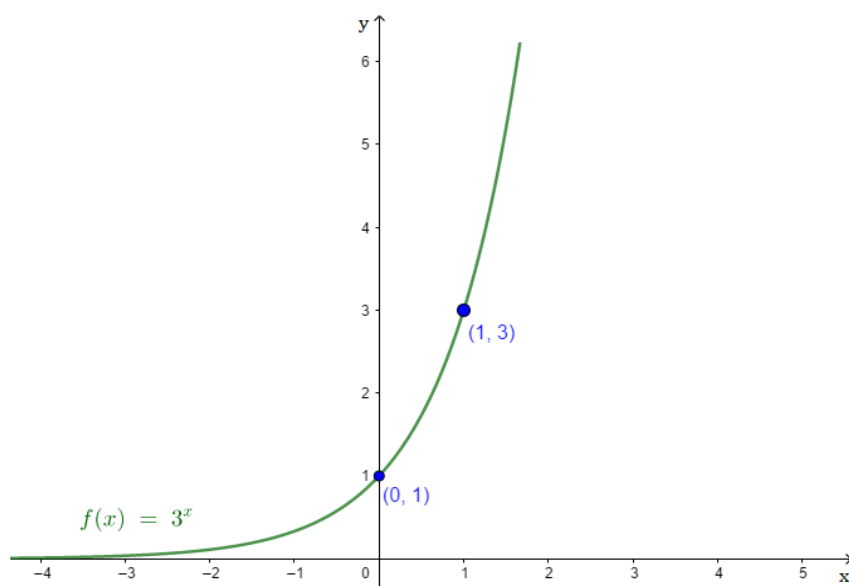


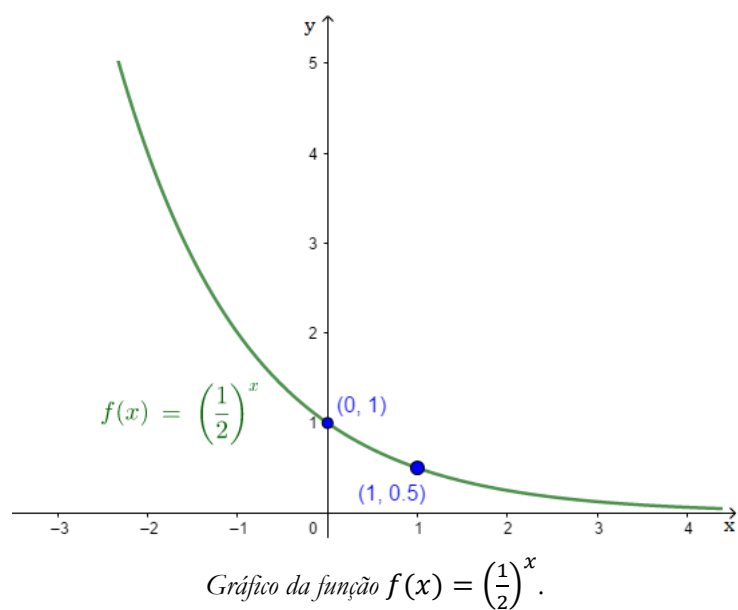
Gráfico da Função $f(x) = 3^x$.

2. Construa o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Resolução: Montando a tabela com a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, temos que:

x	$f(x)$
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

Assim, temos o seguinte gráfico:

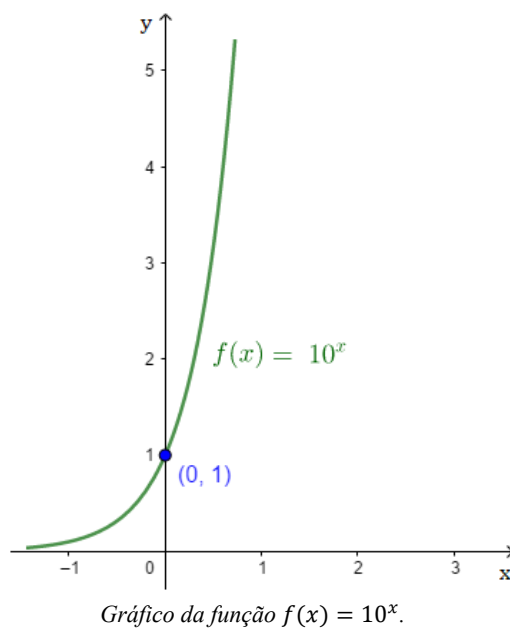


3. Construa o gráfico da função $f(x) = 10^x$.

Resolução: Montando a tabela com a função $f(x) = 10^x$, temos que:

x	$f(x)$
-2	$\frac{1}{100}$
-1	$\frac{1}{10}$
0	1
1	10
2	100

Assim, temos o seguinte gráfico:



4. Construa o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

Resolução: Montando a tabela com a função $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$, temos que:

x	$f(x)$
-2	$\frac{25}{4}$
-1	$\frac{5}{2}$
0	1
1	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{4}{25}$

Assim, temos o seguinte gráfico:

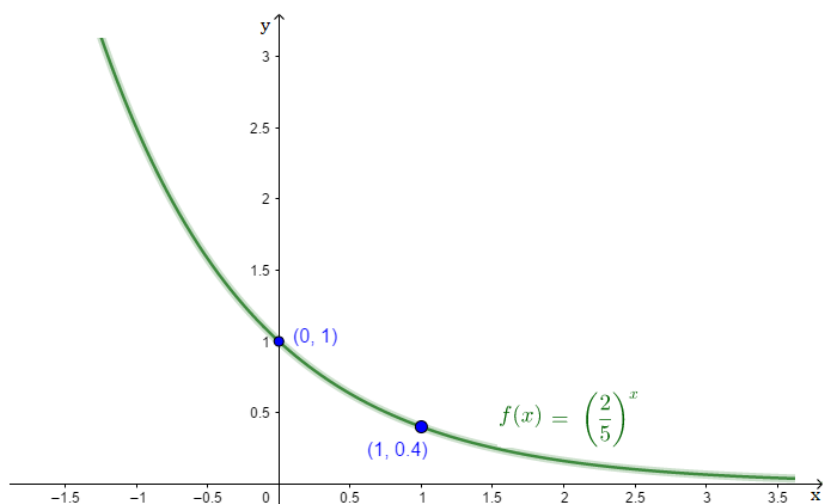


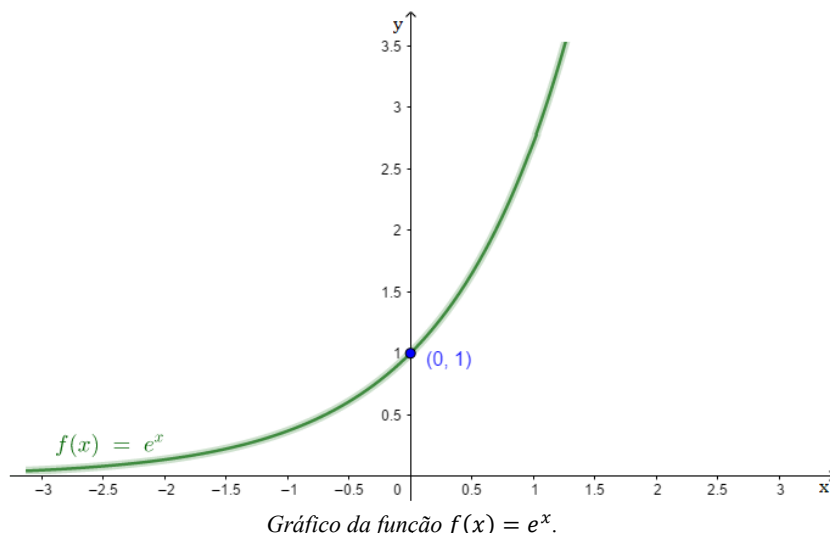
Gráfico da função $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

5. Construa o gráfico da função $f(x) = e^x$.

Resolução: Tomando $e \cong 2,7183$, temos que:

x	$f(x)$
-2	0,14
-1	0,37
0	1
1	2,72
2	7,39

Assim, temos o seguinte gráfico:



Podemos afirmar que o gráfico da função exponencial, cuja inclinação é crescente, assemelha-se ao “Caminho de Perfeição”, isto é, ao Caminho de Santidade, pois ocorrem movimentos semelhantes.

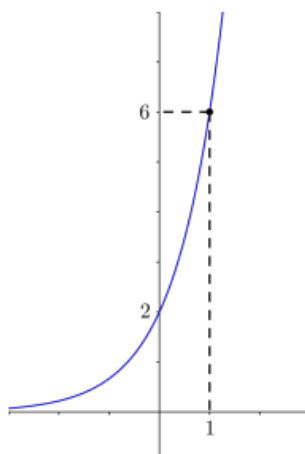
Quando a pessoa confessa seus pecados e começa a buscar uma vida de penitência e oração, começa a decolar na sua vida espiritual, porém são voos rasos dentro de um “Caminho de Perfeição”.

No gráfico da função exponencial crescente, a função começa bem próxima do eixo x e aos poucos vai crescendo.

Na vida espiritual chega um momento em que, mesmo crescendo, a pessoa para de agir com suas forças, deixando Deus conduzi-la totalmente, isto é, a pessoa passa o protagonismo de sua vida para Deus (esse papel deveria ser sempre de Deus), assim, Ele a vai modelando. E quando a vida de perfeição chega nesse processo, é como se ocorresse uma explosão, pois a vida interior cresce muito rapidamente, como acontece com o gráfico crescente da função.

ATIVIDADES

1. Seja a função $f(x) = k \cdot a^x$. Analise o gráfico de f na figura e determine a e k .



2. Seja uma cultura de bactérias que cresce de forma exponencial em um certo meio. Em determinado momento (tempo inicial) existem **2.000** bactérias e após **30** minutos esse número passou para **4.000**. Quantas bactérias estarão presentes neste meio após **2** horas?

3. Construa os gráficos abaixo:

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $h(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$

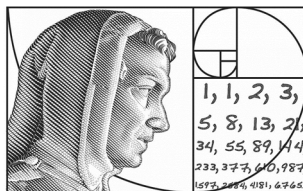
d) $t(x) = 2^x + 1$

e) $v(x) = e^x$

f) $r(x) = e^{-x}$

g) $u(x) = 2^{x+2}$

h) $d(x) = 2^{x^2}$



AULA 73

LOGARITMO



este volume, trataremos sobre Logaritmos e, nesta aula, veremos a história e a definição de logaritmo.

A palavra logaritmo tem sua origem etimológica no termo em grego LOGOS, que significa razão e ARITHMOS, que significa número.

HISTÓRIA DO LOGARITMO

O termo logaritmo foi criado por John Napier, um matemático que nasceu em Edimburgo, na Escócia, no ano de 1550.

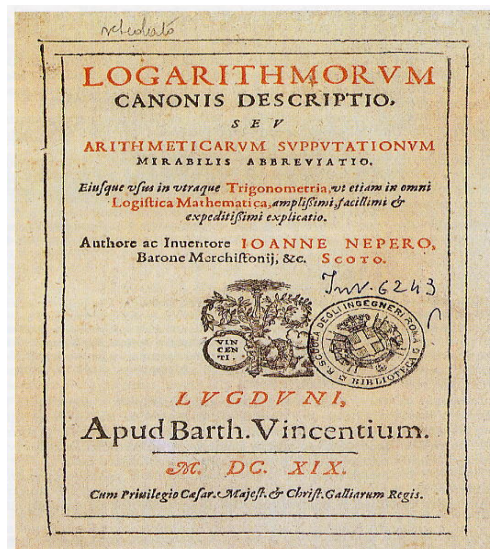
John Napier queria achar um modo para simplificar os cálculos matemáticos dos astrônomos e de outros cientistas, portanto ele se propôs a estudar uma forma de facilitar os cálculos, isto é, transformar o produto em soma e a divisão em subtração.

Em 1614, Napier publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma Descrição do Maravilhoso Cânon de Logaritmos), uma descrição de logaritmos, um conjunto de tabelas, e regras para o seu uso. Com essa publicação Napier esperava que, por meio dos seus logaritmos, ele salvaria os astrônomos por muito tempo e os livraria dos erros de cálculos. Suas tabelas de logaritmos de funções trigonométricas foram usadas durante quase um século.

Henry Briggs foi um matemático inglês impressionado pelos logaritmos, que visitava Napier frequentemente. Briggs reparou que a base que Napier utilizava era inconveniente, assim, ambos fizeram uma mudança para uma base decimal e estabeleceram as seguintes igualdades:

$$\log 1 = 0 \quad e \quad \log 10 = 1$$

Napier faleceu em 1617, porém Briggs deu continuidade aos estudos dos logaritmos, apresentando, posteriormente, a tabela de logaritmos dos números de 1 a 1000, calculados



Mirifici logarithmorum canonis descriptio

até a décima quarta casa decimal. Seis anos depois, ele completou o seu trabalho apresentando os logaritmos de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000.

Em 1628, o holandês Henry Vlacq, preencheu a lacuna das tábuas precedentes, publicando uma outra com os logaritmos dos números de 20 000 a 90 000.

E por fim, Briggs completou os logaritmos de toda a tabela em sua publicação final, chamada de "Trigonometrica Britannica".

LOGARITMO

A função logarítmica descreve vários fenômenos naturais de grande importância em nosso cotidiano, como na escala Richter, que é responsável por medir a magnitude dos terremotos.

Existem outras áreas onde é encontrada a função logarítmica, como por exemplo na Física e na Química. Na Física encontramos na escala de decibéis que mede a intensidade de sons suportáveis pelo ouvido humano. Já na Química, encontramos por exemplo, no cálculo de pH que mede o potencial hidrogeniônico de uma solução aquosa em uma escala de 0 a 14, quanto maior a quantidade de hidrogênio menor o pH.

Definição: Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$ e $b > 0$, chama-se **logaritmo** de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Onde:

$a \rightarrow$ base do logaritmo

$b \rightarrow$ logaritmando

$x \rightarrow$ logaritmo

Exemplos:

1. Calcule $\log_2 32$.

Resolução: Pela definição, temos que:

$$\log_2 32 = 5, \text{ pois } 2^5 = 32$$

2. Calcule $\log_3 \frac{1}{27}$.

Resolução: Pela definição, temos que:

$$\log_3 \frac{1}{27} = -3, \text{ pois } 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

3. Calcule $\log_8 1$.

Resolução: Pela definição, temos que:

$$\log_8 1 = 0, \text{ pois } 8^0 = 1$$

4. Calcule $\log_{0,2} 25$.

Resolução: Pela definição, temos que:

$$\log_{0,2} 25 = -2, \text{ pois } (0,2)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$$

Observação: O logaritmo é **único**, ou seja, dados a e b existe um único x tal que:

$$x = \log_a b$$

Observação: A operação em que determina o **logaritmo** é chamada **logaritmação**.

ATIVIDADES

1. Calcule usando as definições:

a) $\log_2 \frac{1}{8}$

b) $\log_8 4$

c) $\log_{0,25} 32$

d) $\log_3 \frac{1}{9}$

e) $\log_{81} 3$

f) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

g) $\log_7 \frac{1}{7}$

h) $\log_{27} 81$

i) $\log_{125} 25$

j) $\log_{\frac{1}{4}} 32$

k) $\log_{25} 0,008$

l) $\log_9 \frac{1}{27}$

m) $\log_{0,01} 0,001$

n) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32}$

o) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9}$

2. Calcule a expressão abaixo:

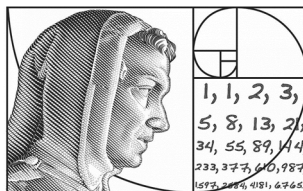
$$\log_4(\log_3 9) + \log_2(\log_{81} 3) + \log_{0,8}(\log_{16} 32)$$

3. As indicações R_1 e R_2 , na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula

$$R_1 - R_2 = \log_{10} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)$$

em que M_1 e M_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Houve dois terremotos: um correspondente a $R_1 = 8$ e o outro correspondente a $R_2 = 6$. Calcule a razão $\frac{M_1}{M_2}$.

4. Faça um breve resumo da história do logaritmo.
5. Uma outra maneira de escrever $\log_2 N = 5$, sendo N um número real positivo, é:
- a) $2^N = 5$
 - b) $N^5 = 2$
 - c) $5^2 = N$
 - d) $2^5 = N$
 - e) $N^2 = 5$



AULA 80

GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA



esta aula, estudaremos o gráfico da função logarítmica.

Os gráficos da função logarítmica podem ser construídos de duas maneiras, conforme o valor da base a .

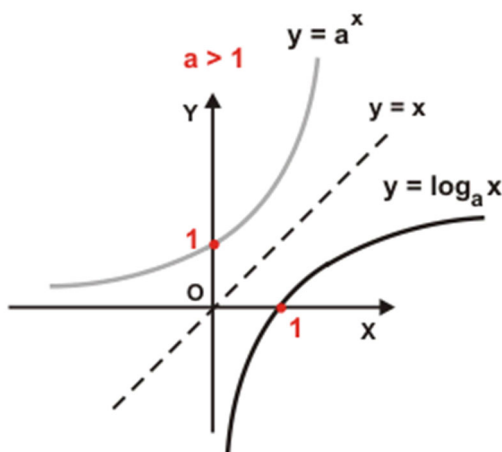
1ª MANEIRA: $a > 1$

A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ cuja base a é maior do que 1, possui uma função crescente (Propriedade 2), além disso, sabemos que ela possui uma função inversa a $g(x) = a^x$ (Propriedade 1).

Pela propriedade da função inversa sabemos que podemos construir o gráfico de uma função f através do gráfico de sua função inversa, sendo assim, construiremos o gráfico da função $f(x) = \log_a x$ através do gráfico da sua função inversa, a $g(x) = a^x$.

Na função $g(x) = a^x$ conhecemos dois pontos, $(0, 1)$ e $(1, a)$, com isso, formamos dois pontos na função logarítmica, $(1, 0)$ e $(a, 1)$. O gráfico da exponencial tem o eixo x como assíntota, já o gráfico da logarítmica é o eixo y e as duas funções são simétricas ao eixo $y = x$.

Vejamos a construção da função logarítmica de base $a > 1$ através da função inversa $g(x) = a^x$.



Construção da função logarítmica de base

$a > 1$ através da sua inversa

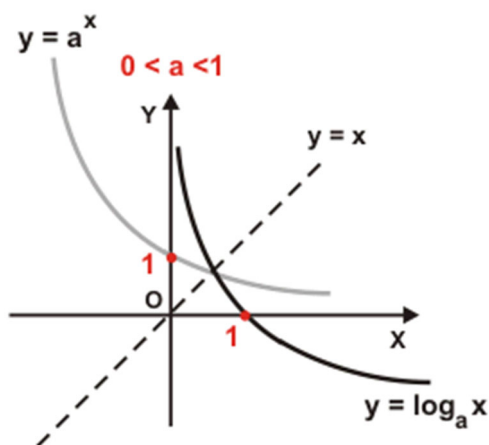
2ª MANEIRA: $0 < a < 1$

A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ cuja base a é maior do que 0 e menor do que 1, possui uma função decrescente (Propriedade 3), além disso, sabemos que ela possui uma função inversa $g(x) = a^x$ (Propriedade 1).

Pela propriedade da função inversa sabemos que podemos construir o gráfico de uma função f através do gráfico de sua função inversa. Sendo assim, construiremos o gráfico da função $f(x) = \log_a x$ através do gráfico da sua função inversa, a $g(x) = a^x$.

Na função $g(x) = a^x$ conhecemos dois pontos, $(0, 1)$ e $(1, a)$, com isso, formamos dois pontos na função logarítmica, $(1, 0)$ e $(a, 1)$. O gráfico da exponencial tem o eixo x como assíntota, já o gráfico da logarítmica é o eixo y e as duas funções são simétricas ao eixo $y = x$.

Vejamos a construção da função logarítmica de base $0 < a < 1$ através da função inversa $g(x) = a^x$.



Construção da função logarítmica de base
 $0 < a < 1$ através da sua inversa

Exemplos:

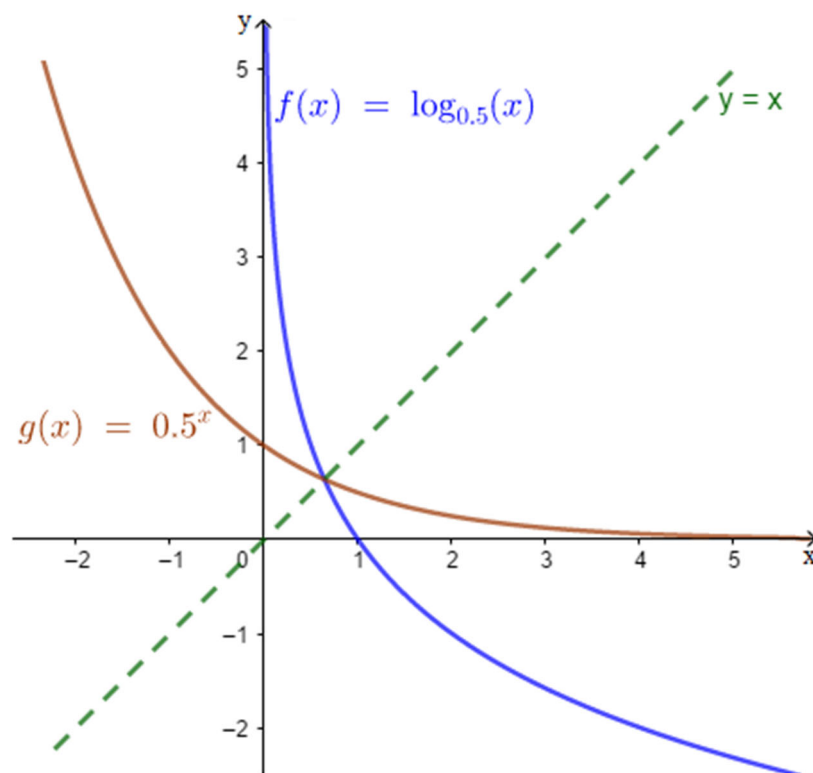
1. Construa o gráfico da função $f(x) = \log_{0,5} x$.

Resolução: Primeiramente devemos organizar a tabela com os valores de x e $f(x)$ e os valores da inversa de $f(x)$.

x	$g(x)$ $= (0,5)^x$
2	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
0	1
-1	2

-2	4
x	$f(x) = \log_{0,5} x$
4	-2
2	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2

Assim, com os valores da tabela, vamos construir o gráfico da $f(x)$ através da inversa.



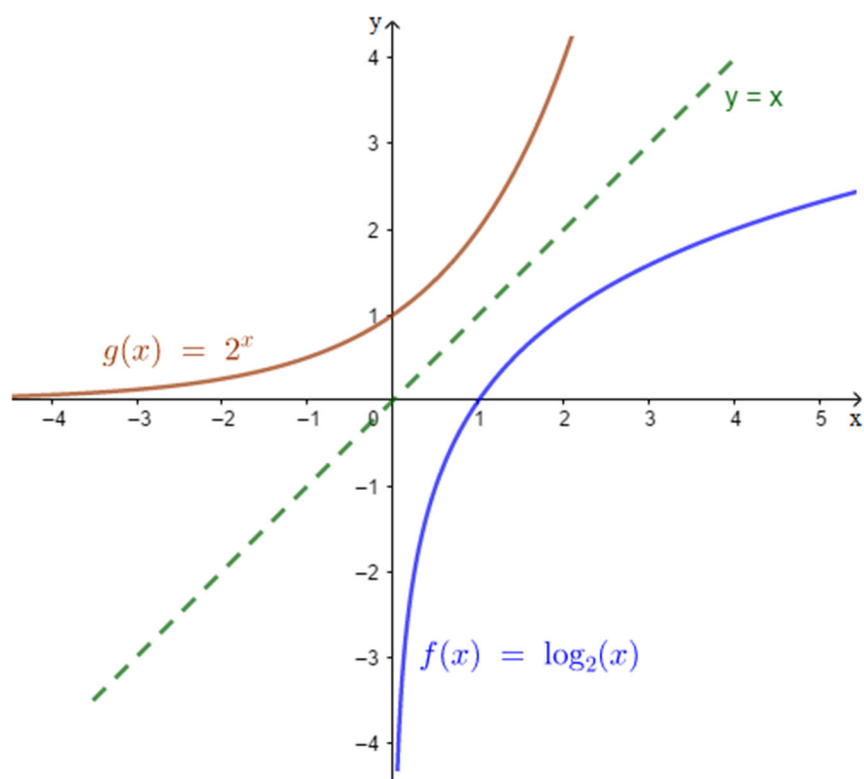
2. Construa o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$.

Resolução: Primeiramente, devemos organizar a tabela com os valores de x e $f(x)$ e os valores da inversa de $f(x)$.

x	$g(x) = 2^x$
2	4
1	2
0	1
-1	$\frac{1}{2}$

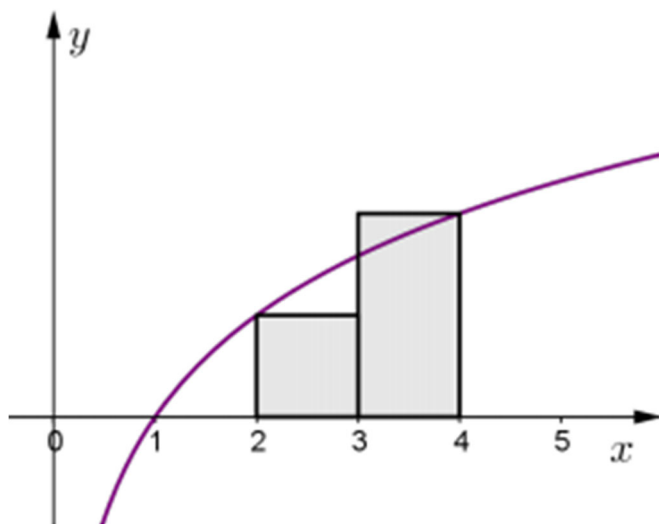
-2	$\frac{1}{4}$
x	$f(x) = \log_2 x$
4	2
2	1
1	0
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2

Assim, com os valores da tabela, vamos construir o gráfico da $f(x)$ através da inversa.



ATIVIDADES

1. A curva abaixo representa o gráfico da função $\log_2 x$, com $x > 0$. Calcule a soma das áreas dos retângulos destacados.

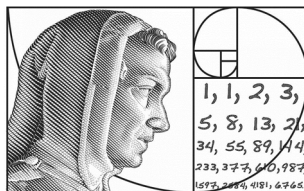


2. Esboce o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = \log_5 x$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$



AULA 83

LOGARITMOS DECIMAIS

Nesta aula, estudaremos os logaritmos decimais.

Definição: Os logaritmos decimais são os logaritmos de base 10 e são formados pela junção da característica e da mantissa.

CARACTERÍSTICA E MANTISSA

Seja um número real positivo x , este número estará sempre entre duas potências de base 10 com expoentes inteiros consecutivos.

Exemplos:

1. $x = 2,541 \Rightarrow 10^0 < 2,541 < 10^1$.
2. $x = 0,002 \Rightarrow 10^{-3} < 0,001 < 10^{-2}$.
3. $x = 41,78 \Rightarrow 10^1 < 41,78 < 10^2$.
4. $x = 964 \Rightarrow 10^2 < 964 < 10^3$.
5. $x = 154\,861 \Rightarrow 10^5 < 154\,861 < 10^6$.

Com isso, para cada $x > 0$, existe um $c \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$10^c < x < 10^{c+1} \Rightarrow \log 10^c < \log x < \log 10^{c+1} \Rightarrow c < \log x < c + 1$$

Portanto, temos que:

$$\log x = c + m \quad c \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq m < 1$$

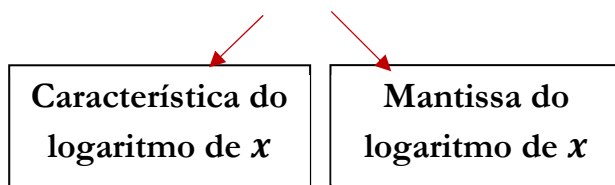
Observação: O logaritmo decimal de x é a soma de um número inteiro c com um número decimal m menor do que 1 e não negativo.

Definição: O número inteiro c encontrado no logaritmo x é chamado de característica do logaritmo de x .

Definição: O número inteiro m encontrado no logaritmo x é chamado de mantissa do logaritmo de x .

Pelas definições acima, temos que:

$$\log x = c + m \quad c \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq m < 1$$



CARACTERÍSTICA

Para encontrarmos a característica de um logaritmo devemos ficar atentos ao logaritmando, pois temos duas maneiras para encontrarmos: $x > 1$ ou $0 < x < 1$.

1ª MANEIRA: $x > 1$

Seja x o logaritmando do logaritmo decimal, tal que $x > 1$. Para esses valores de x temos que a característica do logaritmo decimal é igual ao número de algarismos de sua parte inteira menos 1.

$$c = \text{número de algarismos da parte inteira do logaritmando} - 1$$

Exemplos:

1. Encontre a característica do $\log 4,5$.

Resolução: Sabemos que $4,5 > 1$ e que 4,5 possui um algarismo na parte inteira, então, temos que:

$$c = 1 - 1 = 0$$

Portanto, a característica do $\log 4,5$ é $c = 0$.

2. Encontre a característica do $\log 102,864$.

Resolução: Sabemos que $102,864 > 1$ e que 102,864 possui três algarismos na parte inteira, então, temos que:

$$c = 3 - 1 = 2$$

Portanto, a característica do $\log 102,864$ é $c = 2$.

3. Encontre a característica do $\log 807,2$.

Resolução: Sabemos que $807,2 > 1$ e que $807,2$ possui três algarismos na parte inteira, então, temos que:

$$c = 3 - 1 = 2$$

Portanto, a característica do $\log 807,2$ é $c = 2$.

4. Encontre a característica do $\log 39$.

Resolução: Sabemos que $39 > 1$ e que 39 possui dois algarismos na parte inteira, então, temos que:

$$c = 2 - 1 = 1$$

Portanto, a característica do $\log 39$ é $c = 1$.

2ª MANEIRA: $0 < x < 1$

Seja x o logaritmando do logaritmo decimal, tal que $0 < x < 1$. Para esses valores de x temos que a característica do logaritmo decimal é o oposto da quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo.

$c =$ oposto da quantidade de zeros que precedem o primeiro algarismo significativo

Exemplos:

1. Encontre a característica do $\log 0,045$.

Resolução: Sabemos que $0 < 0,045 < 1$ e que $0,045$ possui dois zeros que precedem o primeiro algarismo significativo, então, temos que:

$$c = -2$$

Portanto, a característica do $\log 0,045$ é $c = -2$.

2. Encontre a característica do $\log 0,2864$.

Resolução: Sabemos que $0 < 0,2864 < 1$ e que $0,2864$ possui um zero que precede o primeiro algarismo significativo, então, temos que:

$$c = -1$$

Portanto, a característica do $\log 0,2864$ é $c = -1$.

3. Encontre a característica do $\log 0,0072$.

Resolução: Sabemos que $0 < 0,0072 < 1$ e que $0,0072$ possui três zeros que precedem o primeiro algarismo significativo, então, temos que:

$$c = -3$$

Portanto, a característica do $\log 0,0072$ é $c = -3$.

4. Encontre a característica do $\log 0,00039$.

Resolução: Sabemos que $0 < 0,00039 < 1$ e que $0,00039$ possui quatro zeros que precedem o primeiro algarismo significativo, então, temos que:

$$c = -4$$

Portanto, a característica do $\log 0,00039$ é $c = -4$.

MANTISSA

Para encontrarmos a mantissa devemos ver os valores conforme a Tábua de Logaritmos Decimais. Normalmente, as mantissas são números irracionais, por isso, as tábuas mostram os valores aproximados dos logaritmos dos números inteiros.

Propriedade da mantissa: A mantissa do logaritmo decimal de x não se altera se multiplicarmos x por uma potência de 10 com expoente inteiro.

Note que em decorrência da propriedade, os logaritmos decimais cujas representações são diferentes por causa da posição da vírgula, possuem mantissas iguais.

Assim, temos que $13, 130, 1300, 13000, 0,13, 0,00013$ possuem a mesma mantissa $0,113943$, mas as características são diferentes, elas são respectivamente $1, 2, 3, 4, -1$ e -3 .

Vejamos uma tabela de mantissas dos logaritmos dos números inteiros de 100 a 999 .

TABELA DE MANTISSA

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	000000	004321	008600	012837	017033	021189	025306	029384	033424	037426
11	041393	045323	049218	053078	056905	060698	064458	068186	071882	075547
12	079181	082785	086360	089905	093422	096910	100371	103804	107210	110590
13	113943	117271	120574	123852	127105	130334	133539	136721	139879	143015
14	146128	149219	152288	155336	158362	161368	164353	167317	170262	173186
15	176091	178977	181844	184691	187521	190332	193125	195900	198657	201397
16	204120	206826	209515	212188	214844	217484	220108	222716	225309	227887
17	230449	232996	235528	238046	240549	243038	245513	247973	250420	252853
18	255273	257679	260071	262451	264818	267172	269513	271842	274158	276462
19	278754	281033	283301	285557	287802	290035	292256	294466	296665	298853
20	301030	303196	305351	307496	309630	311754	313867	315970	318063	320146
21	322219	324282	326336	328380	330414	332438	334454	336460	338456	340444
22	342423	344392	346353	348305	350248	352183	354108	356026	357935	359835
23	361728	363612	365488	367356	369216	371068	372912	374748	376577	378398
24	380211	382017	383815	385606	387390	389166	390935	392697	394452	396199
25	397940	399674	401401	403121	404834	406540	408240	409933	411620	413300
26	414973	416641	418301	419956	421604	423246	424882	426511	428135	429752
27	431364	432969	434569	436163	437751	439333	440909	442480	444045	445604
28	447158	448706	450249	451786	453318	454845	456366	457882	459392	460898
29	462398	463893	465383	466868	468347	469822	471292	472756	474216	475671
30	477121	478566	480007	481443	482874	484300	485721	487138	488551	489958
31	491362	492760	494155	495544	496930	498311	499687	501059	502427	503791
32	505150	506505	507856	509203	510545	511883	513218	514548	515874	517196
33	518514	519828	521138	522444	523746	525045	526339	527630	528917	530200
34	531479	532754	534026	535294	536558	537819	539076	540329	541579	542825
35	544068	545307	546543	547775	549003	550228	551450	552668	553883	555094
36	556303	557507	558709	559907	561101	562293	563481	564666	565848	567026
37	568202	569374	570543	571709	572872	574031	575188	576341	577492	578639
38	579784	580925	582063	583199	584331	585461	586587	587711	588832	589950
39	591065	592177	593286	594393	595496	596597	597695	598791	599883	600973
40	602060	603144	604226	605305	606381	607455	608526	609594	610660	611723
41	612784	613842	614897	615950	617000	618048	619093	620136	621176	622214
42	623249	624282	625312	626340	627366	628389	629410	630428	631444	632457
43	633468	634477	635484	636488	637490	638489	639486	640481	641474	642465
44	643453	644439	645422	646404	647383	648360	649335	650308	651278	652246

45	653213	654177	655138	656098	657056	658011	658965	659916	660865	661813
46	662758	663701	664642	665581	666518	667453	668386	669317	670246	671173
47	672098	673021	673942	674861	675778	676694	677607	678518	679428	680336
48	681241	682145	683047	683947	684845	685742	686636	687529	688420	689309
49	690196	691081	691965	692847	693727	694605	695482	696356	697229	698101
50	698970	699838	700704	701568	702431	703291	704151	705008	705864	706718
51	707570	708421	709270	710117	710963	711807	712650	713491	714330	715167
52	716003	716838	717671	718502	719331	720159	720986	721811	722634	723456
53	724276	725095	725912	726727	727541	728354	729165	729974	730782	731589
54	732394	733197	733999	734800	735599	736397	737193	737987	738781	739572
55	740363	741152	741939	742725	743510	744293	745075	745855	746634	747412
56	748188	748963	749736	750508	751279	752048	752816	753583	754348	755112
57	755875	756636	757396	758155	758912	759668	760422	761176	761928	762679
58	763428	764176	764923	765669	766413	767156	767898	768638	769377	770115
59	770852	771587	772322	773055	773786	774517	775246	775974	776701	777427
60	778151	778874	779596	780317	781037	781755	782473	783189	783904	784617
61	785330	786041	786751	787460	788168	788875	789581	790285	790988	791691
62	792392	793092	793790	794488	795185	795880	796574	797268	797960	798651
63	799341	800029	800717	801404	802089	802774	803457	804139	804821	805501
64	806180	806858	807535	808211	808886	809560	810233	810904	811575	812245
65	812913	813581	814248	814913	815578	816241	816904	817565	818226	818885
66	819544	820201	820858	821514	822168	822822	823474	824126	824776	825426
67	826075	826723	827369	828015	828660	829304	829947	830589	831230	831870
68	832509	833147	833784	834421	835056	835691	836324	836957	837588	838219
69	838849	839478	840106	840733	841359	841985	842609	843233	843855	844477
70	845098	845718	846337	846955	847573	848189	848805	849419	850033	850646
71	851258	851870	852480	853090	853698	854306	854913	855519	856124	856729
72	857332	857935	858537	859138	859739	860338	860937	861534	862131	862728
73	863323	863917	864511	865104	865696	866287	866878	867467	868056	868644
74	869232	869818	870404	870989	871573	872156	872739	873321	873902	874482
75	875061	875640	876218	876795	877371	877947	878522	879096	879669	880242
76	880814	881385	881955	882525	883093	883661	884229	884795	885361	885926
77	886491	887054	887617	888179	888741	889302	889862	890421	890980	891537
78	892095	892651	893207	893762	894316	894870	895423	895975	896526	897077
79	897627	898176	898725	899273	899821	900367	900913	901458	902003	902547
80	903090	903633	904174	904716	905256	905796	906335	906874	907411	907949
81	908485	909021	909556	910091	910624	911158	911690	912222	912753	913284

82	913814	914343	914872	915400	915927	916454	916980	917506	918030	918555
83	919078	919601	920123	920645	921166	921686	922206	922725	923244	923762
84	924279	924796	925312	925828	926342	926857	927370	927883	928396	928908
85	929419	929930	930440	930949	931458	931966	932474	932981	933487	933993
86	934498	935003	935507	936011	936514	937016	937518	938019	938520	939020
87	939519	940018	940516	941014	941511	942008	942504	943000	943495	943989
88	944483	944976	945469	945961	946452	946943	947434	947924	948413	948902
89	949390	949878	950365	950851	951338	951823	952308	952792	953276	953760
90	954243	954725	955207	955688	956168	956649	957128	957607	958086	958564
91	959041	959518	959995	960471	960946	961421	961895	962369	962843	963316
92	963788	964260	964731	965202	965672	966142	966611	967080	967548	968016
93	968483	968950	969416	969882	970347	970812	971276	971740	972203	972666
94	973128	973590	974051	974512	974972	975432	975891	976350	976808	977266
95	977724	978181	978637	979093	979548	980003	980458	980912	981366	981819
96	982271	982723	983175	983626	984077	984527	984977	985426	985875	986324
97	986772	987219	987666	988113	988559	989005	989450	989895	990339	990783
98	991226	991669	992111	992554	992995	993436	993877	994317	994757	995196
99	995635	996074	996512	996949	997386	997823	998259	998695	999131	999565

Observação: A primeira coluna e a primeira linha estão em negrito, pois elas são responsáveis por formar todos os números de **100** a **999**, através da convergência entre elas.

A primeira coluna é composta por linhas de **10** até **99**, por isso estas linhas correspondem aos dois primeiros algarismos do número ao qual queremos encontrar a mantissa. Já a primeira linha é composta por colunas de **0** até **9**, que correspondem ao último algarismo.

Exemplos:

1. Encontre a mantissa do número **458**.

Resolução: O número **458** é a convergência da linha **45** e da coluna **8** que resulta na mantissa **0,660865**.

2. Encontre a mantissa do número **783**.

Resolução: O número **783** é a convergência da linha **78** e da coluna **3** que resulta na mantissa **0,893762**.

3. Encontre a mantissa do número **101**.

Resolução: O número **101** é a convergência da linha **10** e da coluna **1** que resulta na mantissa **0,004321**.

Vejamos, abaixo, os valores dos logaritmos de **1** ao **100**:

Base 10

TABELA DE LOGARITMOS DECIMAIS

nº	log	nº	log	nº	log	nº	log
1	0	21	1,322219	41	1,612784	61	1,78533
2	0,30103	22	1,342423	42	1,623249	62	1,792392
3	0,477121	23	1,361728	43	1,633468	63	1,799341
4	0,60206	24	1,380211	44	1,643453	64	1,80618
5	0,69897	25	1,39794	45	1,653213	65	1,812913
6	0,778151	26	1,414973	46	1,662758	66	1,819544
7	0,845098	27	1,431364	47	1,672098	67	1,826075
8	0,90309	28	1,447158	48	1,681241	68	1,832509
9	0,954243	29	1,462398	49	1,690196	69	1,838849
10	1	30	1,477121	50	1,69897	70	1,845098
11	1,041393	31	1,491362	51	1,70757	71	1,851258
12	1,079181	32	1,50515	52	1,716003	72	1,857332
13	1,113943	33	1,518514	53	1,724276	73	1,863323
14	1,146128	34	1,531479	54	1,732394	74	1,869232
15	1,176091	35	1,544068	55	1,740363	75	1,875061
16	1,20412	36	1,556303	56	1,748188	76	1,880814
17	1,230449	37	1,568202	57	1,755875	77	1,886491
18	1,255273	38	1,579784	58	1,763428	78	1,892095
19	1,278754	39	1,591065	59	1,770852	79	1,897627
20	1,30103	40	1,60206	60	1,778151	80	1,90309
						81	1,908485
						82	1,913814
						83	1,919078
						84	1,924279
						85	1,929419
						86	1,934498
						87	1,939519
						88	1,944483
						89	1,94939
						90	1,954243
						91	1,959041
						92	1,963788
						93	1,968483
						94	1,973128
						95	1,977724
						96	1,982271
						97	1,986772
						98	1,991226
						99	1,995635
						100	2

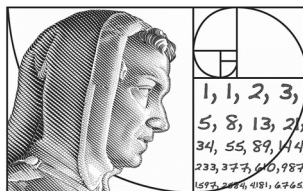
ATIVIDADES

1. Calcule:

- a) $\log 23,5$
- b) $\log 7,84$
- c) $\log 0,481$
- d) $\log 0,00991$
- e) $\log 0,102$
- f) $\log 500$
- g) $\log 8$
- h) $\log 25$
- i) $\log 77$
- j) $\log 642$

2. Determine o número de algarismos da potência 50^{50} , considerando $\log 2 = 0,301$.

3. Calcule com aproximação de centésimo o valor de $\sqrt[5]{2}$.



AULA 88

INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA



esta aula, estudaremos a interpolação aritmética.

Em todas as sequências finitas

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

os termos a_1 e a_n são chamados de **extremos** da sequência e os demais termos são chamados de **meios**.

Definição: Interpolar m meios aritméticos entre os números a e b significa encontrar uma P.A. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$ com $n = m + 2$ termos.

Observação: Para encontrar os **meios** de uma P.A. devemos encontrar, primeiramente, a razão.

Exemplos:

1. Interpole 7 meios aritméticos entre 3 e 5.

Resolução: Note que $a_1 = 3$, $a_{10} = 5$ e $n = 9$. Assim, temos que:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$5 = 3 + (9 - 1) \cdot r$$

$$8r = 2$$

$$r = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Calculando os 7 meios aritméticos, temos que:

$$a_2 = a_1 + r = 3 + \frac{1}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$a_3 = a_2 + r = \frac{13}{4} + \frac{1}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$a_4 = a_3 + r = \frac{14}{4} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$a_5 = a_4 + r = \frac{15}{4} + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$a_6 = a_5 + r = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

$$a_7 = a_6 + r = \frac{17}{4} + \frac{1}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

$$a_8 = a_7 + r = \frac{18}{4} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$

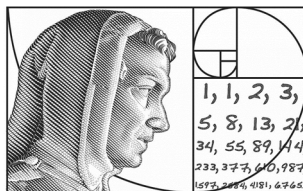
Portanto, a P.A. é

$$\left(3, \frac{13}{4}, \frac{7}{2}, \frac{15}{4}, 4, \frac{17}{4}, \frac{9}{2}, \frac{19}{4}, 5\right)$$

ATIVIDADES

1. Intercale 5 meios aritméticos entre -2 e 40 .
2. Quantos meios aritméticos devem ser interpolados entre 12 e 34 para que a razão da interpolação seja $\frac{1}{2}$.
3. Qual a razão da P.A. que possui 12 meios aritméticos entre 100 e 200 ?
4. De 100 a 1000 , quantos são os múltiplos de 2 ou 3 ?
5. Ao inserir n meios aritméticos entre 1 e n^2 , determine a razão da P.A.:

$$1, \dots, n^2$$



AULA 89

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.A.



esta aula, estudaremos a soma dos termos de uma P.A.

Para encontrarmos uma fórmula para a soma de n termos de uma P.A., se faz necessário saber somar os n primeiros números inteiros positivos.

Usaremos o Teorema 1 para demonstrar a fórmula que representa a soma dos n primeiros números inteiros positivos.

Teorema 1: A soma dos n primeiros números inteiros positivos é dado por

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração: Vamos demonstrar este Teorema por indução finita.

Primeiramente para $n = 1$, temos que:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

$$1 = \frac{2}{2}$$

$$1 = 1$$

Supondo que vale para n , iremos provar que vale para $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + n + 1 &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)([n+1]+1)}{2}$$

Portanto,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

■ Q.E.D

Sabemos que um termo somado à razão resulta no próximo termo de uma P.A., como podemos ver novamente abaixo:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$a_5 = a_4 + r$$

⋮

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Além disso, encontramos um termo geral para a **P.A.**:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Assim, se tivermos uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ e formos somar seus n termos, temos que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1 + r + a_2 + r + \dots + a_{n-1} + r$$

Transformando todos os termos em função do primeiro termo através do termo geral da **P.A.**, temos que:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &= a_1 + (a_1 + r) + (a_2 + r) + \dots + (a_{n-1} + r) \\ &= a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + \dots + (a_1 + (n-1)r) \end{aligned}$$

Separando todos os n primeiros termos da razão, temos que:

$$\begin{aligned} &a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + \dots + (a_1 + (n-1)r) \\ &= (a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1) + (r + 2r + 3r + \dots + (n-1)r) \\ &= n \cdot a_1 + (r + 2r + 3r + \dots + (n-1)r) \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1, vamos somar $(n - 1)$. Então, temos que:

$$\begin{aligned}
 & n \cdot a_1 + (r + 2r + 3r + \dots + (n - 1)r) \\
 &= n \cdot a_1 + \frac{(n - 1)([n - 1] + 1)}{2} \cdot r \\
 &= n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot r \\
 &= \frac{2n \cdot a_1}{2} + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} \cdot r \\
 &= \frac{2na_1 + n(n - 1)r}{2} \\
 &= \frac{n \cdot (2a_1 + (n - 1)r)}{2} \\
 &= \frac{n \cdot (a_1 + a_1 + (n - 1)r)}{2} \\
 &= \frac{n \cdot (a_1 + [a_1 + (n - 1)r])}{2} \\
 &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}
 \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos n termos da **P.A.** é:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Observação: S_n representa a soma dos n termos de uma **P.A.**

Exemplos:

1. Qual a soma dos 10 primeiros termos da **P.A.** $(1, 5, 9, \dots)$?

Resolução: Para usarmos a fórmula da soma de uma P.A. precisamos saber primeiramente os valores de a_1 e a_{10} . Já conhecemos o valor a_1 , mas não conhecemos o valor de a_{10} .

Assim, temos que:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 4$$

$$a_{10} = 1 + 9 \cdot 4$$

$$a_{10} = 1 + 36$$

$$a_{10} = 37$$

Conhecendo o valor de a_{10} , podemos calcular a soma dos 10 primeiros termos dessa **P.A.**:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (1 + 37)}{2}$$

$$S_{10} = \frac{10 \cdot 38}{2}$$

$$S_{10} = \frac{380}{2}$$

$$S_{10} = 190$$

Portanto, a soma dos 10 primeiros elementos da **P.A.** (1, 5, 9, ...) equivale a 190.

2. A soma dos n primeiros números pares positivos de uma **P.A.** é 132. Encontre o valor de n .

Resolução: Notemos que $a_1 = 2$ e $r = 2$. Para descobrir a_n , temos que:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2$$

$$a_n = 2 + 2n - 2$$

$$a_n = 2n$$

Assim, temos que:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$132 = \frac{n \cdot (2 + 2n)}{2}$$

$$132 = \frac{2n + 2n^2}{2}$$

$$132 = n^2 + n$$

$$n^2 + n - 132 = 0$$

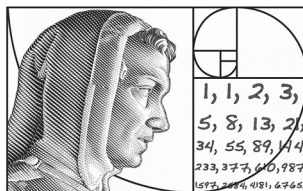
Resolvendo a equação, obtemos:

$$n = 11 \quad \text{ou} \quad n = -12$$

Portanto, a soma dos **11** primeiros números pares positivos é **132**.

ATIVIDADES

1. Calcule a soma dos **25** termos iniciais da P.A.
(1, 7, 13, ...)
2. Obtenha a soma dos **200** primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos. Calcule também a soma dos n termos iniciais da mesma sequência.
3. Determine a P.A. em que o vigésimo termo é **2** e a soma dos **50** termos iniciais é **650**.
4. Santa Teresinha do Menino Jesus tinha que regar **60** roseiras plantadas ao longo de uma vereda retilínea e distando **1 m** uma da outra. Ela enchia seu regador numa fonte situada na mesma vereda, a **15 m** da primeira roseira, e a cada viagem regava **3** roseiras. Começando e terminando na fonte, qual o percurso total que ela fazia até regar todas as roseiras?
5. Qual é a soma dos múltiplos positivos de **5** formados por **3** algarismos?
6. Obtenha uma P.A. em que a soma dos n primeiros termos é $n^2 + 2n$ para todo n natural.



AULA 94

PRODUTO



esta aula, estudaremos o produto dos n primeiros termos da P.G.

Da mesma forma que existe uma fórmula para calcular a soma dos n primeiros termos de uma P.G., existe um Teorema que demonstra a fórmula para calcular o produto dos n primeiros termos da P.G., onde P_n representa o produto dos n primeiros termos.

Teorema: O produto dos n primeiros termos de uma P.G. é:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Demonstração: Vamos demonstrar este Teorema por indução finita.

Primeiramente para $n = 1$, temos que:

$$P_1 = a_1^1 \cdot q^{\frac{1(1-1)}{2}}$$

$$P_1 = a_1 \cdot q^{\frac{1 \cdot 0}{2}}$$

$$P_1 = a_1 \cdot q^0$$

$$P_1 = a_1$$

Supondo que vale para n , iremos provar que vale para $n + 1$:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_{n+1}$$

Pela fórmula do termo geral, temos $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$. Assim, temos que:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_1 \cdot q^n$$

$$= a_1^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2} + n}$$

$$= a_1^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n-1) + 2n}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= a_1^{n+1} \cdot q^{\frac{n(n-1+2)}{2}} \\
&= a_1^{n+1} \cdot q^{\frac{n+1(n)}{2}} \\
&= a_1^{n+1} \cdot q^{\frac{n+1([n+1]-1)}{2}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

■ Q.E.D

Exemplos:

1. Calcule o produto dos 10 primeiros termos da **P.G.** (1, 5, 25, ...)?

Resolução:

$$\begin{aligned}
P_n &= a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
P_{10} &= 1^{10} \cdot 5^{\frac{10(10-1)}{2}} \\
P_{10} &= 5^{\frac{10 \cdot 9}{2}} \\
P_{10} &= 5^{45}
\end{aligned}$$

Portanto, a soma dos 10 primeiros elementos da **P.G.** (1, 5, 25, ...) equivale a 5^{45} .

2. Calcule o produto dos 5 primeiros termos da **P.G.** $(3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots)$?

Resolução:

$$\begin{aligned}
P_n &= a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \\
P_5 &= 3^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5(5-1)}{2}} \\
P_5 &= 243 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \cdot 4}{2}}
\end{aligned}$$

$$P_5 = 243 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P_5 = 243 \cdot \frac{1^{10}}{2}$$

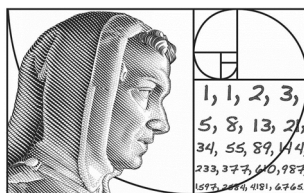
$$P_5 = \frac{243}{1024}$$

Portanto, a soma dos 5 primeiros elementos da **P.G.** $(3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots)$ equivale a $\frac{243}{1024}$.

ATIVIDADES

1. Em cada uma das P.G. abaixo, calcule o produto dos n termos iniciais:

- a) $(1, 2, 4, 8, \dots)$ e $n = 10$
- b) $(-2, -6, -18, -54, \dots)$ e $n = 20$
- c) $(3, -6, 12, -24, \dots)$ e $n = 25$
- d) $((-2)^0, (-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, \dots)$ e $n = 66$
- e) $((-3)^{25}, (-3)^{24}, (-3)^{23}, \dots)$ e $n = 51$
- f) $(a^1, -a^2, a^3, -a^4, \dots)$ e $n = 100$



AULA 97

REVISÃO DE GEOMETRIA PARTE I

Nesta aula, faremos uma revisão dos conceitos primitivos da geometria.

Antes de adentrarmos nos conceitos primitivos, vamos lembrar a origem da geometria.

ORIGEM DA GEOMETRIA



Sabemos que a geometria é um dos ramos fundamentais da matemática, ela possui uma história rica e multifacetada que remonta a várias civilizações antigas. Sua origem está profundamente enraizada nas necessidades práticas e nos desafios do cotidiano que impulsionaram o desenvolvimento de conceitos e técnicas geométricas.

EGITO ANTIGO

No Egito Antigo, por volta de 3000 a.C., a geometria emergiu como uma ferramenta essencial para a construção de pirâmides e templos, bem como para a medição de terras agrícolas. As inundações anuais do Rio Nilo frequentemente alteravam os limites dos campos, exigindo um sistema preciso de medição para restaurar os limites originais. O **Papiro de Rhind**, datado de cerca de 1650 a.C., é um dos mais antigos documentos matemáticos conhecidos e contém uma coleção de problemas geométricos que revelam o conhecimento avançado dos egípcios.

O Santo e doutor da Santa Igreja, Santo Isidoro de Sevilha, escreve em sua principal obra, intitulada Etimologias que a geometria tem origem na medição da terra pelos egípcios, como poderemos ver no trecho abaixo que foi tirado de sua obra principal.

“Diz-se que a ciência geométrica foi iniciada pelos egípcios, uma vez que, ao transbordar o Rio Nilo e se apagarem com o limo os limites dos campos, se começou – e isto deu nome à esta disciplina – a delimitar, mediante linhas e medidas, as terras que deviam dividir-se. Depois esta ciência chegou a tal altura, que se começaram também a medir os espaços do mar, do céu e do firmamento. Enfim, arrastados os homens por seu afã de estudar, empreenderam a investigação dos

*espaços do céu, uma vez conhecidas as dimensões da terra. E começaram assim a estabelecer qual era a distância entre a lua e a terra, ou entre a lua e o sol, ou a medida da distância até o vértice do céu; do mesmo modo, determinaram o número de estádios¹, mais ou menos, que tinham as distâncias do céu e o contorno do orbe. Mas, como esta ciência teve seu início na medição da terra, conservou-se, por isso, o nome do que foi sua origem. **Daí que sua denominação geometria deriva de ‘terra’ e de ‘medida’.** De fato, em grego, ‘terra’ se diz gê, e ‘medida’ metra. O conteúdo desta ciência são as linhas, as distâncias, as medidas e as figuras; e nas figuras se consideram as dimensões e os números.”*

(Etymologiarum, Santo Isidoro de Sevilha)

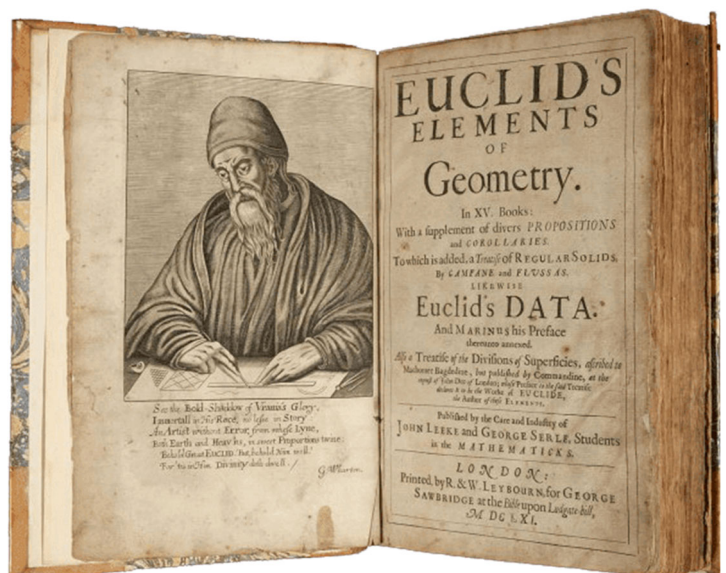
MESOPOTÂMIA

Paralelamente, na Mesopotâmia, os babilônios também desenvolveram uma compreensão sofisticada da geometria. Eles usavam tábuas de argila para registrar cálculos matemáticos, que incluíam a determinação de áreas e volumes. Evidências sugerem que eles conheciam o Teorema de Pitágoras muito antes de Pitágoras, demonstrando uma aplicação prática da geometria em problemas cotidianos, como a construção e a agrimensura.

Observação: Na Mesopotâmia tivemos a construção da Torre de Babel e da Arca de Noé, exemplos de construção que necessitaram de um conhecimento geométrico.

GRÉCIA ANTIGA

A Grécia Antiga é amplamente reconhecida por ter sistematizado a geometria, transformando-a em uma disciplina dedutiva rigorosa. Tales de Mileto, por volta de 600 a.C., é um dos primeiros nomes associados ao uso de lógica e dedução na geometria. No entanto, foi **Euclides de Alexandria** quem consolidou a geometria como uma ciência formal. Sua obra monumental "Os Elementos", escrita por volta de 300 a.C., organizou o conhecimento geométrico existente em um sistema axiomático que se tornou a base do estudo da geometria por mais de dois mil anos.



¹ Estádio era a unidade de medida utilizada na Antiguidade. Um estádio equivale a 185 metros.

Observação: Platão, um dos pilares da filosofia, mandou escrever no frontão de sua Academia: “Quem não é geômetra não entre!”, pois sabia que bons filósofos possuem grande capacidade de abstração, e a geometria era a arte que mais possibilitava a alguém ter tal capacidade.



Recorte do afresco A Escola de Atenas, de Raffaello Sanzio. Platão está ao lado de Aristóteles, apontando o dedo para cima (o que remete ao mundo das ideias, segundo a doutrina de Platão). Euclides se encontra no canto direito inferior da imagem com um compasso na mão, objeto utilizado na geometria, ensinando os seus alunos.

ÍNDIA E CHINA ANTIGAS

Além do Egito e da Grécia, a geometria também floresceu na Índia e na China antigas. Na Índia, matemáticos como Aryabhata e Brahmagupta fizeram contribuições significativas, especialmente no campo da astronomia, que dependia fortemente de conceitos geométricos. Na China, textos matemáticos clássicos como o "Chou Pei Suan Ching" e os "Nove Capítulos sobre a Arte Matemática" contêm numerosos problemas geométricos e suas soluções, demonstrando um conhecimento avançado e uma aplicação prática da geometria.

GEOMETRIA

A Geometria é dividida em três partes: Geometria Plana, Espacial e Analítica.

Observação: A Geometria Plana é, também, chamada de Geometria Euclidiana.

No livro *Etymologiarum* de Santo Isidoro de Sevilha, ele descreve os objetos de estudo da geometria como mostra o trecho abaixo:

O conteúdo desta ciência são as linhas, as distâncias, as medidas e as figuras; e nas figuras se consideram as dimensões e os números.”

(Etymologiarum, Santo Isidoro de Sevilha)

Dessa forma, podemos definir os objetos de estudo da geometria da seguinte forma:

Definição: Os objetos de estudo da geometria são: linhas, distâncias, medidas e figuras.

GEOMETRIA EUCLIDIANA

A geometria euclidiana foi fundamentada em três princípios:

1. **Entes ou noções primitivas:** ponto, reta e plano.
2. **Postulados ou axiomas:** são afirmações aceitas sem precisar demonstrá-las, sendo consideradas como verdades.
3. **Teoremas:** são proposições que devem ser demonstradas como verdadeiras, por meio de proposições já demonstradas ou através de axiomas.

Observação: O termo teorema foi inserido na geometria por Euclides devido à etimologia dessa palavra, que significa proposição que pode ser provada.

NOÇÕES PRIMITIVAS DA GEOMETRIA

Para compreendermos qualquer assunto, devemos primeiro ter uma clareza dos fundamentos desse assunto. Sendo assim, para estudarmos geometria, devemos ter clareza dos seus fundamentos, de suas noções primitivas.

Definição: Ponto, reta e plano são noções primitivas da geometria.

Desta forma, iniciaremos o nosso estudo com o objetivo de revisarmos as definições de ponto, reta e plano e suas derivações.

PONTO

A palavra ponto deriva do latim de punctus, e significa “ponto, picada”, ou, no particípio passado de *pungere*, “fincar, espetar, picar”.

Definição: o **ponto** é sem dimensão (sem tamanho) e não se encontra no espaço, não tem interior nem exterior.

Pela definição de ponto, temos que ele não tem dimensão, ou seja, tecnicamente não podemos ver o ponto. Mesmo assim, os pontos são representados através de uma marca circular, geralmente a menor marca que se pode fazer. É importante ressaltarmos que essa marca circular não é o ponto, é apenas a representação, e isso ocorre pois, é próprio do homem representar graficamente algo que não se pode ver. Como exemplo, temos os Anjos, que são puros espíritos, ou seja, não possuem matéria, e são representados com asas e corpo, mesmo não os tendo.

Definição: O ponto é sempre representado por letras maiúsculas.

•
A

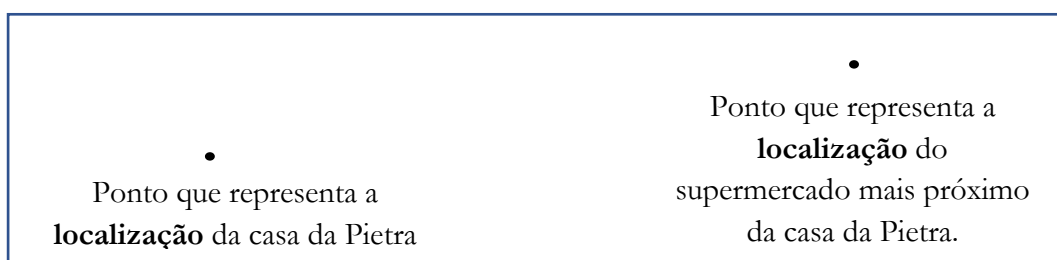
Observação: Na matemática, os pontos são usados para indicar localização.

Exemplos:

1. A imagem das capitais brasileiras representadas por pontos no mapa do Brasil.



2. Representação, através de pontos da localização, da casa da Pietra e do supermercado mais perto da sua casa.



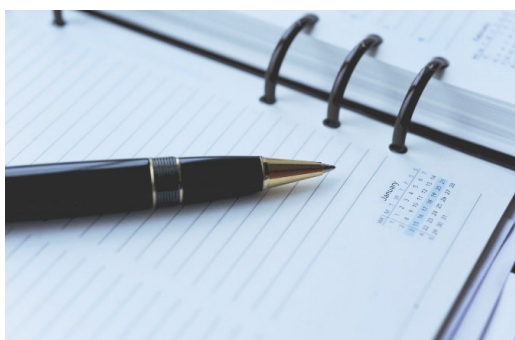
3. As estrelas no céu parecem pontos.



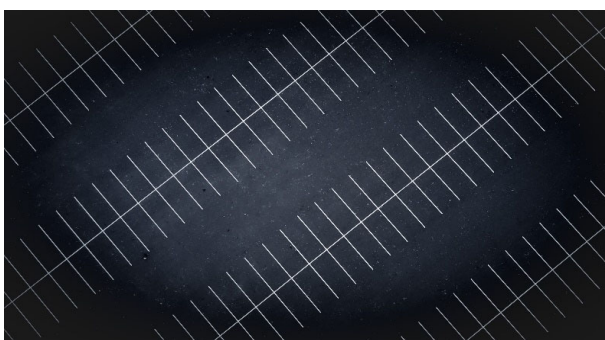
LINHA

A palavra linha tem origem no termo latino LINEA, que significa corda fina, fio de linho.

O sentido primitivo desta palavra era corda fina, porém a partir do século XIV passou a designar um traço ou marca estreita e alongada como um fio, desenhada sobre papel ou algum outro suporte.



As linhas em uma agenda.



Uma visão noturna de drone de linhas de estacionamento.

SEGMENTO DE RETA

A palavra segmento tem origem no termo latino SECARE, que significa cortar. Então, um segmento é algo que foi cortado.

Na matemática, definimos da seguinte maneira:

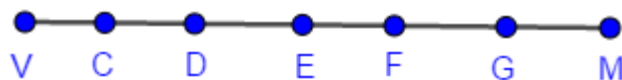
Definição: o segmento de reta é uma linha que possui um ponto de origem e um ponto no fim.

Segmento $\overline{AB}$



O Segmento de Reta pode ser comparado com a nossa vida terrena, pois podemos fazer a linha da nossa vida, onde marcaremos os pontos mais importantes que vivemos, tanto as alegrias quanto as tristezas.

Abaixo temos um exemplo de linha com pontos, cada ponto representado pelas letras V, C, D, E, F, G e M .



Dentro desta linha teremos dois grandes destaques: o **Ponto da Vida** e o **Ponto da Morte**.

O **Ponto da Vida** é o ponto de origem da nossa vida, ou seja, é o ponto que representa a fecundação do óvulo pelo espermatozoide.

O **Ponto da Morte** é o ponto do fim da nossa vida na Terra, ou seja, é quando morremos.

Como a nossa vida na Terra tem um ponto de origem que é a infusão da alma, que se dá imediatamente após a fecundação do óvulo, e também tem um ponto de fim, que é quando morremos, podemos comparar a vida na Terra com o Segmento de Reta.

Para denotar um segmento de reta, indica-se a letra que representa o primeiro ponto (da esquerda para a direita), seguida da segunda letra que representa o segundo ponto com um traço em cima das letras:

Segmento de reta $\overline{AB}$



Os pontos extremos A e B do seguimento são também denominados vértices.

DESENHO - TRANSPORTE DE SEGMENTOS

Agora, iremos realizar o transporte de segmentos, dado um segmento $\overline{AB}$, com o auxílio do compasso.



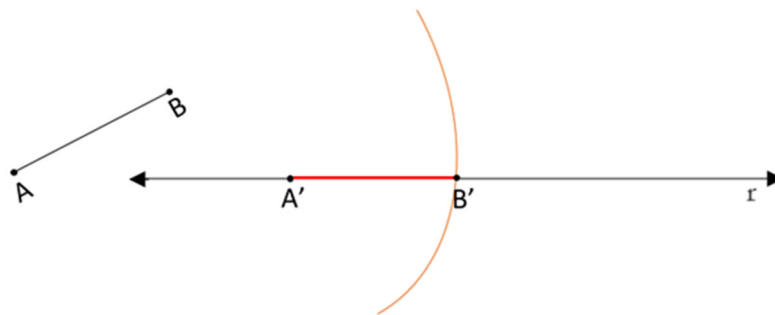
Para realizamos o transporte de segmentos, devemos seguir os seguintes passos:

1º passo: Trace uma reta r qualquer.

2º passo: Marque um ponto A' na reta r .

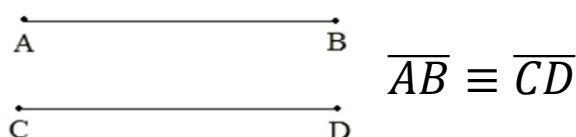
3º passo: Fixe a ponta seca em A e o grafite em B , para medir o segmento $\overline{AB}$.

4º passo: Mantenha a abertura do compasso do passo anterior e fixe a ponta seca em A' e marque o ponto B' na reta r . O segmento $\overline{A'B'}$ tem o mesmo tamanho que o segmento $\overline{AB}$. Logo, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.



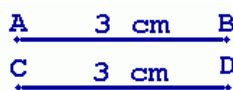
SEGMENTOS CONGRUENTES

Definição: Dois segmentos são ditos **segmentos congruentes** quando possuem a mesma medida.



Exemplos:

- No desenho seguinte $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, pois ambos são segmentos contendo 3 cm . A congruência entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é denotada por $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.



PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Definição: Um ponto M interno a um segmento $\overline{AB}$ é denominado ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se M divide $\overline{AB}$ em dois segmentos congruentes.



Na definição de um ponto médio, vimos que o ponto médio divide o segmento em dois segmentos congruentes, isto significa que o ponto médio divide o segmento em dois segmentos iguais. Logo, o ponto médio é o centro do segmento.

Observação: Na figura acima, M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, pois $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

DESENHO – PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

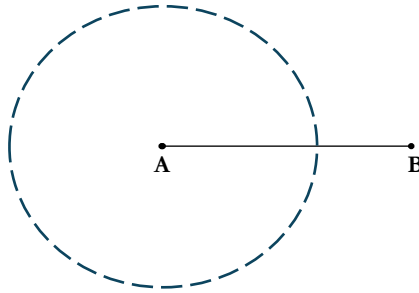
Agora, iremos encontrar o ponto médio de um segmento com o auxílio do compasso.

Para realizarmos a construção geométrica do ponto médio de um segmento, devemos seguir os seguintes passos:

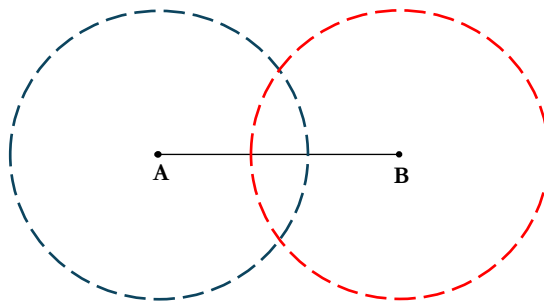
1º passo: Trace um segmento $\overline{AB}$ de qualquer comprimento.



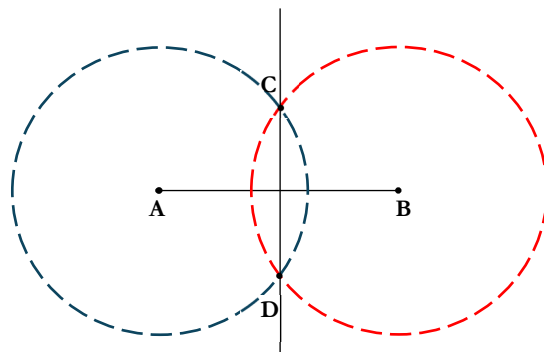
2º passo: Fixe a ponta seca do compasso no ponto A e abra o compasso com uma abertura pouco maior que a metade do segmento e trace a circunferência.



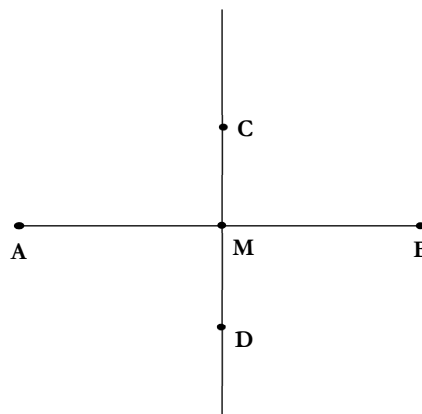
3º passo: Mantendo a mesma abertura do compasso, fixe a ponta seca no ponto B e repita o processo do segundo passo.



4º Os semicírculos interceptam em dois pontos. Trace a reta que liga esses dois pontos.



O ponto M por onde a reta determinada por C e D passa, é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



Definição: A reta determinada por $\overleftrightarrow{CD}$ é chamada **mediatriz** do segmento $\overline{AB}$.

Observação: A mediatriz de um segmento é a reta que é perpendicular ao segmento e passa pelo ponto médio desse segmento. Dessa forma, todos os pontos da mediatriz estão à mesma distância dos pontos das extremidades do segmento.

SEMI-RETA

A palavra semirreta possui um prefixo: *semi*, que deriva do latim e significa meio, metade.

Portanto, uma semirreta pode ser compreendida como a metade de uma reta. Entretanto, qual seria a diferença entre uma semirreta e um segmento de reta?

Um segmento de reta tem um ponto de origem e um ponto no fim, enquanto uma semirreta tem um ponto de origem como o segmento de reta, porém não tem fim, isto é, é infinita, como veremos na definição abaixo.

Definição: a semirreta é uma linha com um ponto de origem e não tem fim.

Semirreta $\overrightarrow{AB}$



Já vimos que o segmento de reta é comparado com a nossa vida terrena; porém, a semirreta pode ser comparada com o quê?

Ela é comparada com a nossa vida, pois todos temos um ponto de origem, que consiste na fecundação do óvulo e de imediato a infusão da alma. Mas sabemos que a nossa vida não termina quando morremos, ou seja, não temos apenas uma vida terrena, mas também uma vida eterna, que pode ser vivida no Céu ou no Inferno.

A vivência do Céu e do Inferno é uma vivência eterna, que não tem fim, como a semirreta, que não possui fim, razão por que podemos comparar a semirreta com a nossa vida, pois temos uma origem e uma vida na eternidade, que dependerá de nossas escolhas, de amar ou não amar a Deus.

As semirretas serão representadas graficamente por uma linha, como as retas, com a diferença de que uma de suas extremidades é um ponto específico e a outra contém uma seta para indicar continuidade. Para representar uma semirreta, utilizam-se os dois pontos, o de origem e outro qualquer, com uma seta em cima.

Semirreta $\overrightarrow{OA}$



ATIVIDADES

1. Quais foram algumas das principais aplicações práticas da geometria no Egito Antigo?
2. O que significa a palavra geometria?
3. Como os babilônios da Mesopotâmia contribuíram para o desenvolvimento da geometria?
4. Quem foi Euclides de Alexandria e qual foi sua contribuição para a geometria?

5. O que Platão escreveu no frontão de sua Academia? Por quê?

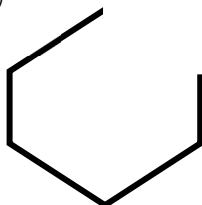
6. Quais são alguns exemplos de como a geometria foi utilizada na Índia e na China antigas?

7. Como a geometria evoluiu de uma ferramenta prática para uma ciência formal?

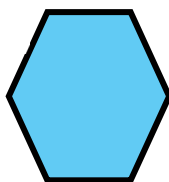
8. Explique, de maneira sucinta, o que é o ponto. Dê exemplos.

9. Quantos segmentos de reta estão destacados em cada uma das figuras?

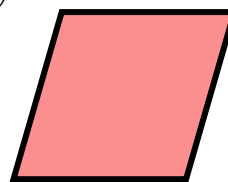
a)



b)

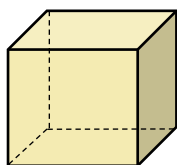


c)

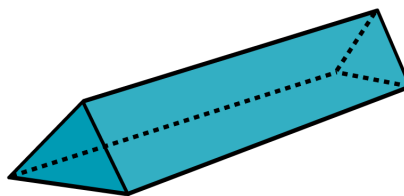


10. Cada segmento que você vê destacado nos sólidos abaixo se chama aresta. Quantas arestas temos em cada um deles?

a)



b)



11. Faça o transporte dos seguintes segmentos para suas respectivas retas:

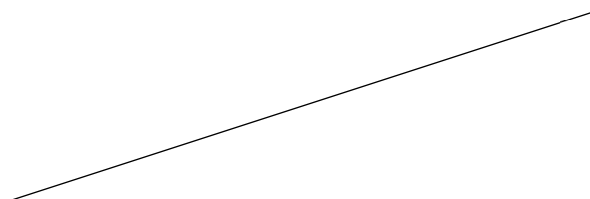
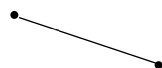
a)



b)



c)



12. Construa o ponto médio de um segmento de uma reta qualquer.

13. Observando a figura abaixo, temos que M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Se $\text{med}(\overline{AB}) = x$ e $\text{med}(\overline{BC}) = y$, qual é a expressão algébrica que representa $\text{med}(\overline{MN})$?



14. Encontre o ponto médio de cada segmento a seguir com o compasso

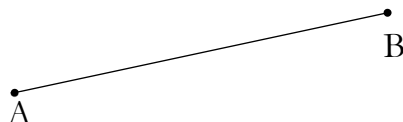
a)



b)

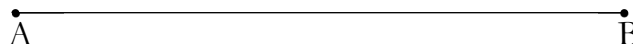


c)



15. Encontre o ponto médio de cada segmento a seguir com a régua.

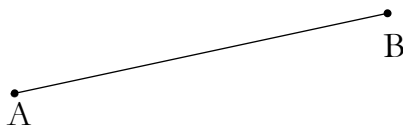
a)



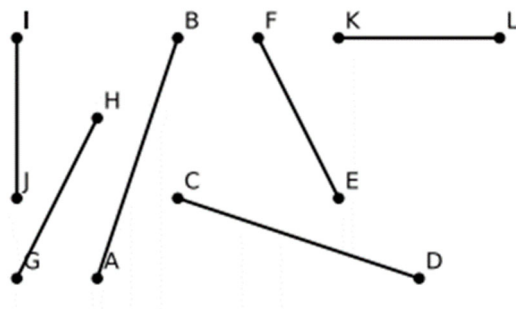
b)



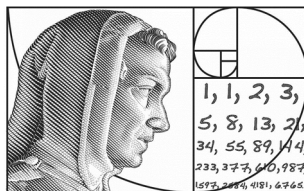
c)



16. Utilizando o compasso, determine na figura ao lado que segmentos são congruentes:



17. Defina semirreta.
18. Explique a diferença entre semirreta e segmento de reta.
19. Construa três semirretas diferentes e escreva a notação gráfica de cada uma.



AULA 101

TRIÂNGULOS - PARTE II

Nesta aula, daremos continuidade ao estudo dos triângulos estudando desigualdade triangular, semelhança de triângulos, ângulo externo no triângulo, Teorema de Tales e áreas de figuras planas.

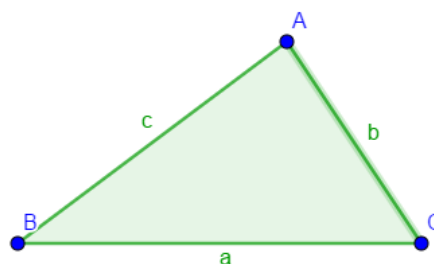
DESIGUALDADE TRIANGULAR

Definição: Em qualquer triângulo, a medida de um lado é sempre menor que as somas dos outros dois lados.

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$$

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

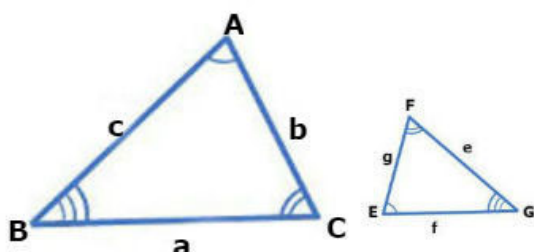
$$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$$



Desigualdade Triangular.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Definição: Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos⁵ proporcionais. O símbolo $\sim$ representa a semelhança entre dois triângulos.



Triângulos Semelhantes.

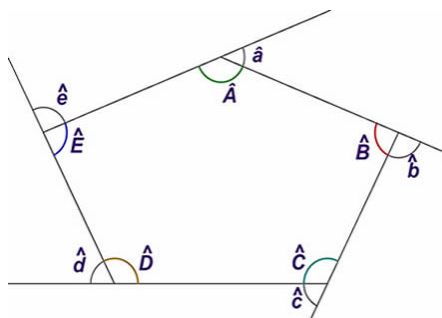
⁵ Dois lados homólogos são lados que estão em diferentes triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

Os ΔABC e ΔEFG são semelhantes, pois

$$\Delta ABC \sim \Delta EFG \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{E} \\ \hat{B} \equiv \hat{G} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \\ \frac{a}{e} = \frac{b}{g} = \frac{c}{d} \end{cases}$$

ÂNGULO EXTERNO

Definição: Em qualquer polígono convexo⁶, o número de vértices, de lados, de ângulos internos e de ângulos externos é o mesmo.

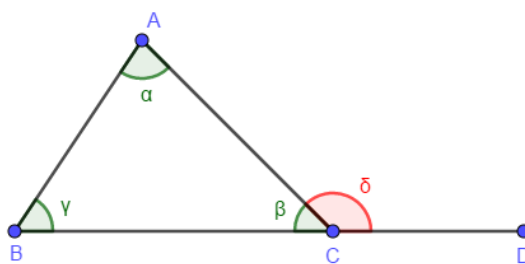


Ângulos externos de um polígono convexo.

A medida do ângulo externo no triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele, conforme veremos no teorema abaixo:

Teorema: Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração: Seja o ΔABC , α, β, γ ângulos internos do triângulo e δ ângulo adjacente suplementar a β .



Ângulo Externo de um triângulo.

Pela definição, δ é um ângulo externo ao ΔABC , então, temos que:

$$\beta + \delta = 180^\circ$$

⁶ Um polígono é convexo quando todos os pontos de um segmento de reta que possui extremidades no interior do polígono também estão dentro do polígono.

E pela soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, temos que:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Igualando as duas igualdades, temos que:

$$\beta + \delta = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\delta = \alpha + \gamma$$

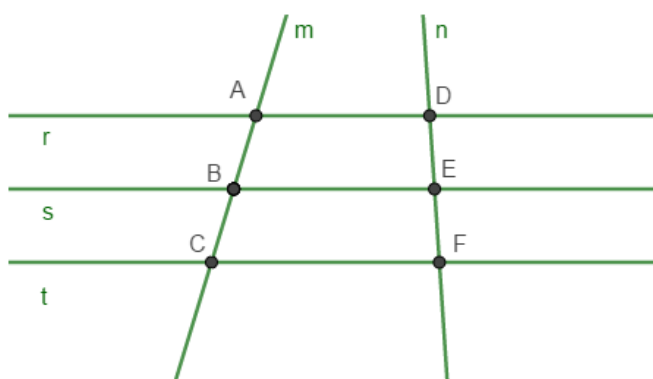
Portanto, a medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

■ Q.E.D

TEOREMA DE TALES

Ao observar duas transversais a um feixe de paralelas, Tales notou que era possível comparar a razão entre dois segmentos de uma transversal com a razão entre os segmentos correspondentes a estes dois. Ele notou que essa razão permanece constante para qualquer razão entre dois segmentos de uma transversal no feixe de paralelas e enunciou o teorema da seguinte forma:

Teorema de Tales: Dadas duas transversais em um feixe de retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os dois segmentos correspondentes da outra transversal.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Pelas propriedades das proporções, valem também as igualdades:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$$

Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo:

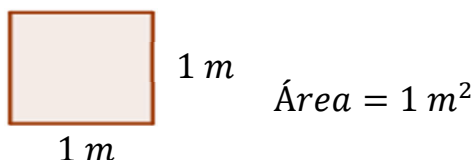
Em um polígono convexo de n lados, a soma das medidas dos ângulos internos (S_i) vale:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

ÁREAS

Definição: Chamamos de área de um polígono, toda superfície delimitada pelo perímetro⁷.

Para medir a área de um polígono foi estabelecido uma unidade de medida padrão, o *metro quadrado*. Esta medida tem como base, um quadrado, com lados de **1 metro**, chamado de *quadrado unitário*.

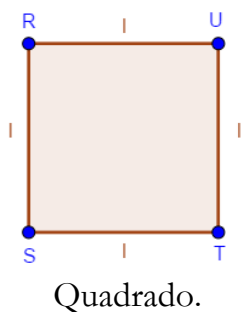


Para descobrir a área de um polígono, basta colocar este *quadrado unitário* dentro do polígono e verificar quantos *quadrados unitários* cabem na região interna do polígono. Este modelo é muito eficiente, porém, não serve para todos os polígonos. O que faremos com os polígonos que não possuem ângulos de 90° ?

Por isso, elaboraram-se fórmulas matemáticas para encontrar a área dos polígonos.

Revisaremos as fórmulas de áreas dos principais polígonos:

QUADRADO



$$\text{Área} = l \cdot l = l^2$$

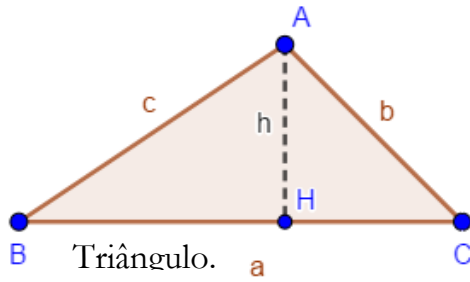
RETÂNGULO



$$\text{Área} = a \cdot b = ab$$

⁷ Perímetro são os segmentos de reta que delimitam um polígono.

TRIÂNGULO

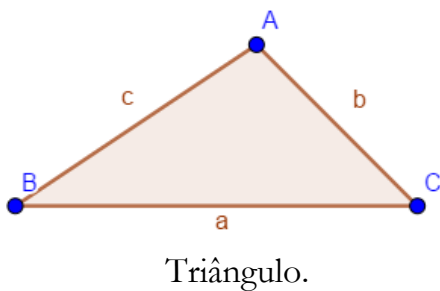


é: A principal fórmula da superfície triangular

$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$$

Mas temos outras formas de representar a área triangular:

FÓRMULA DE HERON

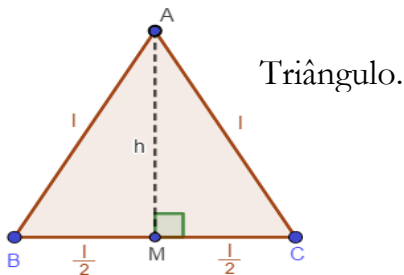


$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

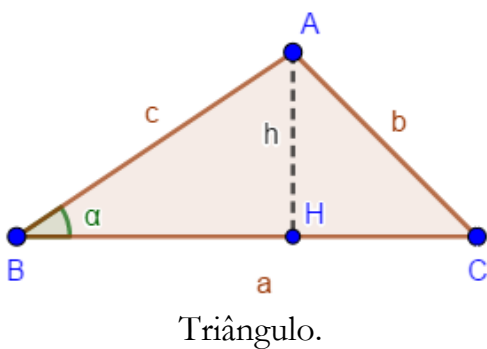
Onde: p é o semiperímetro.

TRIÂNGULO EQUILÁTERO



$$\text{Área} = \frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

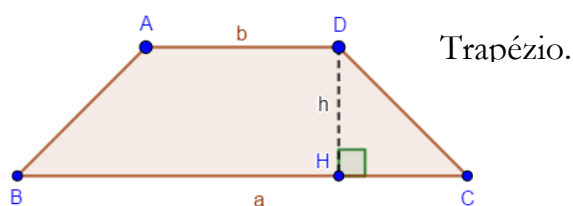
TRIGONOMETRIA



$$\text{Altura} = b \cdot \sin \alpha$$

$$\text{Área} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{ab \cdot \sin \alpha}{2}$$

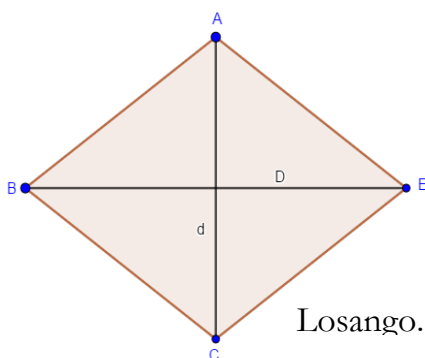
TRAPÉZIO



Trapézio.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{(\text{Base Maior} + \text{base menor}) \cdot h}{2} \\ &= \frac{(a + b) \cdot h}{2} \end{aligned}$$

LOSANGO



Losango.

$$\text{Área} = \frac{\text{Diagonal Maior} \cdot \text{Diagonal menor}}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

POLÍGONO REGULAR

Um polígono regular possui **todos os seus lados e ângulos congruentes**.

Definição: a **área do polígono regular** é dada pela multiplicação do semiperímetro pelo apótema.

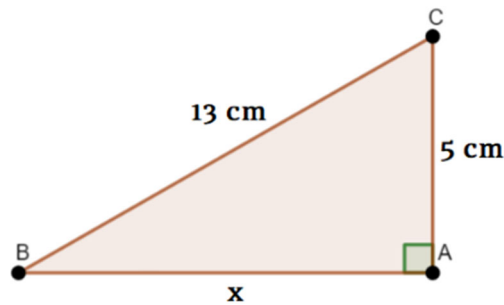
$$\text{Área}_{\text{polígono regular}} = \text{semiperímetro} \cdot \text{apótema}$$

ATIVIDADES

1. Um quadrado e um retângulo têm áreas iguais. Os lados do retângulo são expressos por dois números naturais consecutivos, enquanto o quadrado tem $2\sqrt{5}$ cm de lado. Qual é o perímetro do retângulo?
2. Um número natural x é 20 unidades menores que o seu quadrado. Se este número representa a medida do lado de um quadrado, calcule a área deste quadrado.
3. Quantos pisos retangulares de 20 cm por 35 cm são necessários para cobrir uma sala, também retangular, de 5,6 m por 8 m?
4. A área de um retângulo é 35 cm^2 . As medidas dos lados deste retângulo são expressas por x e $x - 2$. Qual é o perímetro deste retângulo?

5. As raízes da equação $x^2 - 15x + 26 = 0$ são as medidas, em centímetros, dos lados de um retângulo. Determine a área deste retângulo.

6. No triângulo retângulo da figura, determine a medida x do cateto $\overline{AB}$ e calcule, a seguir, a área do triângulo.

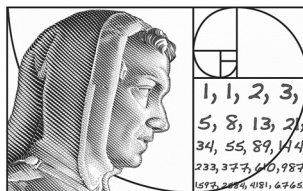


7. Você quer fazer uma pipa em forma de losango, de tal forma que as varetas meçam 75 cm e 50 cm . Nessas condições, quantos centímetros quadrados de papel de seda você irá usar para fazer esta pipa?

8. Em um losango, cada lado mede 30 cm . Se a diagonal maior deste losango mede 48 cm , determine a área deste losango.

9. Sabendo que as medidas das diagonais de um losango correspondem às raízes da equação $x^2 - 13x + 40 = 0$, determine a área deste losango.

10. Um terreno tem a forma de um trapézio de bases 35 m e 24 m , com altura 22 m . Neste terreno, foi construída uma piscina retangular de $10,5\text{ m}$ por 6 m . No restante do terreno, colocou-se grama. Qual a área da parte do terreno que foi gramada?

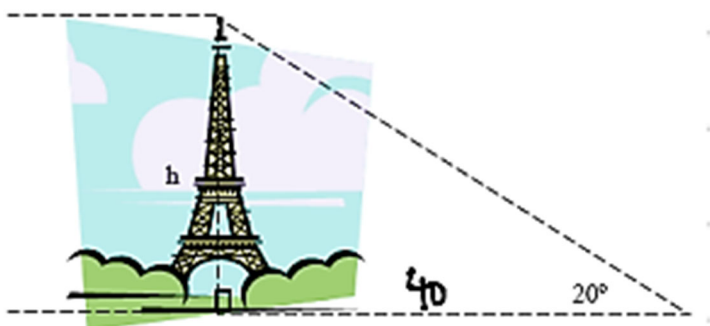


AULA 106

AVALIAÇÃO

1. Construa o ponto médio de um segmento de uma reta qualquer.
2. Como um triângulo pode ser classificado em relação aos seus lados? Diga o nome e a diferença entre eles com suas palavras e faça um desenho para cada tipo de triângulo.
3. As raízes da equação $x^2 - 15x + 26 = 0$ são as medidas, em centímetros, dos lados de um retângulo. Determine a área deste retângulo.
4. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 14 cm e um dos catetos mede $5\sqrt{3}\text{ cm}$. Determine a medida do outro cateto.
5. A uma distância de 40 m , uma torre é vista sob um ângulo de 20° , como mostra a figura. Determine a altura h da torre.

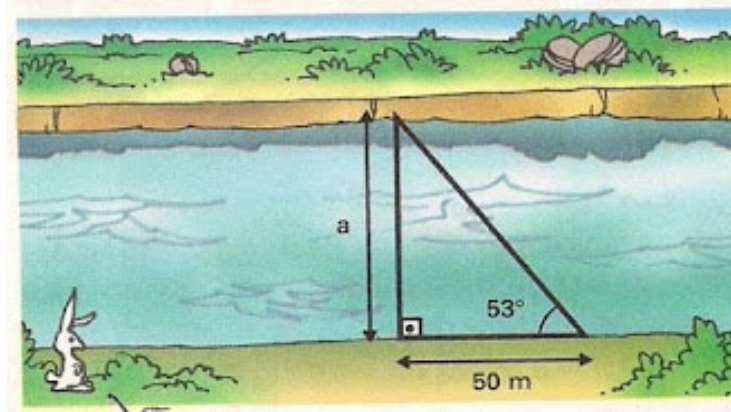
(Use: $\text{sen } 20^\circ = 0,34$, $\text{cos } 20^\circ = 0,94$ e $\text{tg } 20^\circ = 0,36$.)



- a) $14,4\text{ m}$
 - b) $17,1\text{ m}$
 - c) $44,1\text{ m}$
 - d) $52,3\text{ m}$
 - e) $63,8\text{ m}$
6. Sabe-se que num triângulo isósceles, cada lado congruente mede 40 cm . Se cada ângulo da base deste triângulo mede 62° , determine:
 - a) a medida x da base;
 - b) a medida h da altura.

(Use: $\text{sen } 62^\circ = 0,88$; $\text{cos } 62^\circ = 0,47$; $\text{tg } 62^\circ = 1,88$.)

7. Qual é a largura do rio representado pela figura abaixo?



(Use: $\text{sen } 53^\circ = 0,80$; $\text{cos } 53^\circ = 0,60$; $\text{tg } 53^\circ = 1,32$.)

- a) 30 m
- b) 40 m
- c) 56 m
- d) 66 m

8. Enuncie e demonstre a relação Fundamental da Trigonometria.

9. Simplifique a expressão $\text{sen } x \cdot \text{cos}^2 x - \text{sen } x$.

10. No triângulo retângulo a seguir, determine o valor do ângulo θ , em graus, e seu seno, cosseno e tangente.

(Use: $\text{sen } 28^\circ = 0,47$ e $\text{cos } 28^\circ = 0,88$.)

