
ENSINO MÉDIO

– 2º ANO –

FÍSICA

VOLUME ÚNICO

Apostila do 2º ano do Ensino Médio, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



FÍSICA



AULA 01

ESTUDO DO EQUILÍBRIO FÍSICO



xiste, na natureza, uma tendência muito interessante e sob a qual podemos, além de nos maravilharmos, tirar algumas boas lições morais e espirituais: o movimento entre o equilíbrio e o desequilíbrio. Em nosso cotidiano, é muito comum ouvirmos que é necessário ter equilíbrio em tudo. Na área esportiva, comentaristas falam que é preciso equilíbrio entre o ataque e a defesa nos times de futebol, senão a equipe pode ficar vulnerável durante as partidas que disputa. Os economistas, por sua vez, afirmam que o equilíbrio entre receitas e despesas no orçamento do governo é fundamental para a estabilidade econômica. Já os políticos pregam o equilíbrio de forças militares entre países vizinhos para que não ocorram guerras.

No campo moral existem as mesmas recomendações, já que a virtude é justamente o equilíbrio entre dois extremos. Uma pessoa equilibrada é aquela que não age por impulsos e paixões desordenadas, mas consegue, utilizando a razão, ponderar todas as coisas. E como é bom para nosso crescimento espiritual alcançarmos o equilíbrio entre a vida ativa e a vida contemplativa e sabermos viver como diz o sábio no Eclesiastes: “Todas as coisas têm o seu tempo, todas elas passam debaixo do céu segundo o termo que a cada uma foi prescrito.” (Ecl 3, 1)

Contudo, tanto na natureza física, quanto em nossa alma, o equilíbrio é difícil de ser alcançado, mas fácil de ser rompido. Diremos ainda que é necessário, para o movimento de todos os entes uma constante passagem do estado de equilíbrio para o desequilíbrio e vice e versa. O movimento não pode parar, pois nada estará absolutamente parado.

Nesta área da física chamada estática estudaremos as condições de equilíbrio em pontos materiais para depois aplicar estes conceitos nas condições de equilíbrio em corpos extensos, afinal, são estes princípios que mantêm nossas casas, prédios, pontes e tantas outras construções “em pé” diante de tantas influências que tendem ao desequilíbrio. Imaginem a quantas intempéries e forças das mais variadas uma ponte tem que resistir para cumprir sua finalidade.



Esta é a maior ponte do mundo, ponte de Danyang–Kunshan, localizada na China, tem um comprimento de 164 km.

Evidentemente a Física se ocupará das condições de equilíbrio relacionadas ao movimento local dos pontos materiais ou dos corpos extensos. Não iremos aqui estudar quais forças externas solapam constantemente nosso equilíbrio emocional, psíquico e espiritual, mas, para uma possível meditação, a analogia já esta feita.

Sendo assim, definimos:

Estática é a área da Física que estuda **sistemas** sob a ação de forças **que se equilibram**.

Assim como as construções não são algo recente na humanidade, este estudo das condições de equilíbrio também não o são. Haveria muitos exemplos a serem citados, mas pensemos apenas na construção da Torre de Babel.



Recorte da pintura da Torre de Babel por Pieter Bruegel, o Velho (1563).

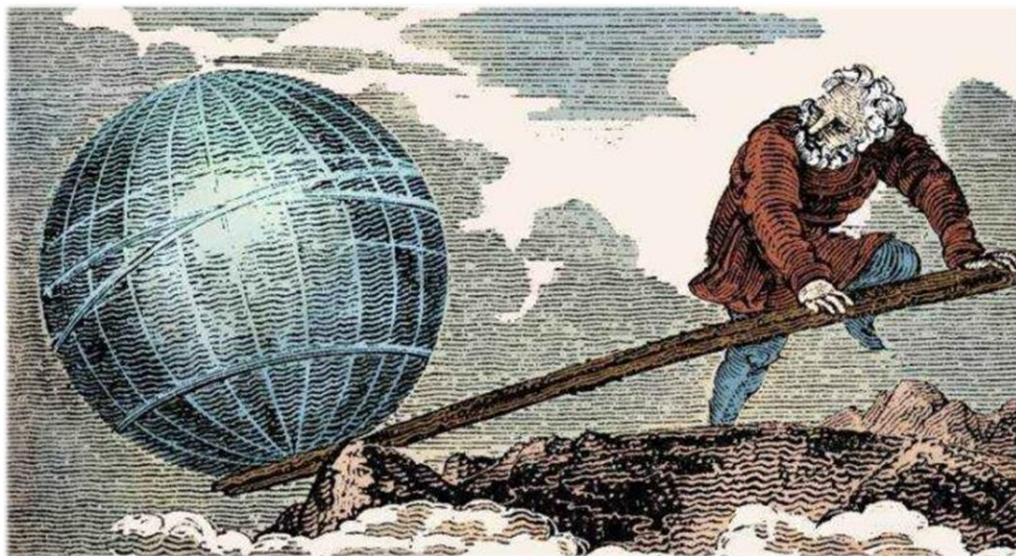
Os soberbos e pretenciosos construtores queriam algo impossível – alcançar o céu. Independentemente da causa de seu fracasso, é possível imaginar como esta torre estaria sendo construída. Mas como, sem as novas tecnologias da engenharia civil era possível construir uma torre tão alta? Muito provavelmente, estes homens já tinham um bom conhecimento dos princípios físicos que regem o equilíbrio estático.

A história antiga está repleta de grandes construções, mas um filósofo, matemático e inventor grego chamado Arquimedes (287–212 a.C.) contribuiu muito para o desenvolvimento desta Ciência.

Após estudar em Alexandria, voltou à sua cidade natal, a colônia grega de Sicarusa, e começou a desenvolver seus próprios estudos. Determinou o valor de pi, encontrou relações

matemáticas para a esfera e o cilindro, descobriu o princípio das alavancas, desenvolveu as roldanas compostas e criou o parafuso de Arquimedes, aparelho utilizado para elevar água entre pontos de diferentes alturas. O cientista ficou famoso por suas invenções e pelo uso das alavancas, e certa vez disse Arquimedes:

“Deem-me um ponto de apoio e moverei a Terra!”



Muitos princípios que estudaremos em estática e hidrostática (as condições de equilíbrio em fluidos) foram descobertos por Arquimedes, mas trataremos destes no tempo oportuno.

PONTO MATERIAL E CORPO EXTENSO

Muitas vezes para efeito de aplicação de conceitos e facilitação de cálculos, a Física tende a simplificar a realidade. Iniciaremos nosso estudo em estática através das condições de equilíbrio de um ponto material. Mas o que é um ponto material?

É considerado um **ponto material** um corpo com dimensões desprezíveis, se comparadas às outras dimensões envolvidas no movimento em estudo. Um ponto material não sofre rotação. Faremos análises de equilíbrio translacional, nas quais descartaremos a possibilidade de movimentos rotacionais desses pontos materiais.

Ponto material: corpo cujas dimensões podem ser desprezadas em relação às outras grandezas envolvidas

Já o corpo extenso é aquele cujas dimensões são importantes nas análises de forças e de equilíbrio. Nesse tipo de corpo, dependendo do ponto de aplicação da força, pode ocorrer rotação. Quando os movimentos rotacionais forem importantes para as análises, estudaremos uma grandeza física que mede a capacidade que as forças têm de rotacionar corpos: o torque ou o momento de uma força.

Corpo extenso: corpo cujas dimensões não podem ser desprezadas em relação às outras grandezas envolvidas.

Os corpos extensos serão considerados corpos rígidos, ou seja, corpos que podem girar em todas as partes ligadas rigidamente sem sofrer deformação, mesmo sob a ação de forças

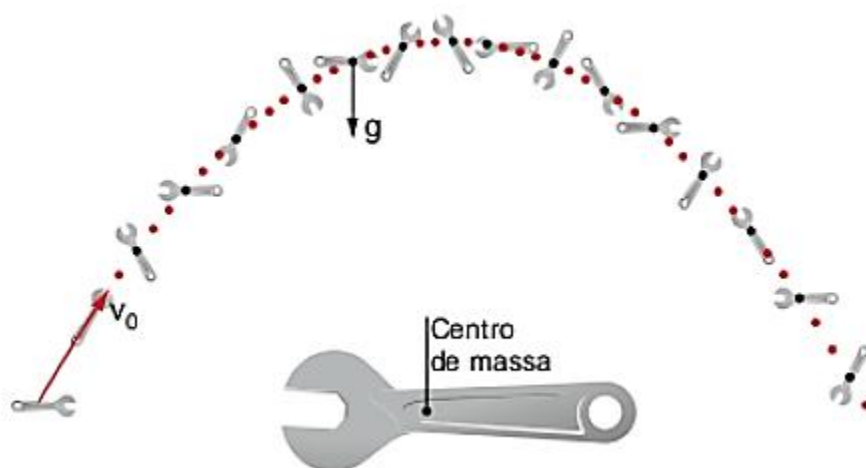
externas. Embora o conceito de corpo rígido seja uma idealização, pois todos os corpos reais são de alguma forma elásticos e se deformam, para este estudo essa será uma consideração razoável.

CENTRO DE MASSA (CM)

O **centro de massa (CM)** é definido como o ponto onde é concentrado toda a massa de um corpo ou de um sistema composto de um conjunto de corpos. Para muitas análises consideraremos que as forças externas são aplicadas no centro de massa.

No lançamento de um objeto irregular, como por exemplo uma chave-inglesa, o movimento de pontos distintos nas duas extremidades da chave não tem uma trajetória bem definida.

Porém, o movimento do centro de massa segue uma trajetória parabólica – o que é esperado em um lançamento oblíquo como no da figura a seguir.

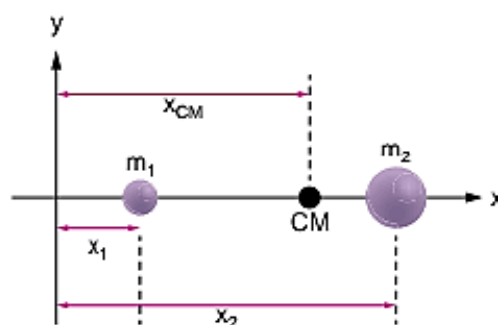


O movimento desse corpo rígido é uma combinação do movimento de translação do seu centro de massa e do de rotação do corpo em torno de um eixo que passa por esse centro de massa.

Já em um sistema de dois corpos, o centro de massa está localizado em um ponto sobre a linha que os une, ficando mais próximo do corpo de massa maior.

Para o cálculo da posição do centro de massa, utiliza-se uma média ponderada entre as massas e a posição do CM:

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$$

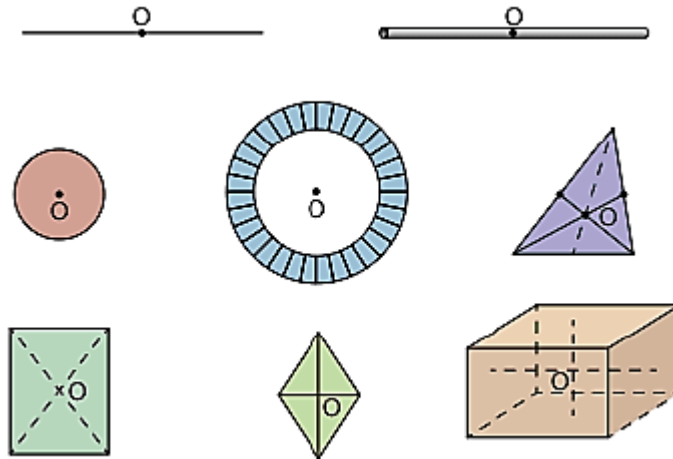


No caso de um conjunto de partículas, o cálculo da posição do CM em relação ao eixo x é dado por:

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Para corpos maciços irregulares, a determinação do CM é um pouco mais complicada, porém, para alguns corpos simétricos e uniformes, o centro de massa coincide com o centro geométrico que está sobre o ponto, a linha ou o plano de simetria.

O centro de massa de um corpo pode estar localizado em uma região externa a ele. Por exemplo, o centro de massa de uma ferradura não se localiza sobre ela, assim como o centro de massa de uma rosquinha se encontra em seu centro onde não há rosquinha.



Centro geométrico (O) de diferentes corpos.

CENTRO DE GRAVIDADE (CG)

O centro de gravidade (CG) de um corpo pode ser definido como o ponto de concentração do seu peso. Assim, um corpo suspenso por esse ponto permanece em equilíbrio em qualquer posição. É nesse ponto que indicamos a origem da força peso em um diagrama de forças.

A localização do centro de gravidade no corpo humano depende de vários fatores, como o sexo, a altura, a distribuição de massa e a posição do corpo. Em geral, para uma pessoa ereta na vertical, o CG se localiza abaixo do umbigo, que é próximo ao centro geométrico. O CG feminino costuma ser mais baixo que o masculino, ficando aproximadamente a 54% da altura da mulher, enquanto no homem fica mais ou menos a 56% de sua altura. A posição horizontal do CG da mulher pode mudar durante a gravidez. Com o crescimento do bebê e da barriga, a curvatura da coluna costuma se acentuar cada vez mais e o centro de gravidade é alterado, podendo passar a ser localizado fora do corpo da mulher.



A mudança de posição ocasiona modificação na posição do centro de gravidade.

TIPOS DE EQUILÍBRIO DE UM CORPO

Existem três maneiras de um corpo estar em equilíbrio estático: equilíbrio estável, equilíbrio instável e equilíbrio indiferente.

Equilíbrio estável: à medida em que o corpo realiza um pequeno deslocamento em relação à sua posição de equilíbrio, quando abandonado, ele retorna à posição inicial.

Equilíbrio instável: ao retirar o corpo da sua posição de equilíbrio, a tendência é que ele se afaste ainda mais dessa posição quando abandonado.

Equilíbrio indiferente: mesmo ao ser deslocado, o corpo permanece em equilíbrio em sua nova posição.

ATIVIDADES

1. O que é a Estática? Dê um exemplo de seu dia a dia que se aplique estes conceitos físicos.
2. Qual a diferença entre ponto material e ponto extenso? Por que em certas situações a Física utiliza uma ou outra maneira de olhar para os corpos?
3. O que é o centro de massa (CM) e o centro de gravidade (CG)?
4. Determine a posição do centro de massa de um sistema de dois corpos de massas $m_1 = 1 \text{ kg}$ e $m_2 = 9 \text{ kg}$, separados por uma distância de 1 m.
5. Pesquise como a técnica de salto em altura chamada “inversão de Fosbury” mudou completamente as modalidades desse esporte.



AULA 05

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO DE UM CORPO EXTENSO

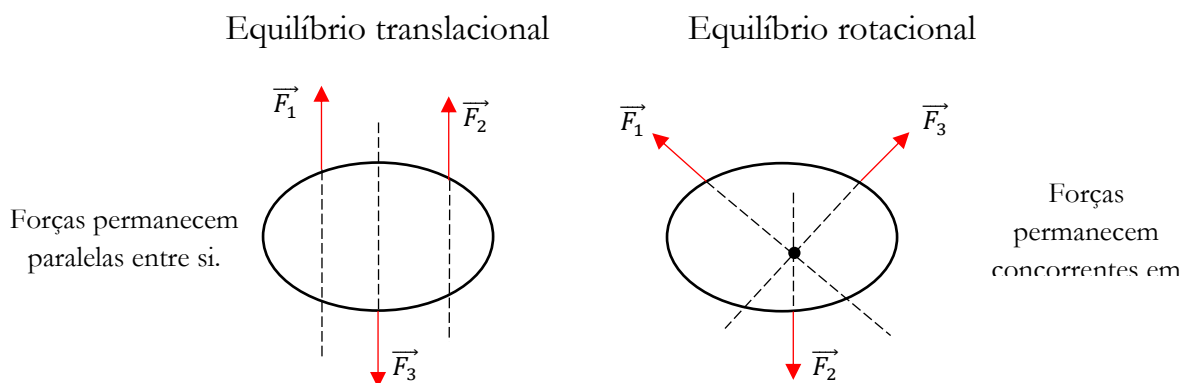


Física tem como um dos seus grandes objetivos estudar o movimento e suas causas. Até agora, foram analisadas as condições para que um corpo não translade ao longo de uma linha reta, mantendo em equilíbrio translacional. Vamos agora analisar as condições para que um corpo em repouso não inicie um movimento rotacional, ou seja, não gire ao redor de um eixo fixo, mantendo-se em **equilíbrio rotacional**.

Para estas análises temos que considerar que os corpos são rígidos e os eixos de rotação fixos, ou seja, são corpos extensos que não mudam de posição. Uma bola de futebol rolando em um gramado, por exemplo, não poderia ser analisada desta forma, uma vez que a bola gira ao redor de um eixo que muda de posição ao longo do tempo. Neste caso, a bola realiza um movimento composto de rotação e translação.

TEOREMA DA TRÊS FORÇAS

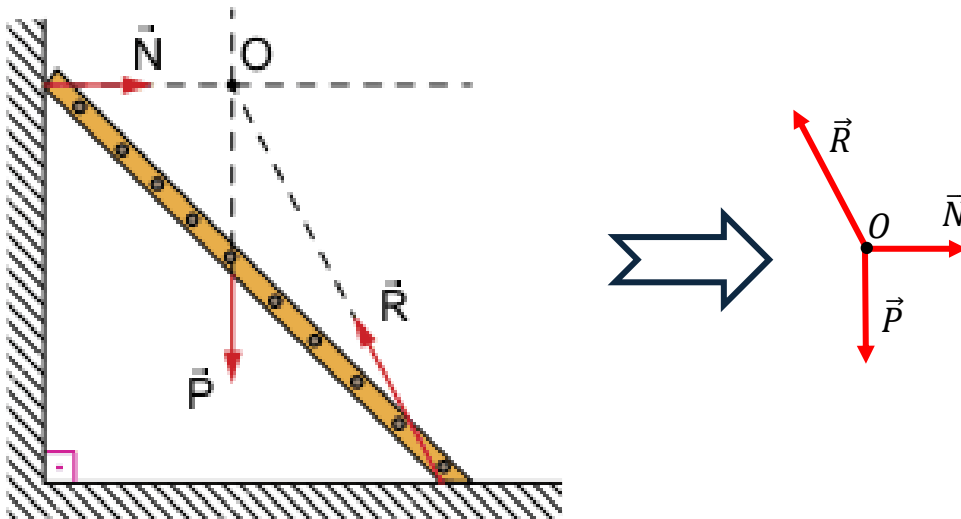
Sempre que um corpo estiver em equilíbrio translacional e rotacional, ou seja, em equilíbrio estático, sob a ação exclusiva de três forças, estas devem ser paralelas ou concorrentes em um ponto.



Para entendermos melhor a utilidade deste teorema, vamos analisar o caso de uma escada apoiada na parede.

Quando uma escada homogênea se encontra em equilíbrio apoiada em uma parede lisa, três forças atuam sobre ela.

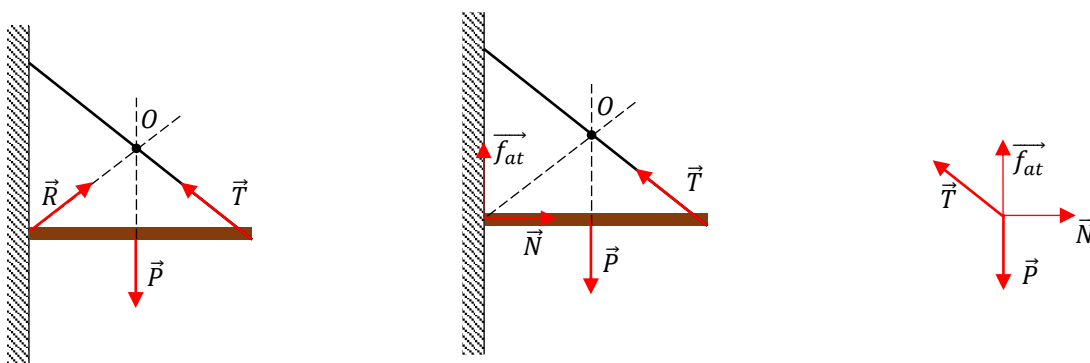
A primeira é a força P , que age no centro de massa (CM) e é direcionada para baixo. A segunda é a força de contato normal N , que age perpendicularmente à parede. Estas duas forças concorrem no ponto O , como mostra a figura a seguir. Portanto, a terceira força deve ser de contato R , cuja linha de ação passa pelo ponto O , para que, assim, as três forças concorram em um ponto.



Ao olharmos para o ponto de convergência O , veremos que o equilíbrio deste corpo extenso, pode ser expresso através do equilíbrio do ponto material.

A partir disto, para determinarmos as condições de equilíbrio estático, basta aplicarmos os conceitos anteriormente aprendidos acerca da somatória das forças nos eixos x e y serem iguais a zero.

Analisemos ainda um outro exemplo: uma prateleira suspensa. Atuam nesta prateleira a força peso $\vec{P}$, vertical e para baixo; a força de tração $\vec{T}$, na direção do fio. Essas duas forças concorrem no ponto O , como mostra a figura a seguir. Portanto, a força de contato $\vec{R}$, entre a parede e a prateleira, deve ter uma linha de ação que passa pelo ponto O . Essa força R tem uma componente tangencial para cima (força de atrito) e uma componente na direção normal (força normal de apoio). Desta forma, aplicando o teorema das três forças, podemos simplificar esta situação a um equilíbrio do ponto material.



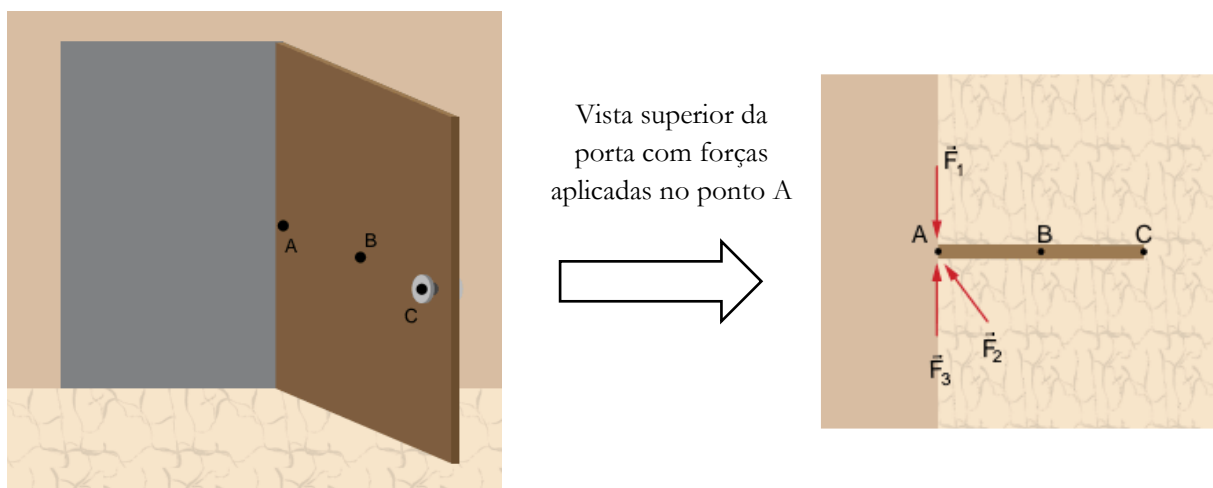
Assim, o teorema das três forças, de simples enunciado e grande aplicação, pode ser demonstrado por meio de um conceito novo, o torque.

TORQUE OU MOMENTO DE UMA FORÇA

Para que um corpo saia de sua posição e acelere linearmente, basta aplicarmos uma força cuja resultante não seja nula. Mas, o mesmo se daria para que um corpo extenso comece um movimento rotacional?

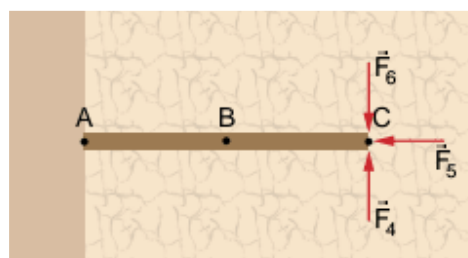
Para que um corpo inicie um movimento de rotação, não basta apenas aplicar uma força qualquer, já que isto não garante que ele começará a girar.

Vamos analisar, por exemplo, uma porta: para fechá-la, é necessário empregar uma força; porém, dependendo do ponto de aplicação, da direção e do sentido, a porta pode fechar, abrir ou, simplesmente, não se movimentar. Abaixo observamos um esquema de uma porta e três pontos de aplicação de forças.



Se a força for aplicada no ponto A, paralela ao plano do chão, para tentar abrir a porta próximo da dobradiça, por exemplo, esta não se abrirá e nem se fechará, independentemente da direção e do sentido da força.

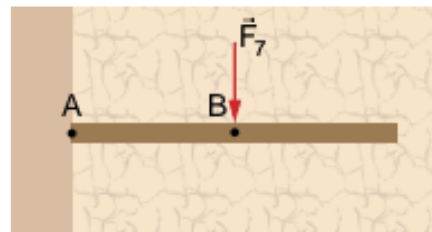
Empregando a força no ponto C, na extremidade da porta, ainda não temos garantia de que ela fechará.



Perceba que a força F_4 faz com que a porta abra ainda mais. Já a força F_5 , cuja linha de ação passa pela dobradiça, não ocasiona rotação alguma. Porém, se executada, a força F_6 poderá fechá-la. Ou seja, para o mesmo ponto de aplicação da força, dependendo da direção e sentido, movimentos diferentes podem acontecer. Duas forças com o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido, como F_1 e F_6 , podem ocasionar diferentes movimentos do corpo: F_1 não produz efeito na porta, enquanto que F_6 faz com que ela feche.

Por sua vez, utilizar uma força F_7 no ponto B torna mais difícil girar a porta do que ao aplicar a força F_6 em C.

Através deste simples exemplo, vemos que a distância em relação ao eixo de rotação também influencia na facilidade para girar o corpo. Isto ocorre devido à diferença entre os braços de alavanca: quanto maior a distância do ponto de apoio, menor a força necessária para realizar a rotação.



Portanto, verificamos que não basta aplicarmos uma força qualquer sobre um corpo para que ele rotacione, é preciso considerar o seu ponto de aplicação, o que influencia diretamente no movimento. Assim, para determinar de forma mais precisa a capacidade que as forças têm de rotacionar corpos, utilizamos a grandeza física chamada torque ou momento de uma força (M), que é uma relação direta entre a força em si e a distância até o ponto de apoio. No SI, a unidade de medida do torque é o *newton.metro* (N.m).

Torque, ou momento de uma força, é a ação de girar um corpo em torno de seu eixo de rotação por meio da aplicação de uma força.

Sendo assim, o momento de uma força é matematicamente definido por:

$$M = F \cdot b$$

Onde,

M é o torque da força, em N.m;

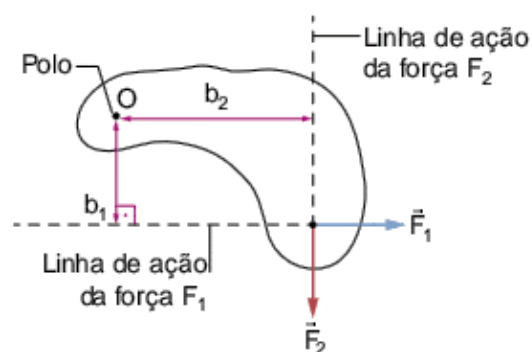
F é a intensidade da força aplicada no corpo, em N;

b é o braço da alavanca, em m.

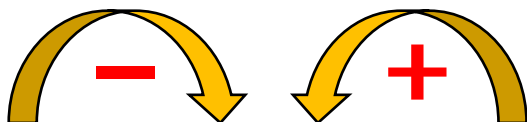
O braço da alavanca b é definido como a distância entre a linha de ação da força (uma reta que contém a força) e um ponto qualquer, denominado polo.

Para definir o braço da alavanca é necessário que o polo seja escolhido. Assim, ao mudar o polo, o braço da alavanca também é alterado.

Como o corpo, em um determinado plano, pode ter a tendência de rotacionar no sentido horário ou anti-horário, é necessário definir uma convenção de sinais para diferenciar os dois sentidos de rotação possíveis. Desse modo, caso



Corpo passível de rotação no qual estão aplicadas forças que têm braços de alavanca b_1 (braço de alavanca da força F_1) e b_2 (braço de alavanca da força F_2).



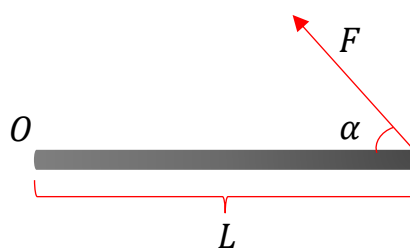
Quando a rotação ocorre no sentido horário, o torque é negativo, quando ocorre no sentido anti-horário, o torque é positivo.

o torque produza uma tendência de rotação no sentido horário, será negativo; já no sentido anti-horário, o torque será positivo.



Será que é eficiente posicionar a maçaneta no meio da porta? Deixemos essa peculiaridade para as casas dos Hobbits no Condado de Tolkien.

Exemplo 1: Determine o torque resultante na barra de comprimento $L=1\text{ m}$ devido à força $F=100\text{ N}$. Adote o ponto O como polo. Dado: $\text{sen } \alpha = 0,6$

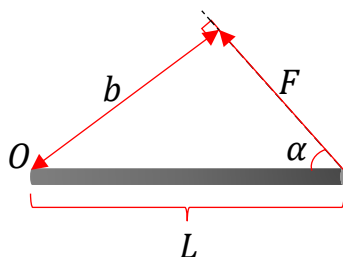


Resolução:

Existem dois métodos equivalentes para determinar o torque da força $\vec{F}$.

1º método: neste primeiro, determinamos diretamente o braço da alavanca (b) da força F :

Assim, temos um triângulo retângulo de hipotenusa L .



$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{L}$$

$$b = L \cdot \text{sen } \alpha$$

$$b = 1 \cdot 0,6 \Rightarrow b = 0,6\text{ m}$$

[Portanto, o torque da força F é dado por:

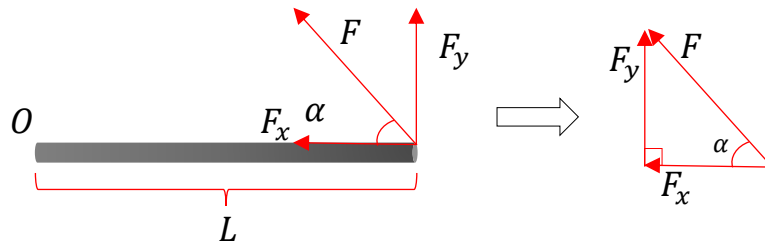
$$M = F \cdot b$$

$$M = 100.0,6 = 60 \text{ N.m}$$

Como a força F faz com que a barra gire no sentido anti-horário, o torque é positivo, ou seja,

$$M = +60 \text{ N.m}$$

2º método: também pode-se determinar o torque calculando a soma dos momentos das componentes da força em relação ao mesmo ponto.



A componente vertical da força F é determinada através do triângulo retângulo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{F_y}{F}$$

$$F_y = F \cdot \text{sen } \alpha$$

$$F_y = 100.0,6$$

$$F_y = 60 \text{ N}$$

A força F_x tem uma linha de ação que passa pelo ponto de apoio O ao longo do comprimento da barra. Assim, ela não causa nenhum torque. O braço de alavanca da força F_y é o próprio comprimento da barra L . Portanto, o torque é dado por:

$$M = M_x + M_y$$

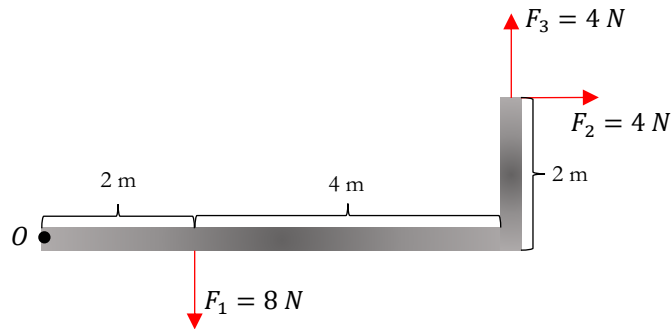
$$M = F_x \cdot 0 + F_y \cdot L$$

$$M = 0 + 60.1$$

$$M = +60 \text{ N.m}$$

Exemplo 2: Determine o torque resultante na placa em formato de L da figura a seguir.

Resolução:



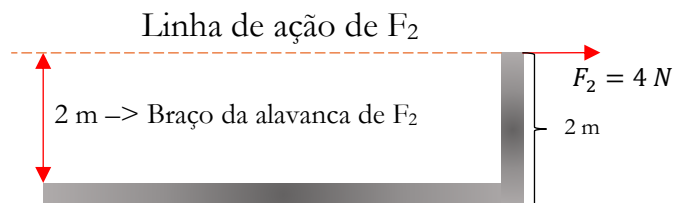
A força F_1 possui um braço de alavanca de 2 m . Como a força tende a produzir uma rotação no sentido horário, temos:

$$M_1 = F_1 \cdot b_1$$

$$M_1 = -8 \cdot 2$$

$$M_1 = -16 \text{ N} \cdot \text{m}$$

No caso da força F_2 , temos a seguinte situação:



Portanto, o seu torque é negativo, já que a força tende a girar a placa no sentido horário. Assim:

$$M_2 = F_2 \cdot b_2$$

$$M_2 = -4 \cdot 2$$

$$M_2 = -8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A força F_3 tem um braço de alavanca de 6 m e seu torque é positivo, já que a força tende a girar a placa no sentido anti-horário. Logo:

$$M_3 = F_3 \cdot b_3$$

$$M_3 = +4 \cdot 6$$

$$M_3 = +24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Veja que a força F_2 tem o mesmo módulo da força F_1 , porém, como seu braço de alavanca é maior, o torque também é maior.

Para sabermos qual o torque resultante basta somarmos todos os torques: M_1 , M_2 e M_3 :

$$M_{\text{Resultante}} = M_1 + M_2 + M_3$$

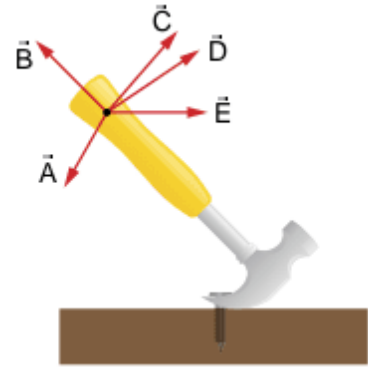
$$M_{\text{Resultante}} = -16 + (-8) + (+24) = 0$$

Portanto, para este caso de aplicações de forças, o torque resultante é nulo, ou seja, as forças como estão aplicadas, não fazem o corpo rotacionar.

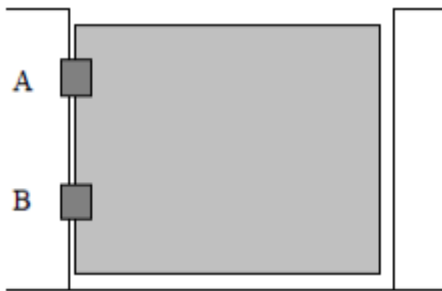
ATIVIDADES

1. O que significa dizer que o equilíbrio do ponto extenso é um equilíbrio rotacional? Quais são as condições para este tipo de equilíbrio?

2. Pretendendo-se arrancar um prego com um martelo, conforme mostra a figura, qual das forças indicadas (todas elas têm o mesmo módulo) será mais eficiente, na posição considerada?



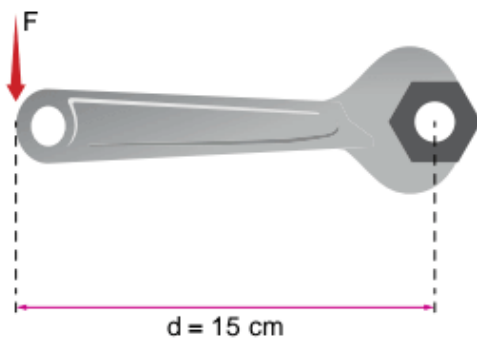
3. Um portão está fixo em um muro por duas dobradiças A e B, conforme mostra a figura, sendo P o peso do portão. Caso



um garoto se pendure no portão pela extremidade livre, e supondo que as reações máximas suportadas pelas dobradiças sejam iguais, (A) é mais provável que a dobradiça A arrebente primeiro que a B. (B) é mais provável que a dobradiça B arrebente primeiro que a A. (C) seguramente as dobradiças A e B arrebentarão simultaneamente. (D) nenhuma delas sofrerá qualquer esforço. (E) o portão quebraria ao meio, ou nada sofreria.

4. Uma força de 60 N de intensidade age sobre um corpo, tendendo a girá-lo em torno de um ponto situado a 0,4 m de sua linha de ação, no sentido anti-horário. Determine o momento dessa força.

5. A figura apresenta a força aplicada na vertical, sobre uma chave de boca, por um motorista de caminhão tentando desatarraxar uma das porcas que fixa uma roda. O ponto de aplicação



da força dista 15 cm do centro da porca, e o módulo da força máxima aplicada é $F = 400 \text{ N}$. Nesta situação, suponha que o motorista está próximo de conseguir desatarraxar a porca. Em seguida, o motorista acopla uma extensão à chave de boca, de forma que o novo ponto de aplicação da força dista 75 cm do centro da porca. Calcule o novo valor do módulo da força, F' , em newtons, necessário para que o motorista novamente esteja próximo de desatarraxar

a porca.

6. Um pêndulo é formado por uma bola de 4,0 kg e um fio ideal de 0,2 m de comprimento. No ponto mais alto de sua trajetória, o cabo que sustenta o pêndulo forma um ângulo de 30° com a vertical. Indique o módulo do torque realizado pelo peso da bola.



AULA 10

PRESSÃO



O conceito de pressão, assim como todas as verdades do mundo natural são aplicados e utilizados por qualquer área de estudo que necessite. Provavelmente já se estudou algo sobre a pressão na química ou na biologia. Contudo, é preciso entender profundamente esta grandeza física.

Provavelmente já ouvimos algo como “pressione o botão”, ou “é preciso pressionar uma ferida, para que o sangue estanque”. O verbo pressionar significa fazer pressão sobre algo e estes dois exemplos relacionam pressão com a força aplicada sobre algo. De fato, podemos definir pressão como: “a razão entre a força e a área”.

A pressão média (p_m) em alguma superfície é uma relação entre a intensidade da força resultante $\vec{F}_R = F$ e a área A da superfície:

$$p_m = \frac{F}{A}$$

A unidade de pressão é newton por metro quadrado, pois a força é dada em newton (N) e a área em m^2 . Essa é a unidade de pressão no Sistema Internacional e N/m^2 também é denominado pascal (Pa). Existem outras unidades de pressão como o dina por centímetro quadrado (dyn/cm^2) e o *bar* (*bar*).

$$1 \text{ Pa} = 10 \text{ dyn/cm}^2$$

$$105 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

Através da relação matemática acima ($p = F/A$), podemos perceber que para uma mesma força F , quanto menor for a área A , maior será a pressão p .

A dependência entre a pressão e a área é verificada em várias situações do nosso dia a dia. Às vezes, desejamos exercer uma pressão pequena e, para conseguir isso, usamos uma área grande.

Um exemplo desse caso ocorre quando nos sentamos em uma cadeira anatômica. O grande conforto que sentimos decorre do fato de exercermos uma pequena pressão sobre o assento, uma vez que a força de compressão do nosso corpo sobre a cadeira é distribuída sobre uma área muito maior do que a área do assento das cadeiras comuns.

Outras vezes, queremos exercer uma pressão grande e, para isso, usamos uma área pequena. Esse é o caso, por exemplo, de um bisturi cirúrgico. A área de apoio do instrumento é tão pequena que uma mínima força exercida sobre o bisturi produz uma pressão grande o suficiente para cortar a pele do paciente. Preste atenção em outros objetos e fatos do seu dia a dia. Certamente você perceberá muitas situações em que a pressão desejada (grande ou pequena) é obtida por meio da utilização de uma área adequada para a superfície de apoio da força.



Quanto mais afiado o instrumento de corte menor a área de contato e menor a força necessária para cortar algo.

Vejamos também um exemplo numérico.

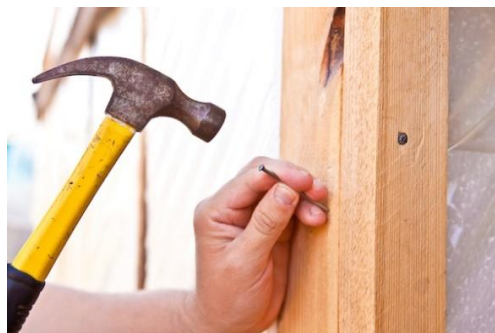
Imagine que se aplica uma força de 10 N sobre duas áreas, uma de 5 m² e outra de 1 m²:

$$\text{Primeira área } A_1: p_m = \frac{F}{A} = \frac{10}{5} = 2 \text{ N/m}^2$$

$$\text{Segunda área } A_2: p_m = \frac{F}{A} = \frac{10}{1} = 10 \text{ N/m}^2$$

Neste pequeno exemplo, A_2 é cinco vezes menor que A_1 , conseqüentemente, a pressão que é exercida sobre a segunda área é cinco vezes maior que a exercida sobre a primeira. Disto é fácil constatar que pressão e área são inversamente proporcionais: se a área aumenta, a pressão diminui e se a área diminui, a pressão aumenta.

Podemos verificar isto facilmente quando vamos pregar um prego em algum lugar. O modo correto é bater na cabeça do prego (a parte com maior área) para que a parte mais fina (a parte de menor área) penetre na superfície. Se tentarmos fazer o contrário, provavelmente, o prego entortará e não conseguiremos fazê-lo penetrar na superfície.



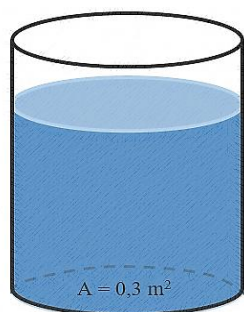
Neste exemplo do prego podemos dizer que a pressão foi aplicada praticamente em um único ponto – a ponta do prego. A pressão num ponto específico da superfície é diferente da pressão média, que seria uma “média” das pressões de todos os pontos da superfície. Para saber a pressão num ponto específico de alguma superfície, teríamos de aplicar o limite na relação anterior ($p = F/A$), com a área A tendendo a zero.

Limite é um conceito da matemática avançada, mas que vale a pena ser citado agora. O limite com “a área tendendo a zero”, neste caso, significa que queremos saber a pressão num ponto muito pequeno da superfície toda, e este ponto quase não possui “área própria”, portanto, sua área é quase zero, mas não é zero e, por isso, dizemos que sua área tende a zero, pois é muito pequena, próxima do zero. Então, pressão “ p ” num ponto específico é:

$$p = \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{F}{A} \right), \text{ lê-se: “pressão é igual a } F \text{ sobre } A \text{ quando } A \text{ tende a zero.”}$$

Para as situações que estudaremos, vamos considerar uma distribuição uniforme das forças atuantes, de modo que a pressão média coincida com a pressão em qualquer ponto. Em outras palavras, é necessário apenas entender a primeira relação ($p = F/A$), pois consideraremos que é a mesma pressão em todos os pontos.

Imaginemos agora um líquido com 30 N de peso que esteja no interior de um recipiente cujo fundo tem uma área de 0,3 m². Qual é a pressão que o líquido exerce no fundo do recipiente?



$$F = P = 30 \text{ N}$$

$$A = 0,3 \text{ m}^2$$

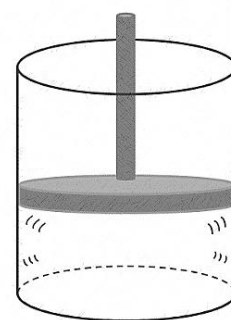


$$p = \frac{F}{A} = \frac{30}{0,3} \rightarrow p = 100 \text{ N/m}^2$$

A única força que consideraremos que o líquido produz é seu próprio peso. Então, a pressão exercida no fundo do recipiente é de 100 N/m².

Podemos perceber que se a pressão em um líquido depende exclusivamente de seu peso, sendo consequência de sua massa, ao longo da altura de um recipiente cheio de líquido a pressão irá variar de acordo com a quantidade de líquido.

Pensemos agora em um gás contido num recipiente. Suas partículas estão em contínuo movimento e se chocam contra as paredes do recipiente. Esses choques fazem com que o gás realize uma força sobre as paredes do recipiente e, consequentemente, exerça uma pressão. Considerando um gás contido num cilindro com um êmbolo, como se vê na figura ao lado.



Se a área do êmbolo for $A = 0,2 \text{ m}^2$ e admitirmos que a força média que o gás exerce no êmbolo é de $F = 60 \text{ N}$, qual é a pressão média exercida pelo gás no êmbolo?

$$\begin{array}{l} F = 60 \text{ N} \\ A = 0,2 \text{ m}^2 \end{array}$$



$$p = \frac{F}{A} = \frac{60}{0,2} = 300 \text{ N/m}^2 \text{ ou } 300 \text{ Pa}$$

Logo, a pressão exercida pelo gás no êmbolo é de 300 Pa.

Existem outras unidades utilizadas para mensurar a pressão, como centímetro de mercúrio (cmHg), milímetro de mercúrio (mmHg) e atmosfera (atm).

Exemplo 1: Uma jovem de 60 kg está em pé sobre o assoalho de uma sala, observando um quadro.

a) Considerando a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 , determine a força F que ela exerce sobre o assoalho.

b) A jovem está usando sapatos de saltos e a área da base de cada salto é igual a $1,0 \text{ cm}^2$. Supondo que um dos saltos suporte $1/3$ do peso da jovem, determine a pressão p , em N/m^2 , que este salto exerce sobre o assoalho.

Resolução: a) Nesta situação de equilíbrio estático, a força que a jovem exerce sobre o assoalho é sua própria força peso P :

$$F = P = mg \Rightarrow F = 60 \cdot 10 \Rightarrow F = 600 \text{ N}$$

b) A área do salto é $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$. Logo, a pressão que um dos saltos exerce sobre o assoalho é dada por:

$$\begin{aligned} p &= \frac{F}{A} = \frac{\frac{1}{3}P}{A} = \frac{\frac{1}{3}600}{10^{-4}} \\ p &= 200 \cdot 10^4 \\ p &= 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

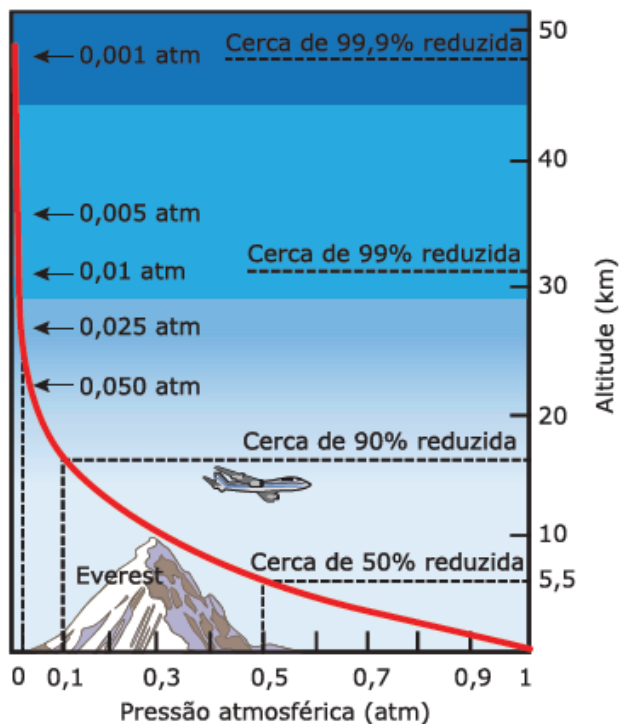
PRESSÃO ATMOSFÉRICA E EXPERIÊNCIA DE TORRICELLI

Como sabemos, o ar atmosférico é constituído por partículas que se movem caoticamente em todas as direções. Por isso, as paredes, o solo, as pessoas e todos os outros corpos imersos na atmosfera ficam sujeitos às forças de impacto dessas partículas. A pressão atmosférica é, portanto, a soma das pressões que as partículas constituintes do ar exercem sobre um objeto que se acha imerso na atmosfera.

O ar atmosférico está mais comprimido ao nível do mar do que em altitudes mais elevadas. Para visualizar este fenômeno, basta pensarmos que as partículas que compõem o ar atmosférico têm massa e por isso, tendem a se concentrar perto da superfície. Logo, quanto mais próximo da superfície, maior a interação e a influência de umas sobre as outras.

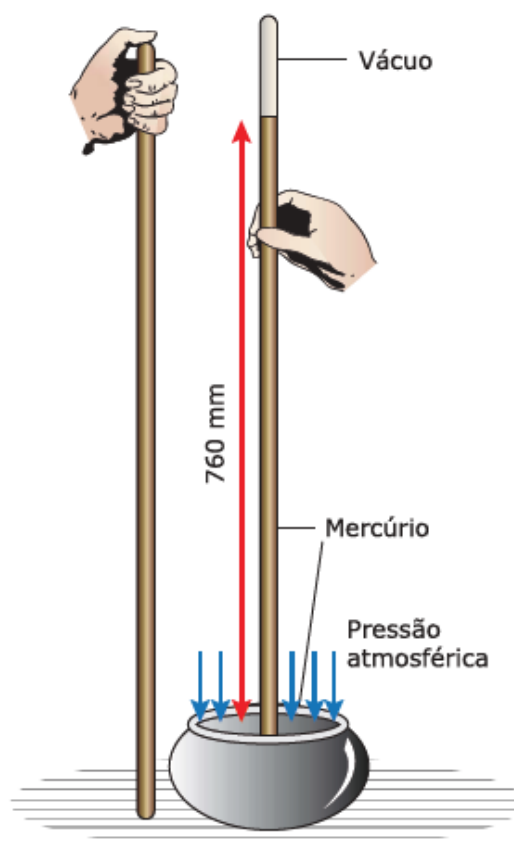
Ao nível do mar a pressão atmosférica vale:

$$P_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$$



Com boa aproximação, para cada aumento de 5,5 km na altitude, a pressão atmosférica é reduzida pela metade. Esse tipo de comportamento caracteriza uma redução exponencial de uma grandeza. A figura ao lado mostra a variação da pressão atmosférica com a altitude. Observe que, para altitudes de 10 km, típica de aviões de grande porte, a pressão atmosférica é, aproximadamente, $0,4 \text{ atm}$, e por isso o interior desses aviões deve ser pressurizado.

Em 1664, o italiano Evangelista Torricelli mediu a pressão atmosférica ao nível do mar por meio de uma experiência extraordinariamente simples. Torricelli encheu um longo tubo de ensaio com mercúrio. Em seguida, com o dedo, ele fechou a boca do tubo, colocou-o de cabeça para baixo e mergulhou-o em uma bacia também com mercúrio. Retirando o dedo, ele observou que a coluna de mercúrio desceu um pouco, estabilizando-se a uma altura de 760 mm, conforme mostra a figura abaixo. Como no espaço vazio criado pela descida do mercúrio no tubo havia vácuo, Torricelli concluiu que a pressão exercida pela coluna de 760 mm de mercúrio foi equilibrada pela pressão atmosférica exercida pelo ar sobre a superfície livre do mercúrio na bacia. Repetindo a experiência acima do nível do mar, Torricelli verificou que a coluna equilibrada era menor do que 760 mm, revelando que a pressão atmosférica é máxima ao nível do mar, e que ela diminui com a altitude. O mais simples dos barômetros, aparelho usado para medir a pressão atmosférica, é baseado nesta montagem de Torricelli.



Experimento de Torricelli para medir a pressão atmosférica.

Estamos todos sujeitos à pressão atmosférica (p_{atm}), que é exercida pelo ar ao nosso redor e varia em função da temperatura e da altitude. Como vimos, no nível do mar, a pressão atmosférica é de, aproximadamente, 10^5 Pa , o que equivale a 1 atm .

Quando andamos na rua, a força total exercida para baixo pela atmosfera em nossa cabeça pode ser calculada por meio do conceito de pressão. Considerando a área média do topo de uma cabeça de $300 \text{ cm}^2 = 0,03 \text{ m}^2$ e a pressão atmosférica 10^5 Pa , temos:

$$p_{atm} = \frac{F}{A_{cabeça}} \Rightarrow F = p_{atm} \cdot A_{cabeça} = 10^5 \cdot 0,03$$

$$F = 3000 \text{ N}$$

Nessas condições a força exercida pela coluna de ar sobre nossas cabeças é equivalente a força exercida por uma massa de 300 kg. No entanto não sentimos a ação direta desta força, pois, tal como os peixes em um aquário não conseguem distinguir a água que os envolve, nós nascemos e crescemos sob a ação desta força. Sendo para nós e para todos os seres vivos algo imperceptível.

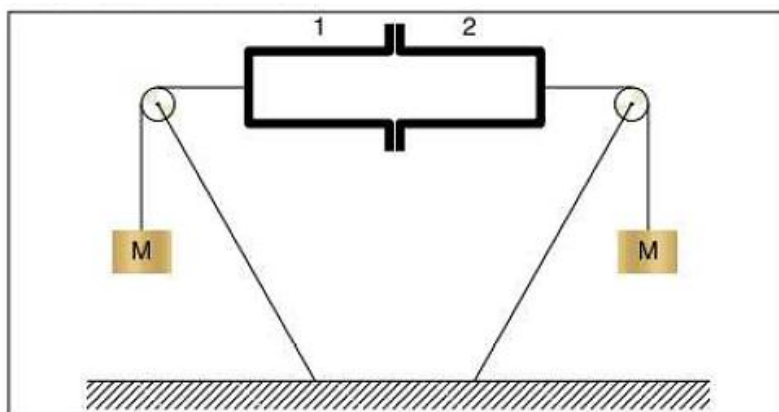
Contudo, a pressão é uma grandeza escalar que atua em todas as direções, então, os objetos que comportam fluidos, sejam gases ou líquidos, não estarão necessariamente equilibrados com a pressão atmosférica. Isto pode ser verificado, por exemplo, em um pneu, que precisa ter sua pressão interna maior que a pressão atmosférica; caso contrário, não será capaz de sustentar o peso do veículo. Portanto, é importante saber a diferença entre a pressão absoluta, ou pressão total (p_{total}) e a pressão atmosférica (p_{atm}), ou seja, a diferença entre a pressão interna e a externa.

O termo pressão manométrica ($p_{manométrica}$) se refere à diferença entre a pressão total (interna) e a pressão atmosférica (externa).

$$p_{manométrica} = p_{total} - p_{atm}$$

Ela é utilizada em algumas situações práticas, como na calibragem de pneus de automóveis, na aferição da pressão arterial e em treinamentos de mergulho com cilindros de ar comprimido.

Exemplo 2: Dois vasos cilíndricos idênticos, 1 e 2, com bases de área A igual a 10 m^2 , são colocados um contra o outro, fazendo-se, então, vácuo no interior deles. Dois corpos de massa M estão presos aos vasos por cabos inextensíveis, de acordo com o esquema a seguir.



Despreze o atrito nas roldanas e as massas dos cabos e das roldanas. Determine o valor mínimo de M capaz de fazer com que os vasos sejam separados. Considere a pressão atmosférica como 10^5 Pa .

Resolução: Os corpos de massa M estão sob ação de uma força de tração de intensidade $F = mg$, que equilibra a força devido à pressão atmosférica sobre os vasos. Assim, como

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p \cdot A$$

Temos,

$$p \cdot A = M \cdot g \Rightarrow M = \frac{pA}{g} = \frac{10^5 \cdot 10}{10}$$
$$M = 10^5 \text{ kg}$$

ATIVIDADES

1. Uma pessoa cujo peso é 720 N está parada sobre o solo, apoiada nos dois pés. Admitindo que a área do solado de cada um de seus sapatos seja de 120 cm^2 , qual a pressão, em N/m^2 , que a pessoa exerce sobre o solo? Dado: $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$.

2. Uma agulha de vitrola antiga apresentava uma área de contato com o disco de 10^{-4} cm^2 . Se a massa da cápsula que sustenta a agulha é de 100 g, qual a pressão, em N/m^2 , que a agulha exerce sobre o disco?

3. Explique, com suas próprias palavras, como Torricelli conseguiu determinar o valor da pressão atmosférica. Por que ele não utilizou como líquido a água que é muito mais disponível do que o mercúrio?

4. Em Magdeburgo, na Alemanha, Otto von Guericke (1602-1686) realizou, em 1654, um famoso experimento para comprovar o poder da pressão atmosférica. Ele uniu duas semiesferas ocas de cobre e, com uma bomba de sucção, retirou a maior parte do ar de dentro da esfera, criando uma região de baixíssima pressão. A diferença entre a pressão atmosférica e a baixa pressão interna impediu os hemisférios de se separarem, mesmo quando puxados por um grupo de cavalos.



Baseado nos conceitos de pressão aprendidos, explique o que aconteceu para as esferas não se separarem. Supondo que a pressão atmosférica local seja de 10^5 Pa , qual seria a força necessária realizada por cada junta de cavalos para separar as semiesferas?



AULA 13

VASOS COMUNICANTES

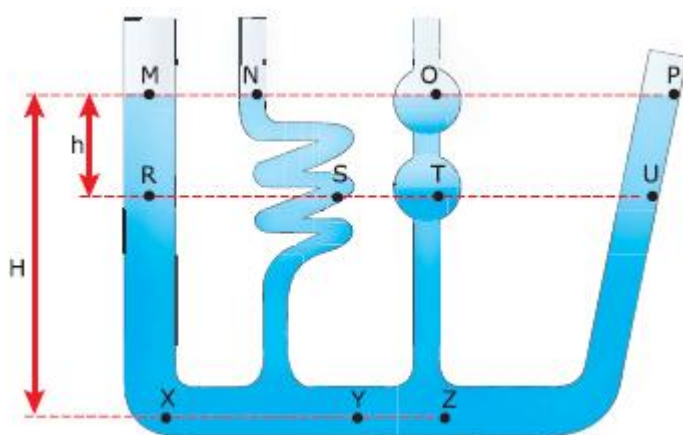


Uma consequência importante do teorema de Stevin é que a pressão independe da forma do recipiente no qual o líquido está armazenado. Todos os pontos situados em um mesmo nível, no interior de um mesmo líquido, em equilíbrio, estão sujeitos a pressões de mesmo valor.

Essa igualdade de pressões é válida mesmo para situações em que o líquido acha-se em recipientes curvos ou com geometrias especiais, como o recipiente mostrado na figura abaixo. Esse recipiente é conhecido pelo nome de vasos comunicantes.

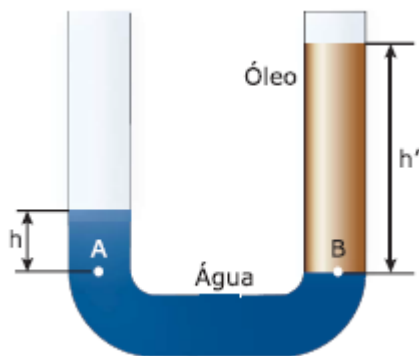
Quando colocamos um líquido em um recipiente desse tipo, e desde que todas as bocas estejam expostas à mesma pressão externa (por exemplo, a pressão atmosférica), observamos que o líquido atinge níveis iguais em todas as bocas dos vasos. Assim, na figura, as pressões nos pontos M, N, O e P são iguais à pressão atmosférica p_0 .

Os pontos R, S, T e U também estão sujeitos a pressões iguais, cujo valor é a soma da pressão atmosférica P_0 com a pressão exercida pela coluna de líquido, de altura h , indicada na figura. As pressões nos pontos X, Y e Z também são iguais, sendo iguais à soma de p_0 com a pressão exercida pela coluna de líquido de altura H .



No interior de um líquido em repouso, as pressões em um mesmo nível são iguais.

Quando dois líquidos não miscíveis e de densidades diferentes são colocados em dois vasos comunicantes, cujas bocas estão expostas a um mesmo ambiente, observamos que os níveis atingidos nos dois ramos são diferentes. Esse é o caso ilustrado a seguir, em que um pouco de água e um pouco de óleo foram colocados em um tubo, na forma de U, aberto para a atmosfera.



O óleo e a água não atingem o mesmo nível dentro do tubo em U.

De acordo com a teoria exposta anteriormente, as pressões p_A e p_B nos pontos A e B são iguais, pois esses pontos acham-se sobre uma mesma linha horizontal e ambos situam-se na água (o ponto B também está em contato com o óleo).

De acordo com a figura, podemos concluir que a densidade (d') do óleo é menor do que a densidade (d) da água, pois, para haver a igualdade entre as pressões p_A e p_B , a coluna de maior altura (h') sobre o ponto B deve ser compensada pela maior densidade da água, cuja coluna (h) sobre o ponto A é menor. Para obter a relação matemática entre h e h' , devemos igualar as pressões p_A e p_B e utilizar a Equação de Stevin.

$$p_A = p_B \Rightarrow p_0 + dgh = p_0 + d'gh'$$

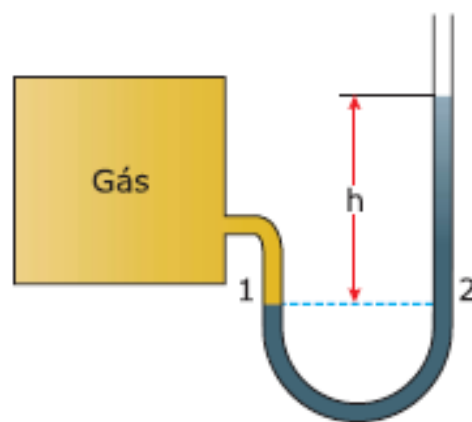
$$dh = d'h'$$

Podemos usar essa relação para determinar a densidade do óleo a partir da densidade da água ($d = 1,0 \text{ g/cm}^3$) e das alturas h e h' . Por exemplo, para $h = 15 \text{ cm}$ e $h' = 18 \text{ cm}$, temos:

$$1,0 \cdot 15 = d' \cdot 18 \Rightarrow d' = 0,83 \text{ g/cm}^3$$

A figura ao lado mostra um manômetro de tubo em U, usado para medir a pressão de um gás encerrado em um recipiente. Dentro do tubo em U, existe mercúrio. No lado esquerdo do tubo, o mercúrio sofre a ação da pressão p_G , exercida pelo gás. No lado direito do tubo, o mercúrio sofre a ação da pressão atmosférica p_0 .

Observe que o gás empurra o mercúrio para baixo, forçando a elevação da coluna de mercúrio no lado oposto. Os valores de pressão em pontos situados em um mesmo nível do mercúrio são iguais. Então, a pressão no ponto 1 (p_G) é igual à pressão no ponto 2, imposta pelos efeitos do peso da coluna de mercúrio sobre o ponto 2 e da pressão atmosférica sobre a superfície livre do líquido. Assim, concluímos que $p_G > p_0$.



Manômetro em forma de U.

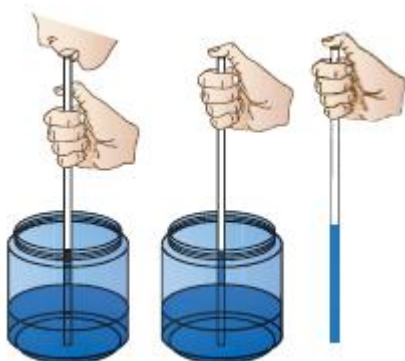
Para calcular esses efeitos, é conveniente usar, como unidade de pressão, o mmHg (milímetros de mercúrio). Digamos que a coluna h seja

igual a 400 mm e que a pressão atmosférica seja igual a 680 mmHg (como p_0 é menor do que 760 mmHg, o ambiente deve estar acima do nível do mar). Então, a pressão do gás é:

$$p_G = (400 + 680) \text{ mmHg}$$

$$p_G = 1080 \text{ mmHg} = 1,42 \text{ atm}$$

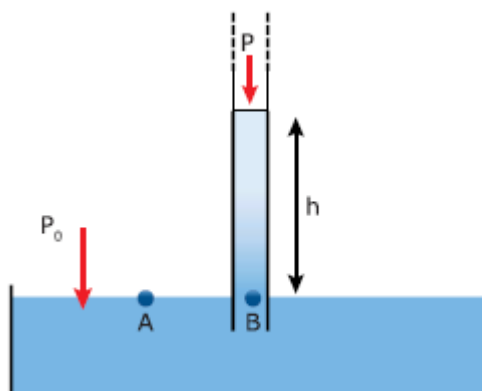
Exemplo 1: Durante uma aula de laboratório, um professor realizou a experiência ilustrada na figura a seguir. Primeiro, ele sugou a água de um recipiente utilizando um tubo transparente, aberto nas extremidades, e com cerca de 1 m de comprimento. Em seguida, ele tampou rapidamente a extremidade superior do tubo com a mão. Por último, o professor retirou o tubo do recipiente e mostrou aos alunos que a água no tubo continuou em repouso, sem derramar nem um pouco pela extremidade inferior.



a) Avaliar a pressão do ar no interior do tubo.

b) Explicar por que a água coletada no tubo não derrama depois que esse é retirado do recipiente.

Resolução: a) A água está em equilíbrio tanto no interior do tubo quanto dentro do recipiente. Logo, podemos afirmar que as pressões em dois pontos do interior do líquido, que se encontram em um mesmo nível, são iguais. Esse é o caso da pressão na superfície livre da água (ponto A da figura a seguir) e da pressão da água dentro do tubo, na posição em que o nível é o mesmo da superfície livre (ponto B).



A pressão no ponto A é igual à pressão atmosférica, ($p_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, ao nível do mar). A pressão em B é a soma da pressão do ar dentro do tubo (valor pedido) com a pressão exercida pela coluna de água no tubo. Essa última parcela é dada por dgh , em que d é a densidade da água ($1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$), g é a aceleração da gravidade (10 m/s^2), e h é a altura da coluna de água no tubo. O tubo tem 1 m de comprimento, de forma que 40 cm

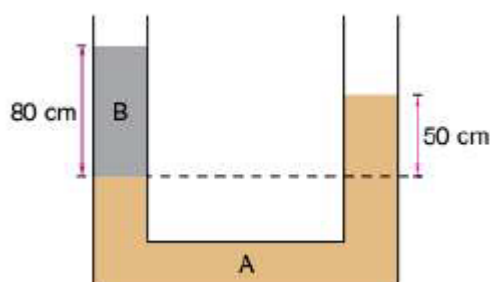
(0,40 m) é uma boa estimativa para h . Igualando as pressões em A e B e substituindo os valores citados, obtemos:

$$\begin{aligned} p_B &= p_A \Rightarrow p + dgh = p_0 \\ p + 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,40 &= 1,0 \cdot 10^5 \\ p &= 0,96 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

Observe que o valor da pressão P é igual a 96% da pressão atmosférica. Em outras palavras, ao succionar a água, o professor reduziu 4% da pressão do ar dentro do tubo. Por isso, a pressão atmosférica, que atua na superfície livre da água do recipiente, “empurrou” o líquido para dentro do tubo. É dessa forma que conseguimos tomar uma bebida com um canudinho. De fato, é a pressão atmosférica que empurra a bebida para dentro da nossa boca.

b) Depois que o tubo é retirado do recipiente, a água não derrama pela extremidade de baixo do tubo porque a pressão atmosférica atua de baixo para cima sobre a água, impedindo-a de cair. Nessa situação, de forma semelhante aquela discutida no item anterior, a pressão atmosférica que age externamente é equilibrada pela soma da pressão do ar dentro do tubo com a pressão exercida pela coluna de água.

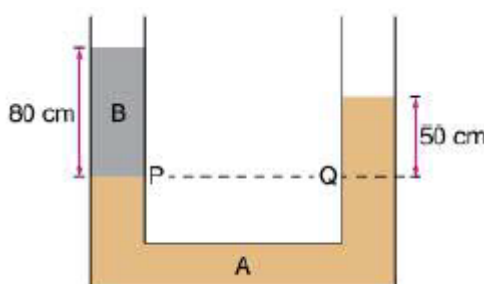
Exemplo 2: O tubo aberto em forme de U da figura contém dois líquidos não miscíveis, A e B, em equilíbrio. As alturas das colunas de A e B, medidas em relação à linha de separação dos dois líquidos, valem 50 cm e 80 cm, respectivamente.



a) Sabendo que a massa específica de A é $2,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine a massa específica do líquido B.

b) Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$ e a pressão atmosférica igual a $1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$, determine a pressão no interior do tubo na altura da linha de separação dos dois líquidos.

Resolução: a) A pressão nos pontos P e Q é a mesma, pois os pontos estão na mesma altura no mesmo líquido em equilíbrio.



Assim, temos:

$$p_P = p_Q \Rightarrow p_{atm} + d_B gh_B = p_{atm} + d_A gh_A$$

$$d_B = d_A \frac{h_A}{h_B} \Rightarrow d_B = 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{50}{80}$$

$$d_B = 1,25 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

b) Podemos escolher o ponto P ou o ponto Q para o cálculo dessa pressão. Adotando o ponto P, temos:

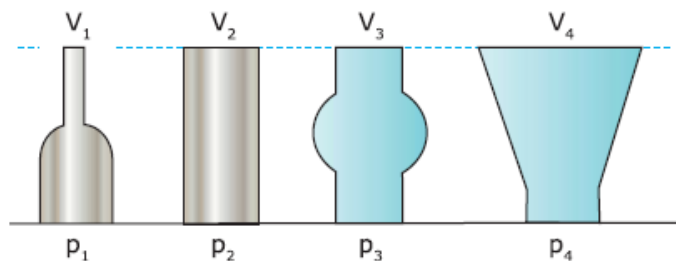
$$p_P = p_{atm} + d_B g h_B = 10^5 + 1,25 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,8$$

$$p_P = 10 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^4 = 11 \cdot 10^4$$

$$p_P = 1,1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

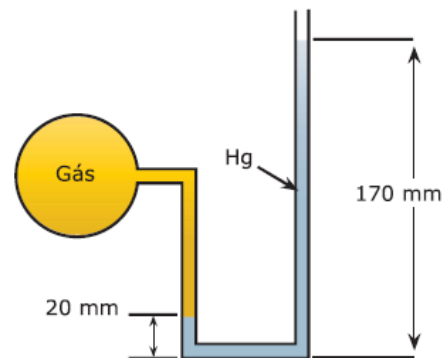
ATIVIDADES

1. Os fundos dos vasos V_1, V_2, V_3 e V_4 têm a mesma área. Os vasos V_1 e V_2 estão cheios de mercúrio e V_3 e V_4 , de água, até a mesma altura, conforme ilustra a figura:

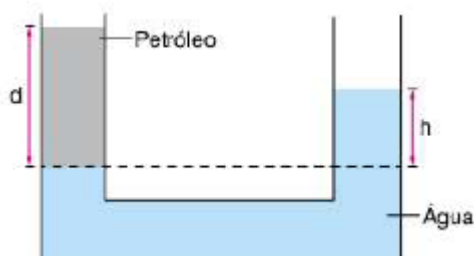


O que podemos afirmar sobre as pressões p_1, p_2, p_3 e p_4 , exercidas pelos líquidos nos fundos dos vasos V_1, V_2, V_3 e V_4 ?

2. Para medir a pressão p exercida por um gás contido num recipiente, utilizou-se um manômetro de mercúrio, obtendo-se os valores indicados na figura. A pressão atmosférica local medida por um barômetro é de 750 mmHg. Qual é o valor de p , em mmHg?



3. A aparelhagem mostrada na figura abaixo é utilizada para calcular a densidade do petróleo. Ela é composta de um tubo em forma de U com água e petróleo.



Dados: considere a densidade da água igual a 1000 kg/m^3 . Considere $h = 4 \text{ cm}$ e $d = 5 \text{ cm}$. Qual o valor da densidade do petróleo, em kg/m^3 ?



AULA 20

DILATAÇÃO TÉRMICA LINEAR



Como dito nas aulas anteriores, a maior parte dos materiais sofre dilatação ou expansão em seus tamanhos quando são aquecidos.

Esse fenômeno está por trás de diversas situações cotidianas.

Um termômetro de coluna, por exemplo, funciona por meio da dilatação térmica. Quando o mercúrio ou o álcool colorido são aquecidos, seu tamanho aumenta e o líquido sobe coluna acima.

Na construção de pontes, a variação de tamanho dos componentes com a temperatura, pode, se não for levada em conta, causar grandes catástrofes, como deformações, rachaduras e, no pior dos casos, colapsos na ponte como um todo. Para evitar isso, as pontes são construídas com juntas e suportes que permitem a dilatação térmica (figura ao lado) por meio de folgas.

Se enchermos uma garrafa até a boca, com água, essa garrafa estoura se a aquecemos. Tome cuidado ao reproduzir isso em sua casa!

Um objeto tapado com uma tampa de metal muito justa pode ser mais facilmente destampado se a tampa metálica ficar dilatada. Isso pode acontecer, por exemplo, se aquecemos a tampa ou jogarmos nela água quente.

É bem comum ouvirmos móveis ou vigas de madeira rangendo à noite. Durante o dia, eles dilatam em virtude do aquecimento provocado pelo Sol. À noite, como a temperatura diminui, o móvel contrai, emitindo energia sonora. Esse barulho ocorre porque todos os encaixes (internos ou externos à própria madeira) ficam mais frouxos no frio, o que libera tensão.

Mas como ocorre essa dilatação?

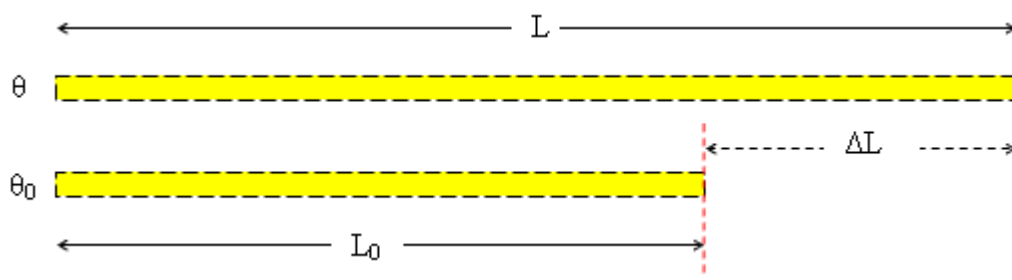
Exemplifiquemos, para fins pedagógicos, com base no caso mais simples possível: uma barra estreita de ferro, cilíndrica, que possui o comprimento L_0 muito maior que seu diâmetro.

Se essa barra aumenta sua temperatura em $\Delta\theta$, o comprimento aumentará um valor ΔL . A experiência demonstra que, se a variação de temperatura for pequena (isso varia de material para material, mas podemos dizer, de modo geral, que $\Delta\theta$ precisa ser tal que a temperatura



Junta de dilatação de uma ponte.

final está "longe" daquela que produziria uma mudança de fase), ΔL é diretamente proporcional a $\Delta\theta$.



Isso quer dizer que se temperatura de uma barra de ferro é aumentada em $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, ela aumentará em, digamos, $0,01\text{ cm}$. Se eu aumentar em $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, ela aumentará $0,02\text{ cm}$.

Uma outra propriedade experimentalmente observada, e que é bem intuitiva, é a de que a mudança ΔL depende diretamente do tamanho L_0 inicial da barra. Se uma barra de 10 metros tiver a temperatura aumentada em $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, sua dilatação será o dobro daquela que uma barra do mesmo material, mas com metade do comprimento, terá.

Por fim, o quanto o objeto irá dilatar, dado o comprimento inicial e a temperatura, depende de uma constante de proporcionalidade que muda de material para material. Chamaremos essa constante de "coeficiente de dilatação linear", denotado pela letra grega α .

Com isso, podemos definir a fórmula da dilatação térmica linear

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta\theta$$

Se partirmos de $L = L_0$ em uma temperatura θ_0 e aumentarmos a temperatura para $\theta + \Delta\theta$ o tamanho aumentará em ΔL . Se chamarmos o tamanho final, após o aquecimento, de L , teremos:

$$L = L_0 + \Delta L$$

$$L = L_0 + \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$$

$$L = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

Vamos ilustrar a utilidade desta expressão com um exemplo:

Exemplo 1: Um agrimensor possui uma fita metálica de cerca de 50 metros de comprimento, calibrada para uso a uma temperatura de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Qual será seu comprimento total em um dia quente, a $40\text{ }^{\circ}\text{C}$? Use $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Resolução: Em primeiro lugar, achemos a variação ΔT de temperatura.

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = 40 - 20 \Rightarrow \Delta\theta = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Já temos o coeficiente de dilatação linear (α). O tamanho L_0 inicial (a $20\text{ }^{\circ}\text{C}$) é de 50 metros.

Precisamos, então, usar a fórmula para encontrar o tamanho final:

$$L = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$$L = 50 (1 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 20)$$

$$L = 50 (1 + 0,00024)$$

$$L = 50 \cdot 1,00024 = 50,012\text{ m}$$

É interessante perceber que, a 40 °C, uma fita que marca "50 metros" estará medindo 50,012 metros. Podemos também calcular qual será o erro de medição por metro. Em 50 metros, o erro é de 1,2 centímetros (0,012 metros). Em um metro, será $1/50$ disso, ou seja, $0,012/50 = 0,00024$ metro, o equivalente a $0,24 \text{ mm}$, pouco mais do que a espessura de um fio de cabelo! É uma variação bastante sutil, mesmo considerando que o coeficiente α do aço não é pequeno se o compararmos aos de outros sólidos.

A tabela abaixo mostra o valor do coeficiente de dilatação linear de alguns sólidos

Material	$\alpha \text{ (K}^{-1} \text{ ou } ^\circ\text{C}^{-1})$
Alumínio	$2,4 \cdot 10^{-5}$
Latão	$2,0 \cdot 10^{-5}$
Cobre	$1,7 \cdot 10^{-5}$
Vidro	$0,5 \cdot 10^{-5}$
Quartzo fundido	$0,05 \cdot 10^{-5}$
Aço	$1,2 \cdot 10^{-5}$

ATIVIDADES

1. Em Cawker City, no Kansas/USA, foi criado o maior novelo de barbante do mundo. Esticado, o fio mede cerca de 2300 quilômetros de comprimento. Abstraindo o porquê desta comunidade ter perdido tempo em empreendimento tão inútil, calcule qual será o comprimento do fio após um aquecimento de 50 °C, considerando o coeficiente de dilatação linear do fio igual a $1,1 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

2. Uma barra de ferro estreita e homogênea é aquecida de 10 °C até 80 °C. Sabendo que a barra a 10 °C mede 5 m e que o coeficiente de dilatação linear do ferro é $1,2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, calcule:

- A dilatação (em centímetros) sofrida pela barra.
- O tamanho final da barra após a dilatação.

3. Uma pessoa utiliza, em um dia quente de verão, uma trena para medir uma mesa de madeira. A mesa e a trena são levadas para uma câmara fria posteriormente, pois seriam utilizadas lá. Se alguém medisse a mesa algumas horas depois, com os objetos já na câmara fria a algum tempo, e considerando que o coeficiente de dilatação do aço, do qual é feito a trena, é maior do que o da madeira, a medição feita na câmara fria dará ao leitor um número maior ou menor do que o medido no ambiente quente?



AULA 21

DILATAÇÃO SUPERFICIAL E VOLUMÉTRICA DE SÓLIDOS



esta aula, iremos estudar o fenômeno da dilatação térmica no caso em que temos não um objeto comprido e estreito, e sim objetos planos ou sólidos. Nesse caso, o fenômeno da dilatação será observado em todas as dimensões, produzindo um aumento de área ou de volume.

Falemos primeiro dos objetos planos. Nessa categoria, se incluem chapas de fritar hambúrguer, folhas de papel, tábuas de cortar carne, tampos de mesa, portas, etc. Todos esses objetos têm altura e comprimento, mas têm pouca espessura: são aproximadamente planos, bidimensionais. Dentre esses, a folha de papel é o que mais se aproxima do ideal bidimensional, por ter espessura = 1 mm, mais de 200 vezes menor do que suas outras dimensões!



Em um objeto plano, a área é sempre proporcional à largura vezes a altura. Vamos chamar de A_0 a área original, antes do aquecimento. Consideremos objetos retangulares. Nesse caso, a área será:

$$A_0 = L_0 \cdot l_0$$

Onde L_0 é o lado maior e l_0 é o lado menor. Considerando um material isotrópico, ou seja, no qual a dilatação é igual em todas as direções, teremos que, após um aquecimento, cada lado irá sofrer dilatação linear proporcional a α e ao aumento de temperatura $\Delta\theta$.

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

$$l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Multiplicando L por l , posso encontrar a área final, após o aquecimento:

$$A = L \cdot l = L_0 \cdot l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta + \alpha \cdot \Delta\theta + \alpha^2 \cdot (\Delta\theta)^2)$$

Ora, α é, em geral, muito pequeno. Desse modo, α^2 será ainda menor, de modo que podemos desprezar o termo $\alpha^2 \cdot (\Delta\theta)^2$. Se escrevermos $L_0 \cdot l_0 = A_0$, chegamos em:

$$A = A_0 \cdot (1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Ou seja, para encontrar o coeficiente de dilatação superficial, basta multiplicarmos o coeficiente de dilatação linear por dois! O coeficiente de dilatação superficial (β) é dado por:

$$\beta = 2 \cdot \alpha$$

Sendo assim, a expressão para a dilatação superficial será:

$$A = A_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta\theta)$$

Vamos, agora, exemplificar o que vimos.

Exemplo 1: Uma chapa de alumínio sofreu um aquecimento de 50 °C. Se ela tinha, inicialmente, a área de um metro quadrado, qual será sua área após o aquecimento?

Resolução: Sabemos que

$$\Delta\theta = 50 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$A_0 = 1 \text{ m}^2$$

$$\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \text{ (vide tabela)}$$

A área após o aquecimento será:

$$A = A_0 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta\theta)$$

$$A = 1 \cdot (1 + 2 \cdot 2,4 \cdot 10^{-5} \cdot 50)$$

$$A = 1,0024 \text{ m}^2$$

Houve um aumento de 0,0024 m².

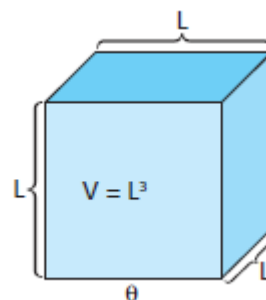
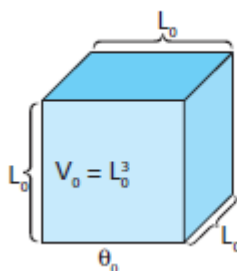
É importante notarmos que 0,0024 m² não é igual a 0,024 cm². Cada metro quadrado é equivalente a 100 . 100 = 10⁴ cm²; é preciso ter 10.000 cm² para obtermos 1 m². A área do alumínio aumenta, então, em 24 cm², equivalente a um retângulo de 6 cm por 4 cm!

DILATAÇÃO VOLUMÉTRICA

Passemos para a dilatação volumétrica. O raciocínio lógico é o mesmo. Se imaginarmos um cubo de lado L_0 feito de um material cujo coeficiente de dilatação linear é α , temos que, após um aumento $\Delta\theta$ de temperatura, cada lado passará a ter um tamanho L , dado por:

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Se multiplicarmos os três lados para obter o volume, teremos:



$$V = L_0^3 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta + 3 \cdot \alpha^2 \cdot \Delta\theta^2 + \alpha^3 \cdot \Delta\theta^3)$$

Como $\alpha \cdot \Delta\theta$ continua sendo um valor muito menor que um, podemos desprezar os valores de $(\alpha^2 \cdot \Delta\theta^2)$ e $(\alpha^3 \cdot \Delta\theta^3)$. Assim,

$$V = L_0^3 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Para encontrar o coeficiente de dilatação volumétrica de um sólido isotrópico, que dilata igual em todas as direções, basta multiplicarmos o coeficiente de dilatação linear por 3! O coeficiente de dilatação superficial (γ) é dado por:

$$\gamma = 3 \cdot \alpha$$

Sendo assim, a expressão para a dilatação superficial será:

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$$

Exemplo 2: Uma panela de aço de capacidade igual a 4 litros tem o volume aumentado em 0,002 litros. Considerando o coeficiente de dilatação linear do aço, calcule:

- O coeficiente de dilatação volumétrico.
- A variação de temperatura.

Resolução:

Para calcular o coeficiente de dilatação volumétrica, precisamos apenas multiplicar por 3 o coeficiente de dilatação linear. Como o coeficiente α do aço é $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, o coeficiente de dilatação volumétrica do aço será:

$$\gamma = 3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Para acharmos a variação de temperatura, vamos usar a fórmula padrão

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$$

Já encontramos γ , então:

$$\frac{V}{V_0} = 1 + \gamma \cdot \Delta\theta$$

$$\frac{V}{V_0} - 1 = \gamma \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{\frac{V}{V_0} - 1}{\gamma}$$

$$\Delta\theta = \frac{\frac{4,0002}{4} - 1}{3,6 \cdot 10^{-5}}$$

$$\Delta\theta \cong 13,89 \text{ } ^\circ\text{C}$$

EXEMPLOS DE DILATAÇÃO VOLUMÉTRICA

No cotidiano, a aplicação de dilatação volumétrica, tanto de sólidos quanto de líquidos, é muito ampla.

Implantação de dentes e inserção de pinos metálicos: nos implantes dentais que são parafusados no maxilar, ou pinos metálicos colocados nos ossos quando são fraturados, os materiais escolhidos são aqueles que apresentam menos rejeição ou toxicidade para o corpo humano, e seu coeficiente de dilatação é próximo ao coeficiente de dilatação dos ossos. Isso é para evitar que, quando ocorrem mudanças drásticas na temperatura, o portador não sofra muito com a dor, já que, mesmo sendo valores próximos, ainda são diferentes; com isso, a dilatação volumétrica de cada um será diferente. O coeficiente de dilatação dos metais costuma ser maior, logo, os pinos ou parafusos se dilatam ou se contraem mais que os ossos, causando dor em dias com temperaturas muito elevadas ou muito baixas, e, no caso dos implantes dentais, a sensibilidade ao ingerir-se bebidas ou alimentos muito quentes ou frios.

Congelamento superficial de lagos e rios: no caso da dilatação da água, seu comportamento irregular faz com que lagos ou rios congelem apenas na superfície, e, no fundo, ela continua líquida. A troca de calor ocorre primeiro entre a superfície e o meio, logo, a temperatura da superfície abaixa antes que a do fundo, de forma rápida o suficiente antes que a água fria desça devido a sua densidade mais elevada. Então cria-se uma camada de gelo na superfície, e no fundo; como a água passa de $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ para $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, ela se dilata, sua temperatura se estabiliza nesse limite, permanecendo no estado líquido. Isso é um mecanismo que possibilita a preservação dos seres vivos que habitam esses ambientes.

Enchimento incompleto de recipientes que comportam líquidos à base de água: recipientes que comportam líquidos à base de água, e eventualmente são resfriados, não ficam cheios por inteiro. Isso porque, no resfriamento de $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ para $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, a água dilata e, se os recipientes estiverem totalmente cheios, devido à dilatação, eles explodem ou racham.

Choque térmico: o vidro é um condutor de calor, quando ele é bruscamente aquecido, o calor é conduzido por toda sua superfície de forma lenta e, se uma das suas extremidades estiverem em contato com uma temperatura drasticamente diferente, ele se quebra, já que uma parte dilata e a outra resiste à dilatação ou está se contraindo. Esse é o popularmente conhecido choque térmico. Mas devemos nos lembrar que as temperaturas devem ser consideravelmente diferentes, com, pelo menos, $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ de diferença.

ATIVIDADES

1. Um quadrado de lado 1 m é feito de um material cujo coeficiente de dilatação linear é igual a $0,8 \cdot 10^{-4}$. Qual será a área deste quadrado após aumentarmos sua temperatura em $70\text{ }^{\circ}\text{C}$?

2. A espuma vinílica acetinada (EVA) é um dos materiais sólidos com maior coeficiente de dilatação linear, tendo $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. Um tapete infantil (tatame) de EVA, de lado inicial igual a 2 metros e formato quadrado, terá que área após um aquecimento de $20 \text{ }^{\circ}\text{C}$?

3. Um material chamado Zerodur possui um coeficiente de dilatação linear extremamente baixo, na casa de $7 \cdot 10^{-9} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. Esse material possui aplicações na indústria espacial, haja vista que o fenômeno da dilatação nesse contexto pode causar acidentes e erros de medição. Considere um quadrado, de lado l , feito desse material. Qual deve ser o valor de l para que seja possível observar uma dilatação de 1 cm^2 nesse objeto após um aumento de $50 \text{ }^{\circ}\text{C}$?

4. Um cubo de chumbo tem $\alpha = 2,9 \cdot 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. Após aumentar sua temperatura em $80 \text{ }^{\circ}\text{C}$, seu volume aumenta em 4 cm^3 . Qual é o tamanho do lado do cubo?



AULA 25

TRANSFERÊNCIA DE CALOR



as aulas anteriores, estudamos a respeito da natureza do calor: energia térmica, desordenada, em fluxo de um corpo para outro. Essa energia, quando transmitida de um corpo para outro, irá promover maior ou menor aumento de temperatura, dependendo da chamada **capacidade térmica** do objeto que recebeu o calor. Essa capacidade térmica é, em linhas gerais, dada pelo produto da massa do objeto por uma grandeza intrínseca deste, dependente das propriedades do material do qual ele é feito: o calor específico.

Ora, nesta abordagem, o que não fica clara ou definida de modo algum, é a seguinte questão: como saber, dados dois objetos com certas características físicas e com certa temperatura, qual será a taxa de calor transferida de um para o outro? Qual é a grandeza que faz com que um pedaço de metal ‘roube’ calor mais rápido de nosso corpo do que um pedaço de madeira? Qual é a grandeza que faz com que uma caneca de louça conserve melhor a temperatura do chá quente do que uma caneca de metal?

Imagine que tenhamos uma leiteira cheia de água. Façamos um experimento mental que nos permite imaginar de que depende o fluxo de calor entre dois objetos. Chamaremos a parte desconhecida da equação de a .

A) Se colocarmos essa leiteira no fogo, a quantidade de calor que nela irá entrar será diretamente proporcional ao tempo que a leiteira fica lá. Quanto mais tempo, mais calor. Logo, o calor ΔQ que passa para o outro lado depende, com proporção direta, do intervalo de tempo Δt :

$$\Delta Q = a \Delta t$$

B) Se o fogo estiver mais quente, ou seja, se a diferença de temperatura entre a água e o fogo for maior, a transferência de calor será mais rápida (até que essa transferência cessa quando os dois objetos têm a mesma temperatura – no caso, isso não é possível, porque a água evapora antes). Logo, o calor transmitido dependerá diretamente da diferença $\Delta T = T_2 - T_1$ de temperatura. Note que, se estivermos vendo o calor que vai do objeto 2 para o objeto 1, teremos um fluxo negativo (perda de calor) se a diferença ΔT for positiva! Isso exige que coloquemos um sinal negativo junto à dependência com ΔT .

$$\Delta Q = -a \cdot \Delta t \cdot \Delta T$$

C) Se a parede da leiteira for mais grossa, a transferência de calor é postergada: quanto mais fina a parede, maior o fluxo de calor para a água. Experimentos demonstram que o calor dependerá em uma proporção inversa da espessura x da parede. Logo:

$$\Delta Q = -\frac{a \cdot \Delta t \cdot \Delta T}{x}$$

D) Quanto mais largo for o fundo da leiteira, mais rápido o calor fluirá. Logo, existe uma proporção direta entre a área A e o calor ΔQ

$$\Delta Q = -\frac{a \cdot \Delta t \cdot A \cdot \Delta T}{x}$$

E) O material da parede da leiteira tem importância fundamental. Cada material tem uma **condutividade térmica**, que diz o quanto ele é bom para permitir a passagem de calor por ele. Podemos identificar a constante a com a condutividade térmica, que convencionamos chamar de k . Assim, chegamos à fórmula final para a condutividade térmica entre um objeto e outro.

$$\Delta Q = -k \frac{\Delta t \cdot A \cdot \Delta T}{x}$$

Entretanto, a forma mais usual desta fórmula é aquela na qual o intervalo de tempo passa para o outro lado dividindo. Essa fórmula é uma versão simplificada, pertinentes para casos simples, da **Lei de Fourier**, devida ao importante físico e matemático Jean-Baptiste Joseph Fourier, que, apesar de levar em seu nome a memória dos grandiosos São João Batista e São José, foi um dos revolucionários por trás da Revolução Francesa, responsável por um grande terror na França que envolveu até mesmo a decapitação de freiras de clausura. É preciso deixar bem claro que a genialidade físico-matemática não implica, sob qualquer circunstância, idoneidade moral ou adesão à verdade religiosa.



*Jean-Baptiste Joseph Fourier
(1768-1830)*

Vamos compreender o uso dessa fórmula na prática, por meio de exemplos.

Exemplo 1: Em uma cidade quente, o uso de aparelhos de ar-condicionado se torna muito comum, não obstante o alto gasto de energia elétrica deste aparelho. Em um dia particularmente quente em Cuiabá-MS, uma pessoa se fecha no quarto e liga o ar-condicionado. Considerando que o ambiente externo ao quarto está a 40 °C; que a pessoa no quarto ajustou o ar para 20 °C; que o quarto tem 40 m² de paredes com espessura de 10 cm; qual é o gasto de energia, por hora e em reais, provocado pelo uso do ar-condicionado? Use os seguintes dados: $k = 1.25 \times 10^{-3}$ kW/(m·K) (condutividade térmica da parede) e que o custo energético em Cuiabá é de 0,88 por kWh.

Usemos a lei de Fourier:

$$\Delta Q = -k \frac{\Delta t \cdot A \cdot \Delta T}{x}$$

Neste problema, $k = 1.25 \times 10^{-3} \text{ kW}/(\text{m}^\circ\text{C})$, $\Delta t = 1 \text{ hora}$, $A = 40 \text{ m}^2$, $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ e $x = 10 \text{ cm}$. Vamos substituir os valores:

$$\Delta Q = -1.25 \times 10^{-3} \frac{1 \cdot 40 \cdot (-20)}{0.1} = 10$$

Mas 10 o que? Joules? Calorias? Quilocalorias? Elétrons-Volt? Kwh? Esse resultado não tem qualquer sentido se não temos uma unidade de medida anexa a ele. Percebendo que trocamos 10 cm por 0.1 metro para manter todos os dados em unidade com o Sistema Internacional de Medidas, façamos uma análise dimensional, multiplicando todas as unidades presentes na fórmula:

$$\text{kW}/(\text{m } ^\circ\text{C}) \times \text{h} \times \text{m}^2 \times ^\circ\text{C} / \text{m} = \text{kW} \cdot \text{h} = \text{kWh}$$

Ou seja, as unidades de área e de temperatura se anularam, restando apenas a unidade de energia kWh, abreviatura de “kilowatt hora”. Essa unidade é equivalente à energia proveniente de algo com potência de 1000 Watts ao longo de uma hora. Um Watt é equivalente a uma potência de um Joule por segundo. Um Kilowatt é equivalente, portanto, à potência de mil Joules por segundo. Em uma hora, temos 3600 segundos (60 minutos de 60 segundos), de modo que um Quilowatt-hora (kWh) é dado por $1000 \times 3600 \text{ J} = 3,6 \times 10^6 \text{ Joules}$.

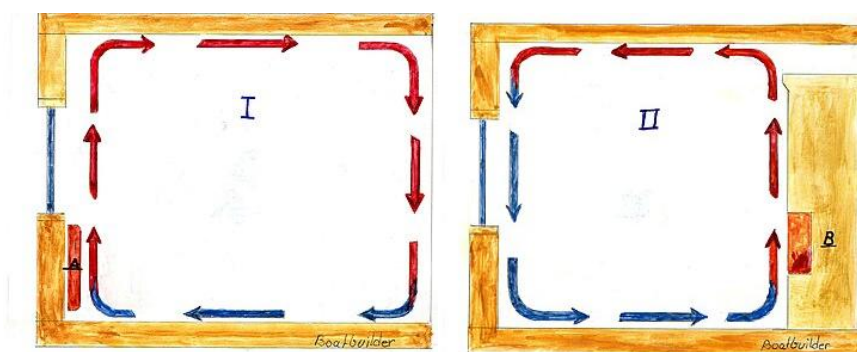
O nosso exercício resultou em 10 kWh de gasto energético. Considerando o custo de 0,88 centavos o kWh em Cuiabá, temos um custo financeiro de $10 \times 0,88 = 8,8$ reais por hora!

A condução térmica não é, entretanto, o único meio pelo qual pode ocorrer a transmissão de calor. Falemos brevemente de outros dois modos, a **convecção** e a **radiação**.

A convecção se dá quando um fluido (gás ou líquido) transmite calor a outras partes do mesmo fluido ou a outro objeto por meio de seu movimento. Um fluido em movimento, quando em contato com outro objeto, transmite calor de modo mais eficiente do que transmitiria pelo mero contato estático, tipo condução. Um modo simples de se ver isso é percebendo que os ventiladores efetivamente nos refrescam. Quando uma pessoa se senta em uma sala quente (digamos, 30°C), ela sente-se desconfortável em virtude do calor. Quando ligamos um ventilador, é esse mesmo ar quente, a 30°C , que entra em contato com a pessoa, mas agora este ar está em movimento. Esse mesmo ar quente, que nada fazia para “roubar” calor da pessoa enquanto parado, arranca este calor da pessoa com bastante eficiência quando está em movimento. A convecção também explica uma grande quantidade de fenômenos geológicos, atmosféricos e físicos no geral. É um fenômeno muito mais

complexo de se explicar do que a condução, de modo que não há equações gerais simples, como a lei de Fourier, para descrever a quantidade de calor transmitida em um processo convectivo.

Algo que veremos com mais detalhes na parte que se refere aos gases é que, quanto mais quente um gás, mais ele se expande, e, portanto, menos denso se torna. Um gás menos denso sobe. Se, em uma caixa fechada, temos um aquecedor em sua parte inferior, o ar que está embaixo é aquecido. Sendo aquecido, sua densidade diminui e ele sobe. O ar mais frio, então, desce, sendo aquecido pela fonte de aquecimento. Isso dá origem ao que chamamos de “corrente de convecção”, que, quando ocorre de modo cíclico, é chamado “célula de convecção”. Um refrigerador opera por um princípio análogo: o resfriamento do gás interno ao refrigerador ocorre na parte superior deste. O ar quente sobe, sendo resfriado no topo. Assim, ele fica mais denso e desce, resfriando a parte inferior do aparelho. Isso ocorre ciclicamente. O fenômeno da convecção também explica por que baixadas, em geral, são mais geladas do que encostas durante noites frias.



Células de convecção em uma caixa fechada – o objeto vermelho é o aquecedor do gás.

O último modo de se transmitir calor é por irradiação. Vamos, nesta explicação, nos ater à chamada radiação **térmica**, emitida por todos os corpos com temperatura finita. Se um corpo está em temperatura ambiente, existe da parte dele a emissão de radiação de baixa energia, que não podemos enxergar: é a chamada radiação infravermelha. Quando este objeto esquenta, a radiação vai se tornando cada vez mais energética, até se tornar visível (primeiro vermelho e depois, branco, pois o objeto passa a emitir em todas as cores ao mesmo tempo). Objetos muito quentes, como o Sol, emitem uma quantidade considerável de radiação ainda mais energética, a chamada radiação ultravioleta. Para além do ultravioleta, existem os raios X e os raios gama, que são capazes de provocar mutações celulares em virtude da **ionização** que promovem nos átomos que nos constituem. Os objetos, quando absorvem a radiação, “engolem” sua energia. É por isso que roupas escuras esquentam mais do que roupas brancas ao Sol: algo escuro tem essa cor porque absorve a luz, enquanto algo branco reflete essa mesma luz sem absorvê-la.

Ora, essa radiação (cuja origem e comportamento estudaremos melhor no 3º Ano do Ensino Médio) carrega energia, embora não carregue massa. Ela também pode se propagar no vácuo. Como ela carrega energia, sua incidência em um determinado objeto aumenta a temperatura deste objeto. Essa é, inclusive, a forma pela qual o Sol, na infinita Sabedoria de Deus, aquece nosso planeta: a distância que nos separa dessa estrela é muito grande, inviabilizando processos condutivos ou convectivos. É também esse processo que leva ao

resfriamento noturno da Terra: como ela tem temperatura finita, perde energia emitindo radiação infravermelha para o espaço. Locais mais altos, que possuem atmosfera mais rarefeita, perdem mais radiação por esse motivo, o que permite maior resfriamento do solo e maior possibilidade de incidência de geadas em dias frios.



Sol brilhando sobre nosso planeta.

ATIVIDADES

1. Imagine dois objetos em contato térmico, mediados por uma parede de metal.
 - a) O que acontece com a taxa de transmissão de calor quando dobramos a espessura da parede?
 - b) E se trocarmos a parede de metal por uma parede de madeira?
 - c) E se aumentarmos, usando um isqueiro, a temperatura do objeto mais quente?
2. Por que, em uma mesma cidade, locais mais altos são mais frios de dia e mais quentes de noite? Explique, com base no que foi aprendido a respeito da convecção e da radiação.
3. Um escritório é mantido à temperatura de $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ e encontra-se separado de uma sala vizinha à temperatura ambiente de $28\text{ }^{\circ}\text{C}$, com uma janela retangular de vidro, de $8,0\text{ mm}$ de espessura, $1,0\text{ m}$ de altura por $1,8\text{ m}$ de largura. Sabendo que a condutividade térmica do vidro é $0,80\text{ W/m.K}$, o total de calor transmitidas pela janela, após 10 minutos , é de aproximadamente quanto?



AULA 31

A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA



esta aula, falaremos a respeito de uma das leis mais profundas da física: a segunda lei da termodinâmica, que está relacionada a uma grandeza chamada entropia. O enunciado mais geral dessa 2ª lei surge a partir da união de dois resultados obtidos de modo independente: um por Rudolf Clausius (1822-1888) e outro por Kelvin (cujo nome real era Robert Thomson) (1824-1907).

Começemos pelo enunciado de Kelvin.

É impossível realizar um processo cujo único efeito seja remover calor de um reservatório térmico e produzir uma quantidade equivalente de trabalho.

O significado desse enunciado precisa ser expresso com mais clareza: ele **não** quer dizer que é impossível converter de modo completo uma certa quantidade de calor em energia mecânica. O que é impossível é fazer **somente** isso, ou seja, se uma certa quantidade de calor for convertida em energia mecânica, então o sistema termodinâmico como um todo (contando as eventuais fontes de calor e mecanismos que fazem trabalho sobre o sistema) necessariamente vai mudar.

Por exemplo: imagine um gás a temperatura ambiente, colocado sob pressão maior que a pressão atmosférica. Imagine que as paredes são diatérmicas, de modo que este gás está em equilíbrio térmico com a atmosfera. Imagine ainda que uma das paredes do recipiente é um pistão. Se inserimos calor no sistema mantendo o contato térmico do gás com a atmosfera, esse calor não mudará sua temperatura: apenas seu volume. Essa mudança no volume irá produzir um deslocamento no pistão, realizando um trabalho. A variação da energia interna será nula, pois a energia interna de um gás ideal depende apenas de sua temperatura, que, no caso, não varia. Então, pela primeira lei da termodinâmica, temos

$$W = Q$$

O calor que entrou converteu-se totalmente em trabalho! A questão é que o gás empurrou o pistão e absorveu calor de fora porque havia um desbalanço de pressão: quando a pressão interna ao sistema se iguala à pressão atmosférica, acaba o trabalho. O sistema final é diferente do sistema inicial. Deste modo, o termo “como única consequência” implica que é impossível transformar integralmente calor em trabalho em um processo **cíclico** (um ciclo), onde todo o sistema (ambiente + sistema propriamente dito) volta à condição inicial. Se isso

fosse possível, poderíamos fazer o lendário e fictício moto perpétuo: imagine um carro que roubasse calor da atmosfera para gerar trabalho e andar sem gasolina. Não existe tal coisa.

O enunciado de Clausius da 2ª lei está mais relacionado ao conceito de **refrigerador** do que de motor. Enunciemo-lo:

É impossível realizar um processo cujo único efeito seja transferir calor de um corpo mais frio para um corpo mais quente.

Novamente, precisamos nos ater ao “único efeito”. É possível imaginar um sistema no qual um corpo mais quente rouba calor de um corpo mais frio sem realização de trabalho (ou com trabalho líquido total nulo), mas o sistema não volta ao estado inicial após esse processo. A questão novamente se torna a ciclicidade do processo! Se isso fosse possível, teríamos um refrigerador miraculoso, que esfriaria objetos sem que fosse preciso realizar trabalho sobre eles.

É possível demonstrar (associando motores miraculosos com refrigeradores miraculosos, em uma construção que transcende o escopo deste material) que ambas as definições são equivalentes e igualmente válidas.

Ora, já que esses motores e refrigeradores miraculosos são de construção impossível, Carnot tentou responder à seguinte questão: se tivermos uma fonte quente de calor e uma fonte fria de calor (quente e fria uma em relação a outra), qual é o máximo rendimento que podemos obter? Note que rendimento implica trabalho: dada uma fonte quente e uma fonte fria de calor, qual é o máximo de trabalho que conseguiremos obter? Que tipo de ciclo produz isso?

A resposta é a chamada máquina de Carnot. Expliquemo-la.

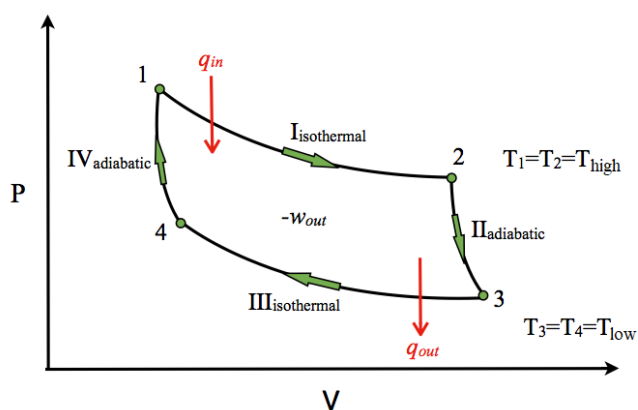


Diagrama PV da máquina de Carnot

Na máquina de Carnot, o sistema realiza os seguintes processos para fechar um ciclo:

- 1) Primeiro, o sistema absorve calor **isotermicamente** por meio de uma expansão.
- 2) Em segundo lugar, o sistema muda sua temperatura sem troca de calor, ou seja, de modo adiabático.
- 3) Em terceiro lugar, o sistema passa por uma compressão isotérmica, liberando calor.
- 4) Em quarto lugar, o sistema volta à temperatura original por meio de um processo sem troca de calor.

Por que esses passos? Porque, para que um processo seja maximamente eficiente, é preciso que ele ocorra de modo **reversível**. Em palavras simples, um processo é reversível quando não há dissipação de energia (se há dissipação, há perda de energia útil, que jamais poderá ser novamente recuperada!). A troca de calor via contato térmico é um processo dissipativo, de modo que, nesse sistema, para evitar trocas de calor por contato térmico, todas as trocas de calor vêm de expansões ou compressões isotérmicas, sem variação de temperatura. De igual modo, todos os processos nos quais há variação de temperatura são adiabáticos: a temperatura muda em virtude de trabalho feito pelo sistema ou no sistema, não por trocas de calor. E qual é a eficiência de tal máquina, que, por ser reversível, maximiza a produção de trabalho dadas duas fontes de calor?

Ora, o trabalho total é a diferença entre o calor que entra, Q_1 , e o calor que sai, Q_2 . Isso nos dá

$$W = Q_1 - Q_2$$

A máquina de Carnot é reversível: deste modo, se ela funcionar no sentido oposto, temos um refrigerador de eficiência máxima, que realiza um trabalho W para retirar calor da fonte fria e jogar na fonte quente com o máximo de eficiência possível.

Qual é a importância dessa máquina? É que ela, por ser reversível, expressa de modo cabal a máquina térmica mais eficiente possível (note: possível – não há qualquer violação da 2ª lei aqui). Isso dá origem ao chamado **teorema de Carnot**, que postula (e prova, embora a demonstração também se encontre para além do escopo desta aula) os dois pontos subsequentes:

- a) **Nenhuma máquina térmica que esteja trabalhando entre uma fonte quente Q_1 e uma fonte fria Q_2 pode ter rendimento maior do que uma máquina de Carnot.**
- b) **Todas as máquinas de Carnot que estiverem ligadas às mesmas duas fontes terão o mesmo rendimento.**

Um fato interessante é que tudo que importa nessas fontes de calor é a temperatura! Nenhuma outra informação a respeito delas precisa ser levado em consideração. Deste modo, por meio de algumas investigações concernentes ao trabalho em processos isotérmicos, chegamos à seguinte conclusão:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

com a temperatura medida em sua escala absoluta, em Kelvins. Ora, o trabalho produzido é:

$$W = Q_1 - Q_2$$

Se isolarmos Q_1 na expressão acima, podemos reescrevê-la do seguinte modo:

$$W = Q_1 \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) \rightarrow \frac{W}{Q_1} = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

E a razão entre o trabalho produzido W e o calor consumido Q_1 é justamente o rendimento η da máquina térmica!

$$\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Desse modo, até seria possível termos um rendimento perfeito (transformar todo calor consumido em trabalho em um processo cíclico), desde que tivéssemos uma fonte fria com temperatura $T_2 = 0$ K. Ora, essa temperatura é impossível de alcançar: essa impossibilidade, inclusive, está associada a processos termodinâmicos por meio de uma formulação da chamada **3ª Lei da Termodinâmica**, da qual só falaremos aqui à moda de citação, e que diz: “Não é possível, por meio de uma série finita de processos, resfriar uma fonte fria até que ela chegue ao zero absoluto”.

Nas máquinas reais, é difícil termos fontes frias com temperatura menor que a temperatura ambiente. Deste modo, a eficiência das máquinas térmicas é, em geral, melhorada por meio do uso de fontes quentes de temperatura cada vez mais alta.

Para concluirmos esta aula, que é árdua em termos conceituais, ilustremos a questão por meio de um exemplo simples.

Exemplo: A câmara de combustão de um motor de carro chega a 2400 K. Considerando a temperatura ambiente de $27^\circ\text{C} = 300$ K, qual seria o rendimento do motor se ele funcionasse de modo reversível, seguindo o ciclo de Carnot?

Solução: Podemos calcular o rendimento do motor por meio da fórmula

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \rightarrow 1 - \frac{300}{2400} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \approx 87.5\%$$

Os ciclos reais, irreversíveis, aplicáveis em motores reais, não chegam sequer a 50% de eficiência!

ATIVIDADES

- Um motor de carro produz 1100 J a cada 3300 J de calor absorvido.
 - Qual é o rendimento desse motor?
 - Se esse motor operasse segundo um ciclo de Carnot cuja fonte fria está a temperatura ambiente, qual seria a temperatura da fonte quente? Isso está muito distante do caso real? Justifique.
- Uma máquina de Carnot opera com uma fonte fria a 25°C e uma fonte quente a 400°C . Qual é seu rendimento?



AULA 35

MHS NA PRÁTICA



o nossos estudos, falamos do sistema massa-mola. Ele não é o único tipo de movimento harmônico simples com interesses práticos. Nesta aula, falaremos a respeito de alguns sistemas em que aparecem oscilações harmônicas, para que, diante do panorama descrito aqui, possamos encerrar a abordagem desse assunto.

Em primeiro lugar, é importante pontuar que o oscilador harmônico, o movimento harmônico simples, é como que um dos principais modelos físicos utilizados na descrição de fenômenos, mesmo complexos. Quase todo sistema físico, por complexo que seja, pode ser aproximado (ao menos em um primeiro momento, em algum regime) por um oscilador harmônico. Por que isso? Porque um objeto sempre se move de um modo contínuo, em uma trajetória que não pula instantaneamente de um ponto para outro sem passar pelos pontos intermediários. Essa trajetória pode ser descrita por uma função matemática, por esquisita que seja. A energia dele, idem, e essa energia será uma função **contínua** da posição, isso é, não terá saltos. Toda função contínua (e diferenciável, mas omitamos isso por ora) pode ser aproximada pela chamada **aproximação de Taylor**. Essa aproximação se baseia no conceito mais geral de **série de Taylor**, que, tendo como base teoremas provados de modo definitivo, prova que toda função contínua é igual à uma série infinita de polinômios.

$$f(x) = f(x_{ext}) + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

A forma dos a_n é conhecida, mas não é relevante levá-la em conta agora. O que é importante neste caso é que o primeiro termo, o a_1 , depende de uma grandeza chamada **derivada** da função $f(x)$. Se tivermos uma função matemática com picos e vales, eles serão pontos extremos, pontos de mínimo ou máximo local da função. Isso quer dizer que, se pegarmos um desses pontos, os pontos vizinhos serão todos maiores ou todos menores do que ele. No cálculo diferencial e integral, vemos que, em um ponto extremo, de mínimo ou máximo, a derivada é zero. Então, a função $f(x_{ext})$ fica

$$f(x) = f(x_{ext}) + a_2(x_{ext})(x - x_{ext})^2 + \dots$$

Se estivermos nas vizinhanças desse ponto, os termos como $(x - x_{ext})^3$ ou mais, serão muito pequenos (algo pequeno, menor que um, é pequeno; esse algo pequeno ao quadrado é ainda menor; ao cubo, menor ainda, e, assim, sucessivamente). Desse modo, podemos aproximar a função nas vizinhanças de seu ponto de mínimo por

$$f(x) \approx a + b(x - x_{ext})^2$$

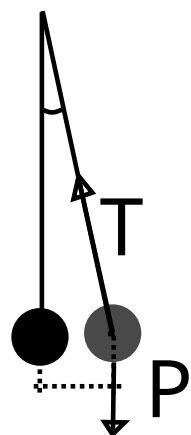
A energia potencial do oscilador harmônico, de sistemas massa-mola, tem essa forma: é proporcional ao quadrado da posição ($E = kx^2/2$). A aplicação dessa aproximação é ubíqua, possibilitando que físicos consigam estudar, em uma primeira aproximação, sistemas muito complicados com base em um modelo simples (que, é claro, deverá ser incrementado depois, para uma descrição mais acurada, mais precisa, do fenômeno).

Agora, passemos a descrever sistemas que podem ser aproximados para osciladores harmônicos.

Exemplo 1: Pêndulo Simples

O pêndulo simples é um sistema físico que consiste em uma massa m suspensa por um fio de massa desprezível e comprimento l . Não estamos, como de praxe, considerando o atrito. Objetos do cotidiano, como balanços de criança, são aproximadamente pêndulos simples – mesmo com atrito, se utilizarmos as fórmulas que deduziremos aqui, chegaremos a resultados bastante parecidos!

Em primeiro lugar, é importante perceber que, se tivermos uma oscilação pequena, a bolinha praticamente nem “sobe” com relação à posição inicial – só se desloca no eixo x .



A Segunda Lei de Newton será, portanto, uma competição entre a força peso e a tração, que é a força de reação que a corda produz na massa pelo fato da massa tentar esticá-la para baixo. Considere o ângulo entre a corda e a vertical de θ .

A componente y da tração compensa a força-peso:

$$T \cos \theta + mg = 0$$

E a componente x atua como a força que acelera o peso, fazendo-o se movimentar:

$$ma_x = T \sin \theta$$

Ora, o deslocamento x com relação ao ponto em que o pêndulo está parado sem oscilar é o cateto oposto a θ , enquanto l , o comprimento do pêndulo, é o cateto adjacente. Com isso, obtemos:

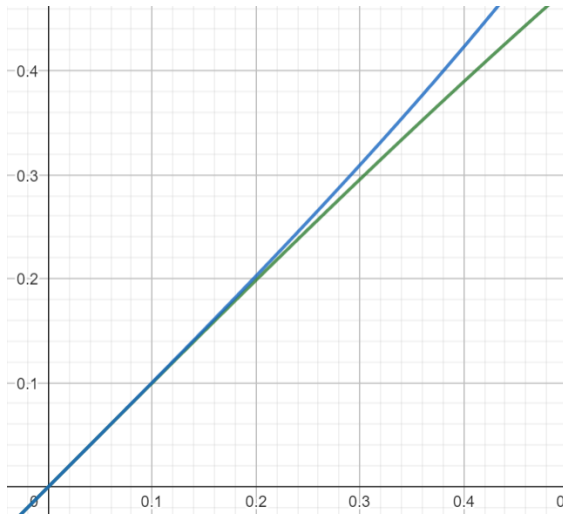
$$\sin \theta = x/l$$

Usando a primeira equação, podemos isolar a tração, escrevendo-a como função da força-peso.

$$T = -mg / \cos \theta$$

E, assim, podemos substituir esse valor na segunda equação, de modo que escrevemos a aceleração como função da massa, da gravidade e do ângulo de abertura.

$$ma_x = \frac{mg \sin \theta}{\cos \theta} = mg \tan \theta$$



Para ângulos pequenos, como é o caso considerado, o cosseno é muito próximo de um. Desse modo, $\tan \theta \approx \sin \theta$ (ver a concordância das duas funções, no caso de pequenos ângulos, no gráfico ao lado, onde o eixo x expressa o ângulo em **radianos**: a tangente é a curva azul, enquanto o seno é a curva verde). Considerando isso, teremos

$$ma_x \approx mg \sin \theta = \frac{mg}{l} \cdot x$$

Note que essa é **exatamente** a forma da 2ª Lei de Newton para o sistema massa mola, só trocando a

constante k pela constante mg/l !

No caso do sistema massa-mola, a velocidade angular ω é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Nesse caso, substituiremos k por mg/l : isso nos dá:

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{lm}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow T = 2\pi\omega = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Ou seja, a frequência de oscilação do pêndulo simples, considerando ângulos pequenos, é constante e **não** depende da amplitude de oscilação ou do valor da massa!

Exemplo 2: Circuito LC

Para compreender esse problema, deveremos fazer uma breve incursão pela eletricidade, ainda não estudada. Existe uma “coisa” chamada carga elétrica, que pode aparecer “positiva” ou “negativa”, e, quando essa carga se movimenta por um fio, existe a chamada ‘corrente elétrica’. Essa corrente é muito útil e está por trás do funcionamento dos equipamentos elétricos que temos hoje. Essa corrente elétrica reage de modo diferente ao passar por certos objetos de características específicas. Existe um componente chamado “capacitor”, que consiste em duas placas, separadas por um meio no qual não pode passar corrente elétrica.

Quando existem cargas positivas de um lado e negativas do outro, forma-se uma coisa chamada “campo elétrico” entre as placas, e esse campo acumula energia. Existe outro objeto chamado “indutor”, que consiste em um montão de fios bem enrolados. Se passar por esse indutor uma corrente elétrica, surgirá dentro dele um campo magnético, uma outra entidade etérea, e esse campo magnético, ao passar por dentro do monte de fios enrolados, gerará uma corrente elétrica oposta àquela corrente que por ele passa.

Se ligarmos a placa de cima de um capacitor em um fio, e esse fio a um indutor, e o indutor à placa de baixo do capacitor, teremos inicialmente algumas cargas positivas na placa de cima do capacitor e outras cargas negativas na placa de baixo do capacitor. A corrente elétrica irá fluir da placa de cima até a placa de baixo, mas, para isso, terá que passar pelo

indutor. O indutor, ao ser percorrido por uma corrente elétrica, irá gerar um campo magnético que, ao passar por dentro dos fios enrolados, irá gerar neles uma corrente elétrica oposta, que anulará a corrente original e irá colocar cargas negativas na placa de cima e cargas positivas na placa de baixo do capacitor. Isso gerará um campo elétrico que repetirá o ciclo. Esse ciclo se repete, para capacitores e indutores comuns, cerca de alguns bilhões de vezes por segundo!

De algum modo, essa descrição se parece com uma mola que é pressionada, e, sendo pressionada, empurra um peso, e esse peso acelera e passa do ponto de equilíbrio, até que a mola esticada pare de empurrá-lo e passe a puxá-lo para trás novamente, repetindo a oscilação *ad nauseam*. A semelhança não é ocasional: o circuito formado por um indutor L e um capacitor C tem uma equação que descreve o movimento das correntes análoga à Segunda Lei de Newton para um sistema massa-mola! A frequência de oscilação desse sistema é:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Onde L é a “indutância” do indutor (tendência desse indutor de gerar uma corrente elétrica oposta àquela corrente que nele flui) e C é a capacitância do capacitor (capacidade que o objeto tem de acumular carga elétrica). A capacitância tem a ver com carga elétrica. A indutância tem a ver com a variação da corrente elétrica com o tempo, e a corrente elétrica **já é a variação** da carga elétrica com o tempo.

Desse modo, temos uma relação linear entre uma grandeza e a variação da variação dessa grandeza. A posição e a aceleração tem essa mesma relação: a aceleração é a variação da variação da posição! Essa relação é que está no cerne do movimento harmônico simples. Pesquise a respeito!

Exemplo 3: Molas acopladas.

Considere um peso pendurado ao teto por duas molas diferentes. As duas vão esticar igual. A força que irá contrabalancear a força-peso é:

$$F = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x$$

Ou seja, duas molas, uma de coeficiente de mola k_1 e outra de coeficiente de mola k_2 , colocadas uma do lado da outra (ligação **em paralelo**) são equivalentes à uma única mola com $k = k_1 + k_2$.

Agora, se tivermos um peso pendurado em uma mola de coeficiente k_1 , e essa mola estiver ligada a outra mola de coeficiente k_2 , essa ligada ao teto. Ambas as molas estarão submetidas à mesma força, cada uma deformando a seu modo. A relação entre a força, o coeficiente e a deformação, é:

$$x = \frac{F}{k}$$

A mola equivalente, quando está sob ação de força de intensidade F , sofre uma deformação x tal que $x = \frac{F}{k_{eq}}$. Assim, considerando que $x = x_1 + x_2$, vale

$$\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Ou seja, a constante de mola equivalente é **menor** do que as constantes de mola originais! Esse tipo de ligação é o que chamamos de ligação **em série**.

A esses exemplos de sistemas físicos que oscilam com movimento harmônico simples, poderíamos somar muitos mais, como um bloco pouco denso afundado na água (o movimento que ele faria depois, empurrado para cima pelo empuxo e para baixo pela gravidade), o movimento de um balão perturbado em certa altitude, etc. Os exemplos são inúmeros e se estendem à virtualmente todas as áreas da física. Com isso tendo ficado bem claro, poderemos seguir em frente, finalizando o tema de oscilações harmônicas com exercícios.

ATIVIDADES

1. (OBF) A extremidade uma mola vibra com período T quando uma certa massa M está ligada a ela. Quando acrescentamos a essa massa uma outra massa, de valor m , o período de oscilação passa para $\frac{3}{2}T$. Qual é a razão entre as massas m e M ?

2. Imagine uma massa m oscilando em uma mola, de coeficiente k . Qual será a frequência de oscilação:

- Se for acoplada uma segunda mola, de coeficiente k , à essa massa?
- Se for acoplada a mola em uma outra mola de coeficiente k , e essa outra mola à massa?

3. Usando seus conhecimentos de termodinâmica e oscilações, responda:

Um relógio de pêndulos foi construído na Suécia, local no qual existem invernos rigorosos. Esse relógio foi trazido para o Brasil, para ser utilizado em Manaus, cidade muito quente.

- O que acontecerá com o período de oscilação? Aumentará, diminuirá ou se manterá constante?
- E se levarmos o relógio de pêndulo para a Lua, local no qual a gravidade é menor? O que acontecerá com esse período de oscilação?
- Considere $l = 1$ m e $g = 9,8$ m/s². Qual será o período do pêndulo? Use $T = 1/f$.



AULA 39

FENÔMENOS ONDULATÓRIOS: REFLEXÃO, REFRAÇÃO E DIFRAÇÃO

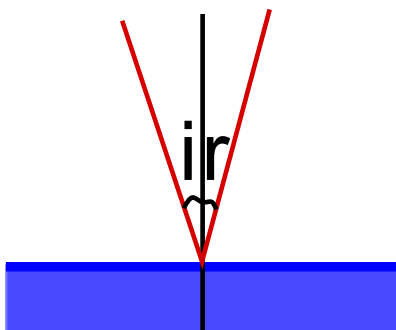


ondulatória é a ciência que estuda as ondas – perturbações (em um meio ou em um campo) em que há transporte de energia sem que haja transporte líquido de massa. As ondas estão sujeitas a fenômenos que não existem para partículas: o estudo desses fenômenos é, em geral, preterido pelos amantes da Física, que preferem muitas vezes o estudo da Mecânica. Isso pode vir a gerar lacunas bastante grandes na formação daqueles que aspiram estudar com mais afinco as ciências naturais modernas!

Nesta aula, estudaremos, especificamente, os fenômenos propriamente ondulatórios. O primeiro deles é o da **reflexão**. Imagine uma onda, por exemplo um raio de luz, incidindo sobre uma superfície plana, por exemplo, sobre um lago. O lago se estende ao longo do eixo x , e o eixo y é perpendicular a ele. O raio de luz atinge o lago com um ângulo i , chamado **ângulo de incidência**. Pode-se provar que esse ângulo i de incidência é igual ao ângulo r de reflexão, se considerarmos a medida com relação ao eixo y , que é perpendicular à superfície. Para compreender melhor esse fenômeno, façamos um pequeno exemplo

Exemplo 1: Reflexão.

Um raio de luz vermelha incide na água, sendo refletida.



Se o ângulo do raio com o lago for 3 vezes maior do que o ângulo do raio com a vertical, qual será o valor de i ? E o valor de r ?

Resolução: O ângulo α com a horizontal e o ângulo com a vertical são complementares. Deste modo,

$$i + \alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Como $\alpha = 3i$, temos:

$$i + 3i = \frac{\pi}{2} \rightarrow i = \frac{\pi}{8}$$

E, por leis físicas, o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência, de modo que $r = i = \pi/8$ rad.

Um fenômeno bem mais interessante que o da reflexão, é o da **refração**. Esse fenômeno ocorre quando uma onda (um raio de luz, por exemplo) troca o meio no qual está se propagando. Podemos dar como exemplo, um raio de luz que, vindo do ar, entra em uma piscina ou em um copo de água. O que ocorre nesse caso?

O que ocorre nesse caso é que a velocidade de propagação muda ao entrar em outro meio. Isso tem como consequência a **mudança** do ângulo de propagação. De modo mais rigoroso: se estivermos considerando ondas luminosas, a velocidade da luz no vácuo (ou no ar) é $c \approx 3 \times 10^8$ m/s. Em um meio específico, cujo índice de refração é n_1 (o do vácuo é $n = 1$, o do ar é praticamente isso), a velocidade de propagação da onda de luz será c/n_1 . Em um segundo meio, de índice de refração n_2 , a velocidade de propagação será c/n_2 . Segundo a lei que rege a mudança de ângulos em uma troca de meios, a relação entre o ângulo de incidência θ_1 e o ângulo da luz difratada θ_2 (sempre tomados com relação ao eixo **perpendicular** à superfície), será dada por:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Essa é a chamada **Lei de Snell**. Não tentaremos justificá-la agora (haverá tempo para tal em conteúdos posteriores!), apenas utilizá-la.

Exemplo 2: Um feixe de luz saiu do ar, cujo índice de refração é 1, e entrou na água, cujo índice de refração é 1,33. O ângulo de incidência foi 30° com relação ao eixo y . Qual será o ângulo que esse feixe de luz terá na água, medindo com relação ao eixo y ?

Resolução: Basta usar a Lei de Snell!

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$1 \cdot \sin 30 = 1,333 \cdot \sin \theta_2$$

Logo, como $\sin 30 = 0,5$, temos:

$$\sin \theta_2 = 0,5/1,333$$

E, usando a função arco seno da calculadora, obtemos:

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{0,5}{1,333}\right) \approx 22^\circ$$

Se o índice de refração do segundo meio é maior do que o do primeiro, o ângulo será menor, para compensar.

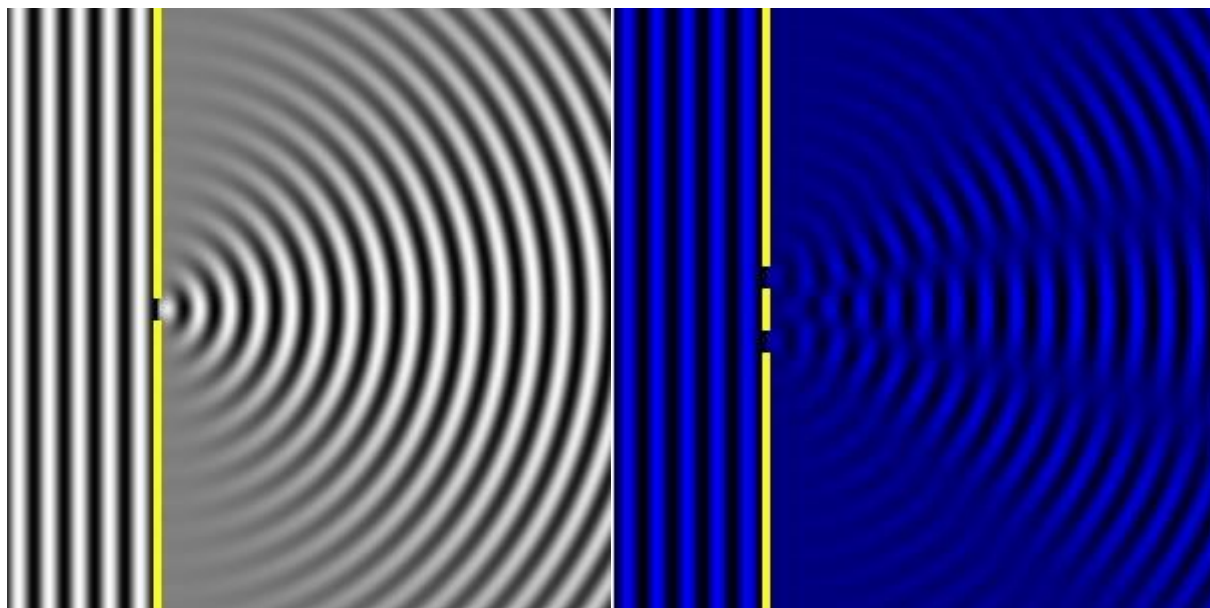
Note que, no caso dos dois fenômenos acima, o caráter ondulatório da onda foi pouco levado em conta. Estamos no limite da chamada **óptica geométrica**. Em certas situações, é mais simples trabalhar com feixes, com objetos retilíneos, do que com ondas oscilantes. Essa simplificação, permite que retiremos resultados e permite que façamos contas que dão resultados muito próximos aos observados, e que são muito mais simples do que aquele que faríamos ao considerar, desnecessariamente, todas as propriedades da ondas.

Um fenômeno físico que não pode ser descrito pela óptica geométrica, mas apenas pela ótica ondulatória, pelo estudo da propagação de ondas sem simplificações, é o fenômeno da **difração**. Esse fenômeno físico ocorre quando a onda encontra um obstáculo com buracos, especialmente quando esses buracos têm tamanho parecido com o comprimento de onda.

Para compreender o que acontece nesse caso, temos de apelar ao chamado **princípio de Huygens**, que pode ser enunciado do seguinte modo:

Todos os pontos de uma frente de onda se comportam como fontes pontuais de ondas secundárias. Chamamos de frente de onda todos os pontos de uma onda que tem a mesma fase.

O que isso quer dizer? Isso quer dizer que podemos compreender cada ponto de uma onda como uma fonte de outras ondas (que interferem-se mutualmente), a interferência de todas essas ondas dá origem a uma nova frente de onda. Quando a onda passa por buraquinhos (tente fazer isso usando uma bacia com água na qual existem duas pedras próximas, mas não encostadas, uma na outra), a parte da onda que bate na pedra desaparece, e a parte que passa pelo buraquinho é “difratada”, saindo com outro formato, mais arredondado, pelo buraco. Podemos visualizar isso observando as imagens a seguir



Resultado da difração para ondas passando por uma (esquerda) e duas fendas (direita).

O interessante é que todas essas ondas se somam umas com as outras, gerando um novo formato. A difração é um fenômeno diretamente ligado à interferência, à sobreposição de

ondas. É importante notar que a difração é vastamente utilizada na caracterização de materiais: se jogarmos raios-X (tipo de onda eletromagnética que possui comprimento de onda muito curto, parecido com a distância entre os átomos em um material) em um objeto cujos átomos formam um padrão espacial (objetos cristalinos), o raio-X passará pelos átomos e sofrerá difração. O resultado, a onda que é coletada após a difração, formará um “desenho” muito característico do material, de modo que esse método pode ser utilizado para saber de que é feito uma determinada amostra, um determinado pedaço de material. Esse método é conhecido como DRX (difração de raios-X).

No chamado experimento de Young, foi demonstrado, com uso de uma fenda dupla, que a luz era uma onda. Em 1927, testou-se o mesmo experimento atirando elétrons contra as fendas. Os elétrons, partículas portadoras de carga elétrica, deveriam atravessar as fendas devido ao seu comportamento corpuscular. Foi grande a surpresa quando, do outro lado, observou-se um padrão de difração-interferência característico de ondas! Assim é que foi descoberto um dos princípios fundamentais (e mais exóticos) da Mecânica Quântica, a chamada **dualidade onda-partícula**.

Por fim, podemos falar brevemente da polarização. Se, por exemplo, chacoalharmos uma corda com vigor, a onda gerada irá se propagar na direção x (frente) e oscilar tanto pra “cima” quanto para os lados. Se essa corda passa por dentro de uma fenda que, por exemplo, é estreita para os lados e comprida para cima, a oscilação para os lados será destruída, e a onda passará a oscilar apenas para cima e para baixo. É isso que chamamos de polarização – a fenda, no caso, é chamada de **polarizador**. É importante notar duas coisas:

1. Ondas longitudinais não podem ser polarizadas (a direção de propagação é a direção de oscilação!)
2. Se passarmos uma onda transversal por um polarizador vertical e depois por um polarizador horizontal, a onda “morre”.

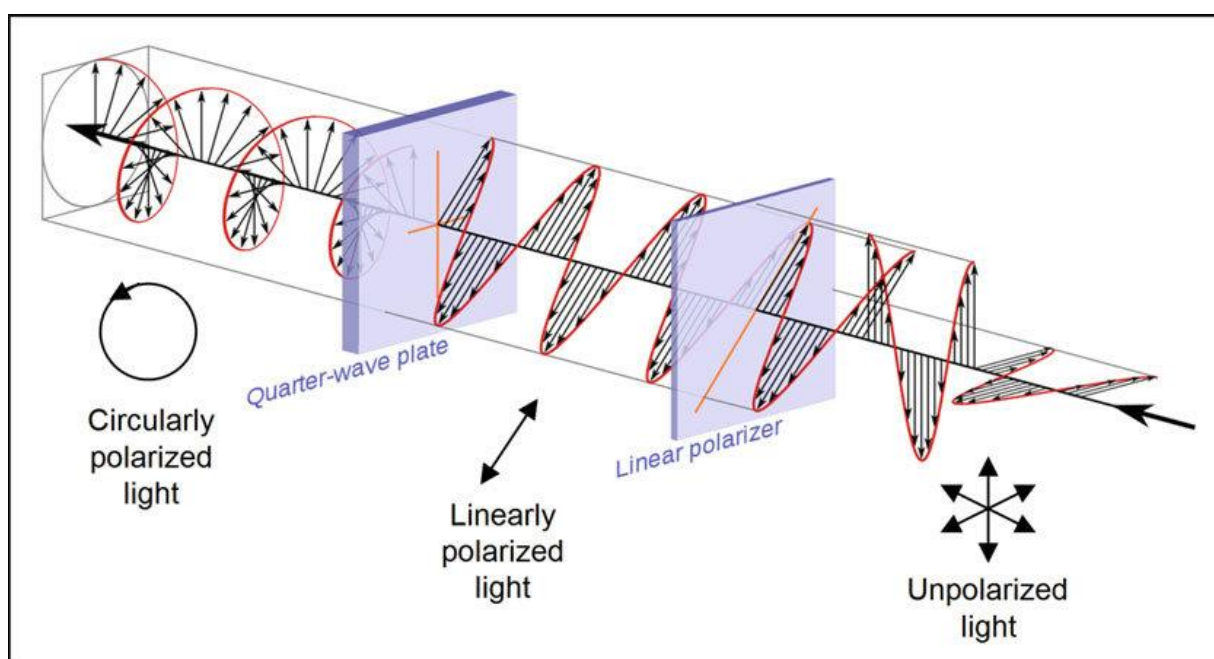


Figura ilustrando o fenômeno da polarização da luz. Note que a figura deve ser lida da direita para a esquerda.

Com isso, concluímos a nossa aula. Passemos aos exercícios!

ATIVIDADES

1. Considere um raio de luz incidindo em um espelho que é paralelo ao eixo y .
 - a. Para facilitar os cálculos, deveremos medir o ângulo de incidência com relação a que eixo?
 - b. Se o ângulo de incidência for de 40° com relação ao eixo y , qual será o ângulo de reflexão (com relação ao eixo y)? E se medirmos com relação ao eixo x ?
2. Um feixe de luz incide em um recipiente com óleo. Considerando que o ar tem o mesmo índice de refração do vácuo, que o índice de refração do óleo é $1,47$ e que o ângulo de incidência é de 30° com relação ao eixo x , calcule o ângulo que a luz faz com este mesmo eixo estando dentro do óleo.
3. É possível polarizar o som? Justifique.
4. A cristalografia eletrônica é o equivalente, usando elétrons, à difração de raios-X, usada para caracterizar materiais. A invenção desse método rendeu o prêmio Nobel de Química à Aaron Klug (1926-2018), em 1982. Explique por que é possível utilizar elétrons para caracterizar materiais.



AULA 42

PROPRIEDADES E CURIOSIDADES SONORAS



o som se propaga em um meio, a saber, ele é a sucessão de rarefações e compressões que ocorrem no ar. O som se propaga também em outros meios, inclusive meios sólidos, como o chão em que pisamos. O chão vibra, gerando sucessivas regiões de maior compressão e maior dilatação (evidentemente o efeito é bem mais sensível do que no ar). A questão é que a velocidade de propagação é diferente, porque esta velocidade é dependente do meio em que a onda sonora se propaga!

Na aula anterior, nos perguntamos por que ouvimos o som do trovão bem depois de vermos a luz gerada por essa descarga elétrica. Isso ocorre porque o som se propaga pela atmosfera com velocidade bem menor do que a velocidade da luz. Para fins de comparação, a velocidade da luz é de aproximadamente 300.000 km/s , ou $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (mais de um bilhão de quilômetros por hora!). A velocidade do som no ar, a 15°C e ao nível do mar, é de aproximadamente 340 m/s , ou 1.224 km/h .

A regra geral é que o som se propaga tanto mais rápido quanto maior a densidade do meio em que isso ocorre. Para que o som seja transmitido, as moléculas de uma região tem que colidir com as moléculas da região mais à frente, e essa com a região mais à frente, e assim subsequentemente. Como nos materiais condensados (sólidos e líquidos), a proximidade entre as moléculas é maior, essa transferência de momento linear e energia cinética entre uma molécula e outra se dá com mais velocidade.

Na água, o som se propaga a 1.481 m/s (velocidade quatro vezes maior do que a do som no ar). No aço, essa velocidade passa de 5.000 m/s , ou 18.000 quilômetros por hora. O material conhecido no qual a velocidade do som é maior é o diamante, material duríssimo e muito valioso. Nele, a velocidade do som chega a estonteantes 12.000 m/s , ou cerca de 43.200 km/h , velocidade tão grande quanto a de um foguete em órbita. Um foguete com tal velocidade conseguiria dar uma volta completa em nosso planeta em uma hora.

Entretanto, nosso maior interesse se encontra na propagação de ondas sonoras em gases. Nos gases, a temperatura interfere na velocidade de propagação das ondas sonoras. Em um dado gás (ideal), a velocidade v com a qual o som nele se propaga é:

$$v = \sqrt{K \cdot T}$$

Onde T é a temperatura do gás (em Kelvins) e $K = \frac{\gamma R}{M}$ depende do expoente de Poisson $\gamma = c_p/c_v$ (razão entre o calor específico à pressão constante e o calor específico à volume constante de um gás ideal), da constante universal de gases perfeitos R e da massa molar M do gás. O expoente de Poisson e a constante universal dos gases foram estudados nas aulas de física térmica, mas o conceito de massa molar não foi explorado. Adentremos nele.

Existe uma grandeza chamada **mol**, que é uma unidade do SI. Ela é utilizada para medir a **quantidade** de uma determinada substância, a quantidade de moléculas em uma dada amostra de uma substância. Dizemos que temos 1 mol de uma substância se nela temos exatamente $6,022140760 \cdot 10^{23}$ átomos ou moléculas (cerca de 602 milhões de milhões de bilhões de átomos, moléculas ou íons de uma determinada substância). Parece uma quantidade gigantesca, e realmente é, mas, em termos macroscópicos, não expressa muito mais do que algumas gramas de uma determinada substância.

A massa molar é justamente a massa que 1 mol de determinada substância apresenta. Essa massa molar é a razão entre a quantidade total de massa de uma determinada amostra de um objeto e a quantidade de mols dessa mesma amostra.

Por exemplo, se temos uma amostra de oxigênio (por exemplo, 1 litro), devemos calcular a massa de 1 litro de oxigênio e depois dividir pela quantidade de mols de oxigênio nessa mesma amostra. Em temperaturas e pressões médias, a massa molar média do ar seco é de aproximadamente $0,02897 \text{ kg/mol}$.

Exemplo: Qual é a velocidade do som no gás carbônico, principal gás que constitui a atmosfera de Marte? O gás carbônico é triatômico ($\gamma = 1.33$) de massa molar igual a $0,04401 \text{ kg/mol}$. O valor de R é universal, aproximadamente igual a $8,31$. Considere temperatura ambiente de $20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$.

$$v = \sqrt{293 \cdot 1,33 \cdot \frac{8,31}{0,04401}} \approx 271 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 975,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Valor menor do que na nossa atmosfera!

É importante notar que, sendo o som uma onda, ele possui todas as características de uma onda, como amplitude, frequência de oscilação (que depende só do emissor, não do meio) e velocidade de propagação (que depende principalmente do meio).

A velocidade do som no ar, cerca de 340 m/s , caracteriza uma unidade de medida não pertencente ao sistema internacional de unidades: o Mach. Os mais rápidos aviões militares alcançam velocidades que são múltiplas da velocidade do som, de modo que sua velocidade é medida em termos dessa unidade.

Um avião que se desloque na velocidade do som, tem velocidade Mach 1. Se a velocidade que ele adquire é o dobro da velocidade do som, dizemos que sua velocidade é

Mach 2. Aviões com velocidade Mach 5 (5 vezes a velocidade do som, ou mais) são chamados de **ultrassônicos**. O atrito do ar com a fuselagem desses aviões gera muito calor, de modo que é difícil encontrar materiais que suportem condições tão adversas.

Hoje, os aviões de passageiros operam todos em velocidades subsônicas. Em virtude de efeitos aerodinâmicos demasiadamente complexos para serem abordados nesta apostila, o ar “passa” pelo avião de modos diferentes para diferentes velocidades do avião. Se sua velocidade for menor que 85% da velocidade do som (que é 1062 km/h nas altitudes típicas de um avião, pouco menos do que a velocidade do som ao nível do mar), o regime é um.

Quando o avião passa dessa velocidade, ficando entre 85% e 100% da velocidade do som, a passagem do ar pelo avião muda. De modo particular, ao atingir a velocidade do som, as ondas de compressão e rarefação não conseguem andar com relação ao avião, se acumulando em sua frente e formando uma “bolha” de ar – é a chamada “barreira do som”. Nessa situação, a turbulência é grande e o avião pode sofrer instabilidades. Se ele ultrapassar a velocidade do som, atingindo velocidades superiores à Mach 1, essa barreira se “quebra” e um estrondo pode ser ouvido. Esse estrondo, se ocorrer ao sobrevoar cidades, pode acordar as pessoas e até quebrar vidraças, o que levou a proibição de voos supersônicos sobre locais habitados.

De 1976 até 2003, existia um avião de passageiros que operava em velocidades supersônicas – o Concorde. Na época da Guerra Fria, parecia fazer sentido (na cabeça dos “donos do mundo”) construir máquinas deste tipo para demonstrar a potência das nações. Após o fim da Guerra Fria, as empresas aéreas lidaram com a triste realidade – essa máquina tão espetacular, que unia Londres e Nova York em viagens de menos de 4 horas, era barulhenta, apertada, caríssima de se manter, mais perigosa de se pilotar e, não raro, dava prejuízo às empresas aéreas. É por isso que, hoje, não há mais voos comerciais supersônicos – a relação entre o custo e o benefício não é boa.



Concorde, o avião supersônico.

Poucos sabem, mas no dia 15 de outubro de 1997, houve um carro que superou a barreira do som. Até hoje, tal marca não foi replicada. O carro que passou de 340 m/s foi batizado de “Thrust SSC”, onde a sigla SSC significa “super-sonic car”, ou carro supersônico. Ele chegou a incríveis 1.228 km/h (pouco mais que a velocidade do som). Os motores que o moviam eram motores de jato, que geravam juntos cerca de 844 mil cavalos. O carro

consumia cerca de 18 litros de combustível **por segundo**. Suas dimensões também lembravam mais um foguete do que um carro: 16 metros de comprimento e mais de 10 toneladas.



Thrust SSC e a equipe responsável pelo teste, em que ele atingiu 341 m/s e se tornou o primeiro (e único) carro supersônico

Dadas estes fatos interessantes, passemos a fazer alguns cálculos envolvendo a velocidade do som.

Exemplo: Um menino solta uma pedra, que cai em um poço cheio d'água, cuja profundidade é de 40 metros. Após quanto tempo, contando a partir do momento em que ele solta a pedra, ele ouvirá o barulho da pedra caindo na água? Use a velocidade do som $c = 340 \text{ m/s}$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Solução: Precisamos dividir o problema em duas partes. Na primeira, a pedra cai no buraco acelerada pela gravidade. Ignorando efeitos da resistência do ar, teremos, tomando o **sentido positivo** do eixo y apontado para baixo (nesse eixo, a aceleração da gravidade é positiva).

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$40 = 0 + 0 + 5 t^2$$

$$t = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ s}$$

Deste modo, a pedra gasta aproximadamente 2,82 segundos para chegar até a água.

Batendo na água, o som subirá a uma velocidade de 340 m/s. Como o poço tem 40 metros de profundidade, o som demorará $t = \frac{40}{340} = 0,117$ segundos para subir. Deste modo, somando os dois resultados, o tempo total que o menino deverá esperar até ouvir o som da pedra batendo na água é de $t = 2,82 + 0,117 = 2,937$ segundos.

ATIVIDADES

1. Um menino admira uma tempestade olhando pela janela de sua casa. Ele vê um relâmpago e, após 4 segundos, ouve o barulho do trovão. A que distância deste menino o raio caiu? Considere a velocidade do som no ar como $c = 340$ m/s.

2. O avião supersônico Concorde, que parou de fazer voos comerciais em 2003, conseguia chegar a uma velocidade de 2179 km/h. Quantas horas ele demoraria para

a) Cruzar a distância Rio de Janeiro – São Paulo (357 km)?

b) Fazer o trajeto São Paulo – Frankfurt (9700 km)?

c) Dar a volta ao mundo (considerando o raio da Terra em 6370 quilômetros)?

3. A erupção do vulcão Krakatoa, em 1883, foi o primeiro evento a ter (graças aos telégrafos) publicidade mundial em um período curto de tempo. A explosão foi tão forte que lançou detritos a 100 **quilômetros** de altura, matou milhares com tsunamis e pintou de laranja e roxo o céu do mundo todo, tapando o sol com poeira, o que diminuiu por anos a temperatura global e gerou uma espécie de mini era do gelo ao redor dessa época. O som produzido por ele foi o mais potente da história recente, capaz de esmagar (só o som – não cito aqui a lava ou os detritos arremessados pelo vulcão) nossos órgãos internos. A 100 km de distância, o som ouvido seria suficiente para tornar alguém surdo. As ondas de choque provenientes da erupção viajaram ao redor do globo 7 vezes antes de dissipar. Dado isso, responda: considerando $c = 340$ m/s, quanto tempo esse “som” demorou para dar essas 7 voltas no globo terrestre?



AULA 46

SOM: DIFRAÇÃO, REFRAÇÃO E CORDAS VIBRANTES



a aula passada, falamos de reflexão e interferência. Nesta aula, falaremos **brevemente** dos fenômenos de refração e difração do som, passando depois ao estudo das fontes sonoras – nesta aula, especificamente, falaremos das cordas vibrantes, que dão origem ao som de vários instrumentos musicais, como a harpa, o violão, o violino e o próprio piano, cujo som vem da batida que um martelo dá em um conjunto de cordas.

A **refração** do som ocorre quando uma onda sonora, produzida em um meio específico, entra em outro meio. Neste outro meio, a velocidade do som pode ser diferente – neste caso, temos uma mudança no **comprimento de onda** do som, mas sem mudança na frequência.

Por exemplo, imagine que alguma pessoa esteja ouvindo música alta. A frequência dominante dessa música é de **340 Hz**. Portanto, o comprimento de onda será $\lambda = c/f$, onde c é a velocidade do som. Qual é o valor do comprimento de onda? Se uma pessoa entrar na água, local no qual a velocidade do som é de **1.600 m/s**, qual será o comprimento de onda do som que nela chega?

Resolução: Sabemos que a frequência não se altera, pois a frequência é justamente determinada pelo intervalo de tempo gasto entre dois picos de alta ou baixa pressão do ar.

A frequência, no caso, é de 400 Hz. No ar, isso equivale ao seguinte comprimento de onda:

$$\lambda_{ar} = \frac{c}{f} = \frac{340}{340} = 1 \text{ m}$$

Na água, teremos uma velocidade maior, o que corresponderá a um comprimento de onda maior para a mesma frequência:

$$\lambda_{água} = \frac{c}{f} = \frac{1600}{340} = 4,7 \text{ m}$$

Já no caso da **difração**, temos um tipo específico de interferência, que ocorre quando temos um obstáculo ou uma rede de obstáculos cujo tamanho é comparável com o comprimento de onda do som. No ar, a velocidade do som é de cerca de 340 m/s. Podemos ouvir sons de 20 Hz até 20 kHz. Isso equivale aos seguintes comprimentos de onda:

$$\lambda_{Max} = \frac{c}{f_{Min}} = \frac{340}{20} = 17 \text{ m}$$

$$\lambda_{Min} = \frac{c}{f_{Max}} = \frac{340}{20000} = 0,017 \text{ m} = 1,7 \text{ cm}$$

Deste modo, é com objetos de tamanho entre 1,7 cm e 17 m que podemos observar a difração. Essa característica tem a ver com a capacidade do som de contornar obstáculos. Isso permite que uma pessoa ouça o que ocorre dentro de uma casa fechada, por exemplo – o som passa por debaixo das portas e pelas fendas da casa, e faz isso em virtude de propriedades estritamente ondulatórias.

Entendido isso, passemos às fontes sonoras, começando pelas **cordas vibrantes**.



Alguns instrumentos de corda

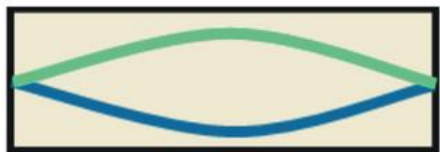
A vibração de uma corda é um dos principais meios pelos quais instrumentos musicais produzem sons. Entendamos como isso ocorre, considerando uma corda de massa m , comprimento L e, portanto, densidade linear (razão entre massa e comprimento) $\mu = m/L$. Essa corda está presa pelas duas pontas, e está esticada, o que se traduz na presença de uma tração T . Pelo o que já foi estudado em ondulatória, sabemos que a velocidade de propagação de um pulso gerado nessa corda será:

$$v = \sqrt{T/\mu}$$

Como o pulso vai e volta, existe a interferência dele com seu reflexo, dando origem a **ondas estacionárias**. Essas ondas estacionárias, que consistem na intercalação de ventres e nós, temos a geração de zonas de compressão e rarefação do ar, o que produz som. Esse som é, em geral, amplificado pela caixa acústica (buraco do violão, por exemplo), que é construída de modo tal que aproveita do melhor modo os diversos fenômenos acústicos (reflexão, difração, interferência) para amplificar em muitas vezes o som produzido pelas cordas. Alguns

instrumentos elétricos, como a guitarra elétrica e o baixo elétrico, amplificam (em conjunto com uma caixa de som) o som de modo elétrico, não mecânico.

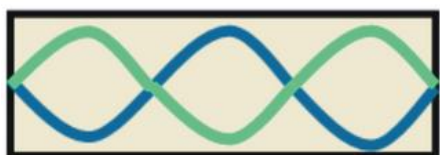
Como as duas extremidades estão presas, as ondas formadas não podem ter qualquer comprimento de onda. Temos (considerando as figuras ao lado), as seguintes possibilidades, respectivamente:



$$\frac{\lambda_1}{2} = L \rightarrow \lambda_1 = 2L$$



$$2 \frac{\lambda_2}{2} = L \rightarrow \lambda_2 = L$$



$$\frac{3\lambda_3}{2} = L \rightarrow \lambda_3 = 2L/3$$



$$\frac{4\lambda_4}{2} = L \rightarrow \lambda_4 = \frac{L}{2}$$

E assim por diante. O que restringe os comprimentos de onda é o fato de que devemos ter nós nas duas pontas – uma ponta presa não vibra. Isso, matematicamente, se traduz em

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}$$

Esses são os chamados **modos normais** de vibração da corda. A matemática por trás dos modos normais tem grande relevância, inclusive, na **mecânica quântica**. Matematicamente, podemos compreender esses modos normais considerando a equação de uma onda estacionária (não há problemas em trocar senos por cossenos e em acrescentar fases – ambas as funções são a mesma coisa a menos de uma fase como argumento!):

$$f(x, t) = 2A \sin(kx + \phi) \sin(\omega t + \varphi)$$

Como precisamos ter nós nas extremidades, temos que $f(x = 0, t) = f(x = L, t) = 0$. Impondo essas condições, temos:

$$f(0, t) = 2A \sin(0 + \phi) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\phi = n\pi = 180^\circ \cdot n$$

E, se impormos a condição de que há um nó em $x = L$, teremos:

$$f(L, t) = 2A \cos(kL + kn\pi) \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$kL + n\pi = m\pi$$

$$k = \frac{n'\pi}{L}$$

Onde n' é um número natural. Como k é o número de onda, definido como $2\pi/\lambda$, temos:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n'\pi}{L} \rightarrow \frac{2}{\lambda} = \frac{n'}{L} \rightarrow \lambda = \frac{2L}{n'}$$

E, trocando n' por n (o nome não importa), chegamos à relação pré-estabelecida. Se trocarmos esse valor de n por números inteiros, obteremos o valor de λ para um ventre, dois ventres, n ventres.

Se formos analisar este sistema em termos de frequência, teremos de trocar $\lambda = v/f$, onde v é a velocidade de propagação do som na corda. A fórmula fica

$$\frac{v}{f} = \frac{2L}{n} \rightarrow f = \frac{v}{2L} n$$

Onde n é número natural não-nulo.

A vibração correspondente a $f_1 = f(n = 1)$ é chamada de **modo fundamental** ou **primeiro harmônico**. De modo análogo, f_2 é o segundo harmônico, f_3 é o terceiro harmônico e, assim, sucessivamente. Essas frequências constituem as chamadas **frequências normais** ou **naturais** de vibração. Quando, por exemplo, tocamos uma corda solta (presa pelas extremidades, evidentemente) do violão, é produzido o modo fundamental e também todos os harmônicos subsequentes, e essa formação é bem característica do instrumento e do material do qual é feita a corda – isso é que define o **timbre** do instrumento, como foi comentado em aulas anteriores.

Como a vibração da corda se dá em um meio no qual existe algum atrito, a vibração vai esmorecendo até parar.

Exemplo: Em uma corda de 1 metro de comprimento, as ondas formadas se propagam com velocidade $v = 100$ m/s. Defina o comprimento de onda e a frequência para os três primeiros modos normais de vibração.

Resolução: Temos $L = 1$ m e $v = 100$ m/s. Os comprimentos de onda dos três primeiros modos serão:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{2L}{n} \\ \lambda_1 &= \frac{2L}{1} = 2L = 2 \text{ m} \\ \lambda_2 &= \frac{2L}{2} = L = 1 \text{ m} \\ \lambda_3 &= \frac{2L}{3} \approx 0,667 \text{ m}\end{aligned}$$

Em termos de frequência, basta dividirmos a velocidade do som por estes comprimentos de onda.

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{340}{2} = 170 \text{ Hz} \\ f_2 &= \frac{340}{1} = 340 \text{ Hz} \\ f_3 &= 340 \cdot \frac{3}{2} = 510 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Assim, percebemos que a frequência fundamental é 170 Hertz, equivalente a um Fá 3 (para ouvir essa nota sem seus harmônicos, em um tom puro, entre no link <https://szynalski.com/tone#173,v0.5>).

ATIVIDADES

1. Considere que a corda do exercício anterior estava presa pelas extremidades em um violão. Se nós pressionarmos o meio da corda e a tocarmos, apenas metade dela irá vibrar, o que exige a formação de um nó no meio. O comprimento “equivalente” da corda vibrante será, portanto, diminuído pela metade.

- Qual será a frequência fundamental e seus dois primeiros harmônicos?
- Essa frequência é maior ou menor do que aquela obtida tocando uma corda solta?

2. A frequência fundamental do som emitido por uma corda vibrante é dada pela expressão:

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Onde T é a tração, μ é a densidade linear e L é o comprimento da corda. Uma corda de 0,50 m com densidade linear 10^{-2} kg/m está submetida a uma tração de 100 Newtons.

- Calcule a frequência fundamental do som emitido pela corda.
- O que se deve fazer com essa corda para dobrar a frequência do som fundamental?

3. Uma onda estacionária de frequência igual a 24 Hz é estabelecida sobre uma corda vibrante fixada nos extremos. Sabendo-se que a frequência imediatamente superior à essa, que pode ser estabelecida na mesma corda, é de 30 Hz, qual é a frequência fundamental da corda?



AULA 52

LUZ COMO RAIO

Em grande parte das aplicações práticas nas quais desejamos estudar o comportamento da luz, é conveniente usar uma aproximação que trata a luz não como uma onda, mas como um **raio**. Podemos usar essa aproximação quando os objetos que estamos levando em consideração são muito maiores do que o comprimento de onda da luz – ora, se estamos falando de ondas de rádio, quase nunca poderemos aproximá-las para um raio, porque o seu comprimento de onda possui dimensões macroscópicas – por outro lado, se estivermos falando de ondas infravermelhas, visíveis ou ainda mais energéticas, teremos comprimentos de onda muito menores do que aqueles relativos às escalas de comprimento características de nosso dia a dia.

É importante notar que, quando aproximamos a onda por um raio, onde cada “ponto” do raio corresponde a uma frente de onda, alguns fenômenos se tornam inexplicáveis, como interferência e difração. É notável que esses fenômenos ocorrem justamente quando os objetos envolvidos, que interagem com a onda, possuem algum comprimento característico, relevante para o problema, de tamanho parecido com o comprimento de onda da luz.

Vejamos, então, os pressupostos da óptica geométrica.

O conceito primordial é o conceito de **raio**. Chamamos de **raio de luz** linhas orientadas (ou seja, que possuem direção e sentido bem definidos) que têm direção e sentido coincidentes com a direção e o sentido da propagação da luz. O conjunto de diversos raios de luz é denominado **feixe de luz**.

Falemos, portanto, da velocidade da luz, e depois analisemos o seu comportamento quando estamos considerando-a como um raio. Sigamos!

A velocidade de propagação de um raio de luz é a velocidade mesma da luz: $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Essa velocidade, inclusive, é utilizada para denotar algumas medidas de comprimento, quando as distâncias são excessivamente altas. Por exemplo: a distância Terra-Lua é de 380.000 quilômetros, em média. É uma distância grande, mas ainda compreensível e relativamente tranquila de se escrever. Se falarmos a respeito da distância Terra-Sol, o número cresce para 150.000.000 de quilômetros. Se falarmos a respeito da distância Terra-Netuno, o mais distante planeta do Sol, a distância é de aproximadamente $5 \cdot 10^9$ quilômetros. Em escalas astronômicas usuais, a unidade “quilômetro” se torna desajeitada, assim como é desajeitado usar “milímetros” para se medir distâncias entre cidades.

Quando estamos falando de distâncias astronômicas dentro do Sistema Solar, a mais comum é a **unidade astronômica**, cuja sigla é AU. Essa unidade astronômica mede $1,5 \cdot 10^8$

Planeta	Distância Planeta – Sol
Mercúrio	0,39 AU
Vênus	0,72 AU
Terra	1 AU (por definição)
Marte	1,52 AU
Jupiter	5,2 AU
Saturno	9,5 AU
Urano	19,2 AU
Netuno	30,1 AU

km, exatamente a distância entre a Terra e o Sol. Com base nessa distância, é possível reescrever a distância entre o Sol e os planetas do Sistema Solar usando agora números mais confortáveis, como podemos ver na tabela ao lado

Um outro modo de se criar unidades de medida é ver a distância que a luz no vácuo percorre dada uma quantidade de tempo. Sabemos que a velocidade da luz é $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ou $c = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$. Deste modo, em um mísero segundo a luz percorre mais ou menos 300.000 quilômetros. Podemos chamar essa unidade de **segundo-luz**.

$$1 \text{ segundo-luz} = 300 \ 000 \text{ quilômetros}$$

Usando essa mesma lógica, podemos criar outras unidades de comprimento, como minutos-luz, hora-luz, dias-luz, semanas-luz e anos-luz. Para isso, basta notarmos que 1 minuto tem 60 segundos, 1 hora tem 60 minutos, um dia tem 24 horas, uma semana tem sete dias e um ano tem 365 dias.

$$1 \text{ minuto-luz} = 300.000 \cdot 60 = 18.000.000 \text{ quilômetros}$$

$$1 \text{ hora-luz} = 18.000.000 \cdot 60 = 1.080.000.000 \text{ quilômetros} = 7,2 \text{ AU}$$

$$1 \text{ dia-luz} = 1.080.000.000 \cdot 24 = 25.920.000.000 \text{ quilômetros} = 172,8 \text{ AU}$$

$$1 \text{ semana-luz} = 2,592 \cdot 10^{10} \cdot 7 = 1,8144 \cdot 10^{11} \text{ quilômetros} = 1209,6 \text{ AU}$$

$$1 \text{ ano-luz} = 2,592 \cdot 10^{10} \cdot 365 = 9,4608 \cdot 10^{12} \text{ quilômetros} = 63 \ 072 \text{ AU}$$

Quando falamos de objetos externos ao Sistema Solar, é conveniente usarmos anos-luz para medir a distância até nós. Para se ter ideia, a estrela mais próxima da Terra com exceção do Sol é a **Próxima Centauri**, que se encontra a 4,2 anos-luz daqui.

Exemplo: Calcule a distância, em quilômetros, da Próxima Centauri.

Resolução: Para calcularmos essa distância em quilômetros, devemos multiplicar 4,2 por 1 ano-luz escrito em quilômetros.

$$d = 4,2 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 3,97 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

Quase 40 trilhões de quilômetros!



*Próxima Centauri
fotografada por 2MASS".
Atlas Image cortesia de
2MASS/UMass/IPAC-
Caltech/NASA/NSF."*

Agora, voltemos ao tratamento dos raios de luz propriamente ditos.

A luz se comporta diferentemente dependendo do meio em que ela se propaga. Existem objetos **transparentes**, através do qual podemos enxergar o que está atrás dele. Existem

objetos **translúcidos**, que borram a imagem atrás deles, sem, entretanto, invisibilizá-los por completo. Existem, por fim, os objetos **opacos**, que escondem os objetos que se encontram atrás deles. A classificação de um objeto é opaco, translúcido ou transparente dependendo da trajetória dos **raios de luz** por este objeto – se o feixe de luz passar de modo regular pelo objeto, sem que os raios entortem um com relação ao outro, o objeto é transparente. Se os raios do feixe se embolarem dentro do objeto, se propagando de modo irregular, a imagem será distorcida e o objeto será translúcido. Se os raios forem simplesmente refletidos, sem atravessar o objeto, este será opaco.



Três tipos de cristal. O primeiro é transparente (cristal de quartzo). O segundo é translúcido (cristal de brookita). O terceiro é opaco (cristal de galena).

PODEMOS SEPARAR

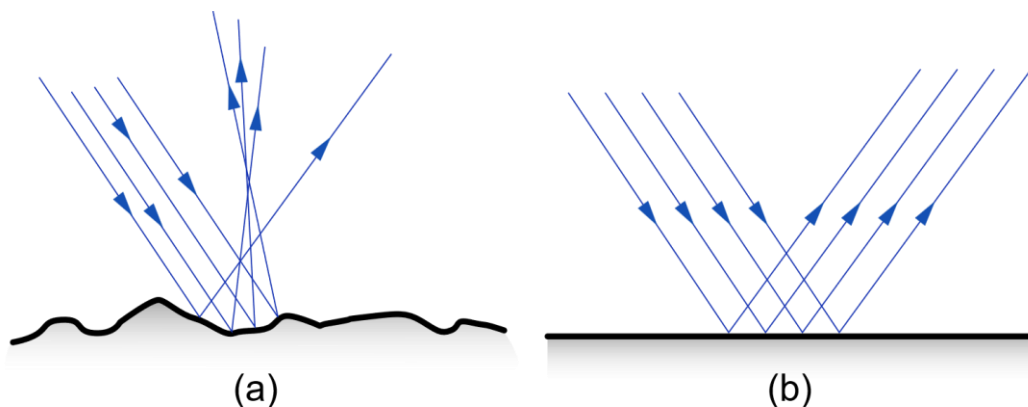
Os raios estão sujeitos a uma coleção de fenômenos que alteram seu estado de movimento, chamados de **fenômenos ópticos**. O tipo de fenômeno óptico depende de dois fatores: da natureza do meio e do comprimento de onda da luz incidente (é curioso falar de comprimento de onda quando estamos falando de raios, mas é que eles entram, nesse caso, como um dado *a priori*: podemos tratar a luz visível que vem do Sol como um raio, assim como os raios UVC emitidos por ele, mas, para a luz visível, a atmosfera é um meio transparente, enquanto para os raios UVC, a atmosfera é um meio opaco (tais raios são refletidos pela camada de ozônio).

Considerando feixes de luz constituídos por raios paralelos, podemos listar os seguintes fenômenos ópticos:

Reflexão regular: O feixe, que está se propagando no meio A, incide no meio B e é refletido de volta para o meio A. Cada raio mantém o paralelismo com os demais. Isso é o que acontece, por exemplo, quando a luz incide em um metal ou em um espelho de vidro preparado para este uso.

Reflexão difusa: O feixe que está se propagando no meio A incide no meio B e os raios deixam de ser paralelos entre si, espalhando para todos os lados. Ora, vimos na aula anterior que a cor dos objetos é justamente, considerando uma síntese aditiva, a soma das

cores relativas a todos os comprimentos de onda refletidos pelo objeto. Assim, vemos o objeto tal como ele “é”, não nosso reflexo, como acontece em um espelho.



Reflexão difusa (a) e reflexão regular (b)

Refração: O feixe passa do meio A para o meio B e começa a se propagar nesse outro meio. O ângulo dos raios com o plano de incidência pode mudar. Se eles mudaram sem perderem o paralelismo, trata-se de refração regular. Senão, se trata de refração difusa. O fato de conseguirmos ver através de um copo mostra que ali os raios de luz sofrem refração regular. Se o objeto for translúcido, ou seja, a luz que o atravessa perde o paralelismo – trata-se de refração difusa.

Absorção: O feixe passa do meio A para o meio B. O meio B “devora” os raios de luz. Como esta traz energia, isso redundará em um aquecimento do meio B.

Note que a cor de um objeto dependerá da conjunção entre o que é absorvido e o que é refletido por este corpo. Um objeto vermelho, por exemplo, é um objeto que absorve todas as frequências da luz visível, menos aquela relativa à luz vermelha. Ora, se eu incidir nela luz azul, por exemplo, não haverá reflexão alguma, pois azul é algo que o objeto absorve. Deste modo, se esse objeto for observado exclusivamente sob luz azul, ele se apresentará **negro**, que é quando o objeto não está refletindo nada e absorvendo tudo. Se, por outro lado, o objeto reflete todos os comprimentos de onda difusamente, nós o vemos branco. Se a reflexão for regular, veremos o reflexo do que está na frente deste espelho.

Com isso, passemos a alguns exercícios.

ATIVIDADES

1. As cores primárias (cor luz) são o vermelho, o verde e o azul. Imagine que tenhamos um disco que se apresenta a nós como azul ao ser colocado sob luz branca. De que cor nós o veremos se incidirmos sobre ele

- Um feixe verde?
- Um feixe vermelho?
- Um feixe magenta (ver síntese aditiva na aula anterior)?

2. Seja a bandeira nacional. Se ela for iluminada com luz verde, nós veremos cada parte dela de que cor? Justifique sua resposta.



3. Quando passamos na frente de um metal não polido, nós o vemos cinza claro. Se ele for polido, nós veremos nosso próprio reflexo. Quais são os tipos de fenômenos ópticos envolvidos no primeiro e no segundo caso?



AULA 56

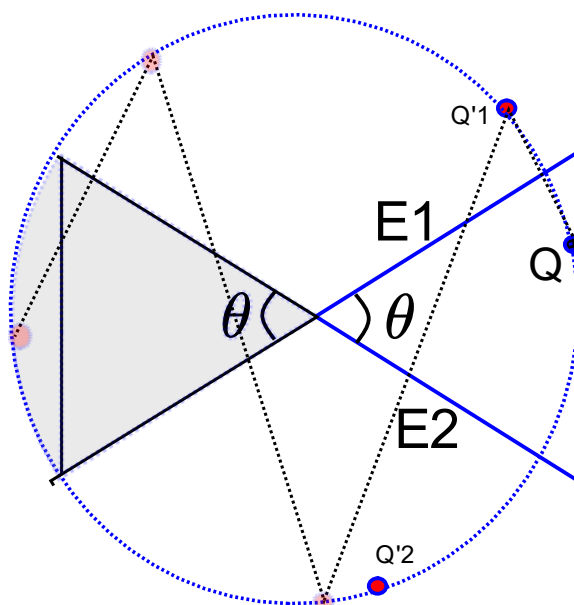
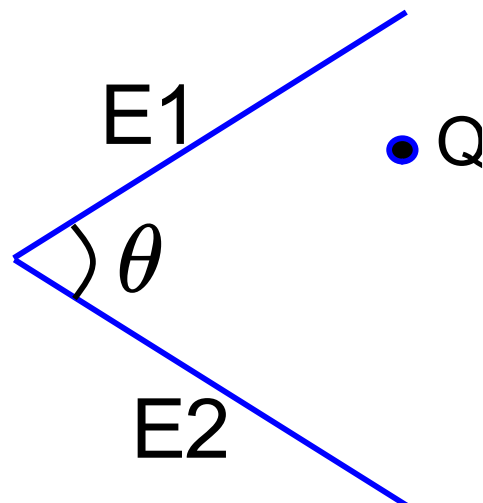
ESPELHOS PLANOS II



gora que estudamos os conceitos básicos a respeito dos espelhos planos, analisemos alguns casos particulares envolvendo-os. Primeiro, falaremos a respeito da imagem formada entre **dois** espelhos, assim como o comportamento objeto – imagem diante do movimento translacional ou rotacional do espelho.

Começemos, então, com a formação das imagens entre dois espelhos planos. Considere um ponto Q que se encontra entre dois espelhos cujos planos possuem ângulo θ entre si. Para compreender essa montagem, vejamos a figura ao lado.

A luz que sai de Q irá percorrer um intrincado caminho entre esses dois espelhos. A luz sairá de Q , baterá em E_1 , e seu reflexo irá para E_2 , e o reflexo do reflexo para E_1 de novo, e assim sucessivamente. Isso acontecerá até que os prolongamentos dos raios caiam atrás do espelho, em uma região chamada de região dos ângulos mortos. Essa é a região formada pelo prolongamento dos espelhos para além do ponto no qual eles interceptam, como podemos ver na figura abaixo, em cinza.



O ponto Q terá duas imagens anexas a cada espelho: $Q'1$, anexa ao espelho 1, e $Q'2$, anexa ao espelho dois. Cada uma dessas imagens formará outra imagem no outro espelho. A circunferência especificada no desenho acima expressa a região na qual os raios andarão, “refletindo-se” na superfície interna dessa circunferência. Quando o reflexo do raio cair na região morta, é o fim da reflexão.

A quantidade de imagens formada dependerá do ângulo θ entre os espelhos. A relação geral será:

$$N = \frac{360}{\theta} - 1$$

Exemplo: Quatro pessoas foram colocadas a fazer uma apresentação entre dois espelhos fixos. Com isso, os organizadores da apresentação geraram a ilusão de que havia 32 pessoas no total. Qual é o ângulo θ entre os espelhos?

Resolução: São 32 pessoas. Quatro são reais, logo, 28 são reflexos. Isso significa que cada objeto gerou $\frac{28}{4} = 7$ imagens.

Usemos a fórmula:

$$N = \frac{360}{\theta} - 1 \rightarrow 7 = \frac{360}{\theta} - 1 \rightarrow \frac{360}{\theta} = 8$$

$$\theta = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

Assim, o ângulo entre os espelhos é de 45° .

Um fato notável é que se os espelhos forem paralelos, o ângulo entre eles é nulo. Isso implica que o número de imagens formadas é infinito! Algo parecido com isso pode ser observado em chamadas de vídeo com compartilhamento de tela, onde a pessoa abre o próprio compartilhamento de tela em seu compartilhamento de tela. Isso é chamado, neste caso, de **efeito de espelho infinito**.

Agora, estudemos o que ocorre quando um espelho está executando movimento translacional. Considere um objeto Q fixo, na frente de um espelho. Imagine que o espelho se movimenta, andando d na direção perpendicular ao plano do espelho. Qual será a distância entre a posição inicial da imagem, Q'_1 , e a posição final da imagem, Q'_2 ?

Ora, note que, inicialmente, a imagem Q'_1 está à mesma distância x que separa o espelho do objeto real Q . Quando o espelho anda, o espelho fica a uma distância de Q :

$$x' = x + d$$

A imagem se formará, portanto, $x + d$ adiante do espelho. A distância entre o objeto real e sua imagem ficará:

$$2x' = 2x + 2d$$

Ora, o objeto Q está fixo. A imagem inicialmente estava a uma distância $2x$ dele. Agora, está a uma distância $2x + 2d$. Desse modo, a imagem andou, com essa translação:

$$D = 2d$$

Isso também nos permite dizer que a velocidade da imagem com relação ao objeto fixo é duas vezes maior do que a velocidade com que o espelho se move:

$$v_{img} = 2 \times v_e$$

Exemplo: Um espelho está inicialmente a 2 metros de uma pessoa. Esse espelho está sobre a caçamba de uma caminhonete, que passa a se afastar com velocidade v constante igual a 10 m/s.

- Qual é a velocidade relativa entre o reflexo da pessoa e sua imagem?
- Qual é a distância final, após 10 segundos, entre a imagem formada e a pessoa refletida?

Resolução: Esse problema é uma aplicação direta do que acabamos de estudar. A velocidade relativa a) é, como foi dito, o dobro da velocidade do espelho, isto é:

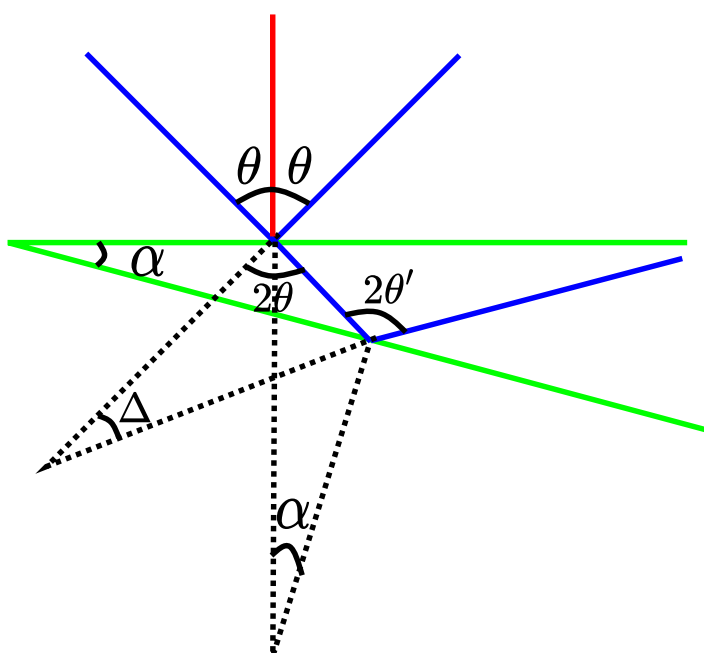
$$v_i = 2 \cdot 10 = 20 \text{ m/s}$$

Já a distância final, pedida em b), pode ser obtida somando-se a distância inicial com o dobro da distância percorrida pelo espelho.

$$x' = 2 + 10 \cdot 2 \cdot 10 = 202 \text{ m}$$

Agora, tomemos o caso no qual um espelho está em rotação. Considere um raio de luz incidente em um espelho plano, paralelo ao eixo x . Se o ângulo de incidência for θ , o ângulo refletido também será θ (com relação ao eixo y). Assim, com relação ao raio incidente, o ângulo do raio refletido será 2θ com relação ao raio incidente.

Agora, considere que o espelho gira α graus no sentido horário. Sua extremidade esquerda forma ângulo de α graus com relação ao eixo x . Assim, o vetor normal ao espelho



também roda α no sentido horário. O ângulo de incidência passa a ser θ' , e portanto, o ângulo entre o raio incidente e o raio refletido passa a ser $2\theta'$. Qual é o ângulo entre o **prolongamento**, ou seja, entre a imagem inicial e a imagem após essa rotação de α ? Para encontrar isso, usemos de trigonometria. Peço atenção redobrada do aluno, pois a descrição não é tão simples.

Analisemos os triângulos pontilhados. No primeiro deles, mais

acima e inclinado para a esquerda, temos dois ângulos “conhecidos”, 2θ e Δ . O terceiro ângulo é suplementar a $2\theta'$.

Já no triângulo de baixo, temos três ângulos conhecidos. O primeiro é θ , pois um lado do triângulo é a bissetriz do ângulo 2θ . O outro é α . E o terceiro? Esse é mais desafiador, mas note que o lado inferior direito deste triângulo, adjacente ao ângulo que desejamos encontrar, age como uma espécie de bissetriz ao ângulo $2\theta'$. Deste modo, é possível gerar um triângulo congruente a ele do lado dele, onde podemos concluir que o ângulo faltante é:

$$180 - 2\theta' + \theta' = 180^\circ - \theta'$$

Assim, teremos no triângulo de cima:

$$2\theta + \Delta + (180 - 2\theta') = 180^\circ$$

E no triângulo de baixo:

$$\alpha + \theta + (180 - \theta') = 180^\circ$$

Assim, teremos as duas equações:

$$2\theta + \Delta - 2\theta' = 0$$

$$\alpha + \theta - \theta' = 0$$

Se multiplicarmos a equação de baixo por 2 e subtrairmos a primeira da segunda, teremos:

$$\Delta - 2\alpha = 0$$

$$\Delta = 2\alpha$$

Assim, chegamos no interessante resultado: **se girarmos o espelho com um ângulo α , a imagem gira 2α , descrevendo um arco de circunferência**. Isso, inclusive, pode ser utilizado para compreender o resultado relativo ao objeto que se encontra entre espelhos com ângulo θ entre si.

Com esse resultado, podemos passar para as atividades.

ATIVIDADES

1. Desejando quebrar aquele malfadado espelho, sempre “distorcendo” a imagem de seu rosto, um homem impulsiona uma marreta em sua direção.

a) Determine a velocidade de aproximação entre objeto (marreta) e sua imagem, sabendo que a velocidade da marreta, relativamente ao espelho plano, é de 3 m/s.

b) Quando, diante de um espelho plano disposto verticalmente, observando nossa imagem, nos afastamos dele, o que devemos esperar quanto ao tamanho da imagem vista? Justifique sua resposta por meio de um esquema que apresente um objeto (próximo e afastado do espelho) e suas respectivas imagens, o espelho plano, o chão e os raios de luz que permitem traçar a imagem do objeto colocado diante do espelho.

2. Dois espelhos têm ângulo de 30° entre si. Entre eles, é colocada uma vela.

a) Quantas imagens serão formadas?

b) Esse número de imagens será formado independentemente da posição em que a vela for colocada? Justifique.

3. Um raio de luz vertical incide em um espelho horizontal. Depois, o espelho gira 30° no sentido horário. Qual será o ângulo entre os raios refletidos antes e depois da rotação?

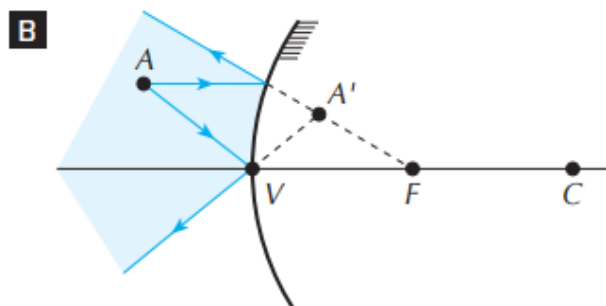
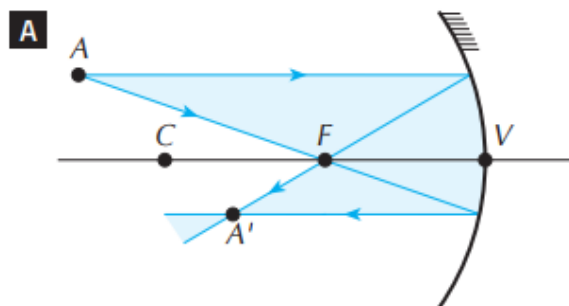


AULA 58

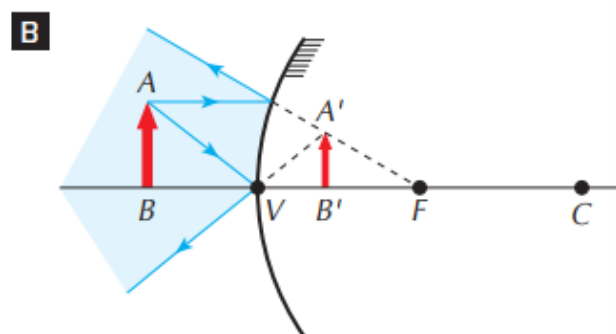
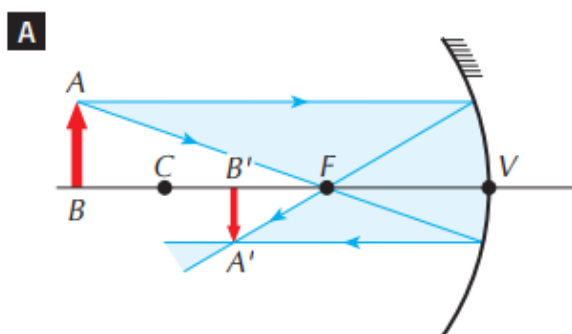
FORMAÇÃO DE IMAGENS



Assim como nos espelhos planos, também podemos trabalhar com os conceitos de “ponto objeto” e “ponto imagem”. Quando for colocado em frente a um espelho esférico (de Gauss) um ponto objeto A , temos que a imagem (ponto-imagem) A' formado é determinado pela intersecção de dois ou mais raios refletidos, provenientes do ponto objeto A .



Podemos usar isso para compreender a formação de imagens relativas a um objeto extenso. Imaginemos um objeto retilíneo $\overline{AB}$, cujo topo se dá em A e cujo final se dá em B . A sua imagem será $\overline{A'B'}$. Consideramos que B se encontra no eixo principal. Desse modo, a imagem $\overline{A'B'}$ é também retilínea e também frontal. B' pertencerá também ao eixo principal.



No caso de espelhos côncavos, a imagem é “real”, pois o reflexo se dá pela intersecção dos raios refletidos. Já nos espelhos convexos, a imagem é “virtual” (se dá “atrás” do espelho), pois é formada pela intersecção dos **prolongamentos** dos raios refletidos na direção “interna” ao espelho.

No caso dos espelhos convexos, a imagem é **direita**, ou seja, ela se dá no mesmo semiplano do objeto AB (se o objeto estiver acima do eixo, a imagem também estará, e vice-

versa). Nos espelhos côncavos, a imagem é invertida – ela começa no mesmo semiplano, mas fica de “ponta-cabeça” no quadrante oposto.

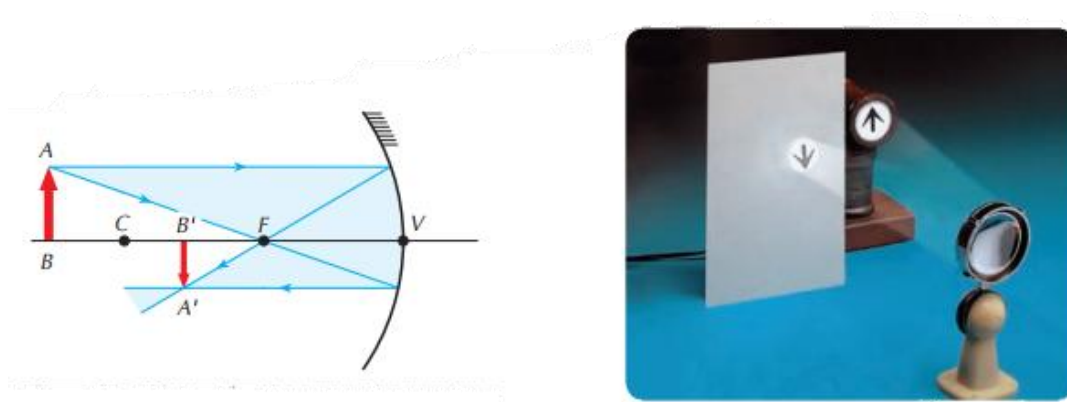
Assim, com base nisso, podemos definir como se dá a formação de imagem nos diversos tipos de espelho de Gauss. Em um espelho convexo, um objeto $\overline{AB}$ gera uma imagem $\overline{A'B'}$ que é sempre **virtual** (a intersecção dos raios refletidos se dá via prolongamento para “dentro” do espelho), **direita** e **menor** do que a original. Isso a faz ser útil em retrovisores de carro, onde é conveniente que um grande campo de visão “caiba” dentro de um pequeno espelho.



A imagem refletida por um retrovisor convexo é menor do que a original. Isso é útil, pois permite que uma região muito maior se torne visível. O lado negativo é que os objetos ali refletidos parecem menores do que são de fato.

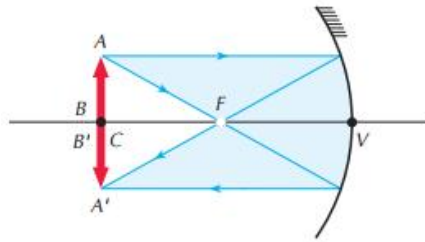
Já um espelho côncavo pode fornecer imagens de diversos tipos (cinco, para ser mais exato). Vejamos quais são elas:

- Se o objeto se encontra **para além do centro de curvatura**, a imagem formada será **real, invertida e menor** que o objeto real.



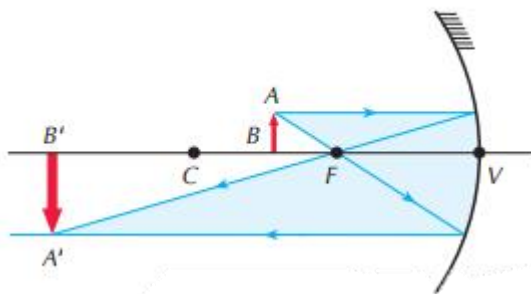
Objeto além do centro de curvatura.

- Se o objeto está **exatamente** sobre o centro de curvatura C , a imagem formada será **real, invertida e de tamanho igual** ao objeto.



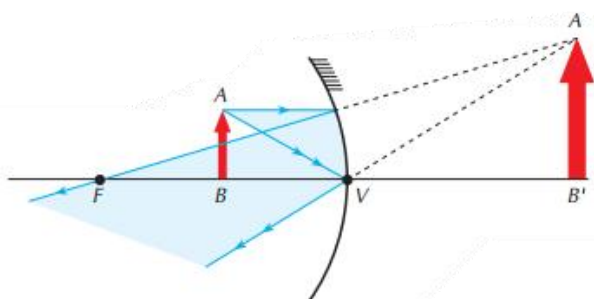
Objeto sobre o centro de curvatura.

- Se o objeto estiver entre o centro de curvatura e o foco, a imagem formada será **real, invertida e maior** que o objeto real.



Objeto entre o centro de curvatura e o foco.

- Se o objeto estiver **em cima** do plano focal, os raios refletidos serão paralelos – nunca interceptarão. A imagem é “imprópria” – não é propriamente a formação de uma imagem, pois os raios nunca irão interceptar! Ao observador, a “imagem” formada parecerá um grande borrão.
- Se o objeto se encontrar entre o foco e o vértice, a imagem formada estará “atrás” do espelho. Assim, ela será **virtual, direta e maior** que o objeto real.



Objeto entre o foco e o vértice.

Assim, esgotamos as cinco possibilidades para imagens provenientes de reflexões em espelhos côncavos. O vídeo abaixo, presente na plataforma Youtube, permite que vejamos



todas as cinco situações em um mesmo contexto – o de um pêndulo (cujo ponto de equilíbrio coincide com o plano focal) que oscila na frente do espelho. O vídeo pode ser acessado por meio do seguinte link.

<https://www.youtube.com/watch?v=3e-LZPHBA2M>

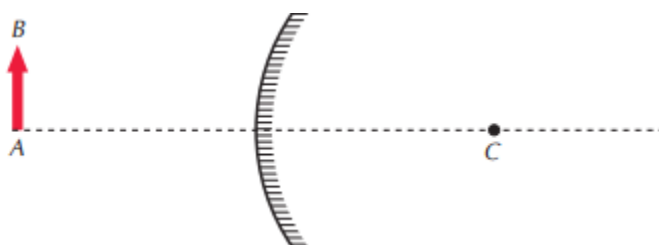
ATIVIDADES

1. Um objeto retilíneo $\overline{AB}$ e sua imagem $\overline{A'B'}$ estão mostrados na figura abaixo. O plano ab representa o eixo principal.



- Esse espelho é plano, convexo ou côncavo?
- Esquematize o espelho, mostrando seu foco e o seu centro de curvatura (caso não seja plano).

2. Usando **apenas** dois raios notáveis, determine graficamente a imagem do objeto $\overline{AB}$ formada pelo espelho convexo esférico de centro de curvatura C



3. Um objeto retilíneo, situado sobre o plano focal de um espelho côncavo de raio R de curvatura, se situava a uma distância d desse espelho. Esse objeto foi aproximado do espelho, de modo a reduzir a distância para $d/2$. Quando isso ocorreu, o objeto se tornou do mesmo tamanho que a imagem. Qual é o valor da distância d como função de R ?



AULA 64

HISTÓRIA E FUNCIONAMENTO DE INSTRUMENTOS ÓPTICOS



mbora seja chamada de “idade das Trevas” pelos historiadores modernos (cuja base teórica é iluminista ou pós-iluminista), foi na Idade Média que muitos dos inventos mais importantes para nosso bem-estar físico surgiram. É evidente que esse fato é secundário se comparado ao quanto o Medievo foi grande no sentido religioso e político.

Evidentemente não se tratava de um Céu na Terra, já que o pecado do homem sempre gera espinhos e frutos venenosos no meio da roça de trigo. Entretanto, na história humana, nunca houve uma sociedade que ordenou de modo tão perfeito a ordem temporal e a ordem espiritual – tudo estava ordenado a Cristo Jesus e à Sua Igreja.



Roberto Grosseteste, bispo de Lincoln

Um desses inventos foi o **óculos de grau**. O antigo matemático e astrônomo Ptolomeu de Alexandria (100-170) descreveu, em seu tratado de Óptica, o uso de lentes para ampliação. Alguns estudiosos islâmicos, já no século XI, desenvolveram e aprofundaram essas descrições. Roberto Grosseteste, bispo de Lincoln (1168–1253), é considerado por muitos o “inventor” do método científico moderno, que consiste em generalizar leis (matemáticas) gerais olhando para experimentos particulares para depois testar essas mesmas leis em outros experimentos, para ver se ela é capaz de prever os resultados que seguirão.

Ele também foi um dos primeiros a usar experimentos em condições controladas para tentar compreender o “como” das coisas. Ele foi também, de algum modo, precursor (no século XIII!) das leis de conservação e sua descrição lembra bastante a evolução de um universo predominantemente radiativo para um universo predominantemente composto de matéria! Alguns desses experimentos foram na área de óptica – seu trabalho, continuado por Roger Bacon - permitia que se observassem objetos muito distantes como se perto estivessem, e objetos muito próximos como se distantes estivessem.

O primeiro “óculos de grau” propriamente dito foi citado pelo teólogo dominicano Giordano de Pisa (1255–1311) e, possivelmente, inventado por outro frade contemporâneo: Alessandro della Spina (- 1313). Já no século posterior, devido também à influência do Cardeal

(não muito ortodoxo) Nicolau de Cusa (1401–1464), já existiam óculos específicos para míopes, hipermetropes e astigmatas.

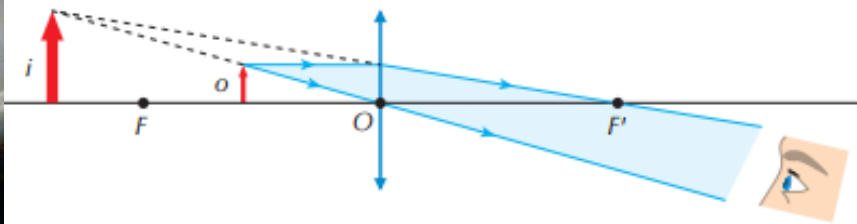


Beato Giordano de Pisa

Os microscópios e telescópios têm origem mais recente, datando do século XVII. O provável inventor dos primeiros telescópios e microscópios foi um construtor de óculos chamado Hans Lipperhey, na Holanda. Essas máquinas consistem na associação de lentes com o propósito de gerar uma imagem **final virtual** que aumente algo muito pequeno ou muito distante.

Passemos, então, aos detalhes concernentes a essas máquinas, falando da lupa, da luneta e do microscópio. Em apostilas subsequentes, falaremos dos telescópios, binóculos, máquinas fotográficas, projetores e do olho humano, para assim encerrarmos nossos sumários estudos de óptica geométrica.

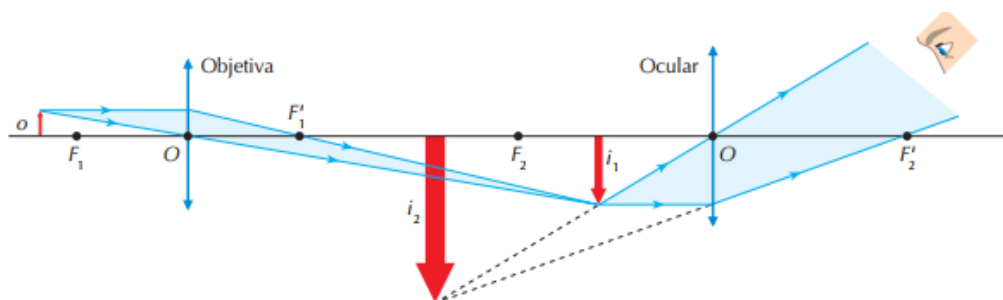
O primeiro dos objetos ópticos que estudaremos é a **lupa**, também conhecida como **lente de aumento**. A luz proveniente de um objeto real passa por essa lente e forma, na nossa vista, uma imagem virtual direita e maior do que a original.



Caneta observada via lupa. Formação de imagem na lupa.

A lupa aumenta em algumas vezes o tamanho do objeto, mas esse aumento é limitado a algumas vezes (as melhores lupas têm aumento de algumas dezenas de vezes) porque esse aumento é condicionado à curvatura do vidro. Para contornar isso, foi inventado o **microscópio composto**, que consiste em duas lentes convergentes e coaxiais (ou seja, com mesmo eixo). A lente próxima do objeto é chamada **objetiva**, enquanto a lente que fica perto do nosso olho (quando estamos observando o objeto) é denominada **ocular**.

A imagem abaixo expressa a trajetória dos raios luminosos que saem do pequeno objeto, passam pela objetiva e saem pela ocular.



Trajetória dos raios de luz em um microscópio.

Podemos descrever o trajeto da luz do seguinte modo: a luz sai do pequeno objeto e incide na lente objetiva (que é aquela que está próxima do objeto). O objeto está um pouco além do foco principal F_1 (cuja distância focal é da ordem de alguns milímetros). Assim, a imagem formada (denotada por i_1) é **real, invertida e maior** do que o objeto real. Essa imagem real é real (no sentido em que ela pode ser observada por outra lente) e emite luz que passa pela ocular (cuja distância focal é um pouco maior do que a da objetiva, sendo da ordem de alguns centímetros).

Essa lente aumenta a imagem i_1 , dando origem a uma imagem i_2 virtual, invertida e maior do que o objeto. Note que ela é invertida com relação ao **objeto original**, mas direita com relação ao seu objeto de fato, que é a imagem i_1 formada pela objetiva.



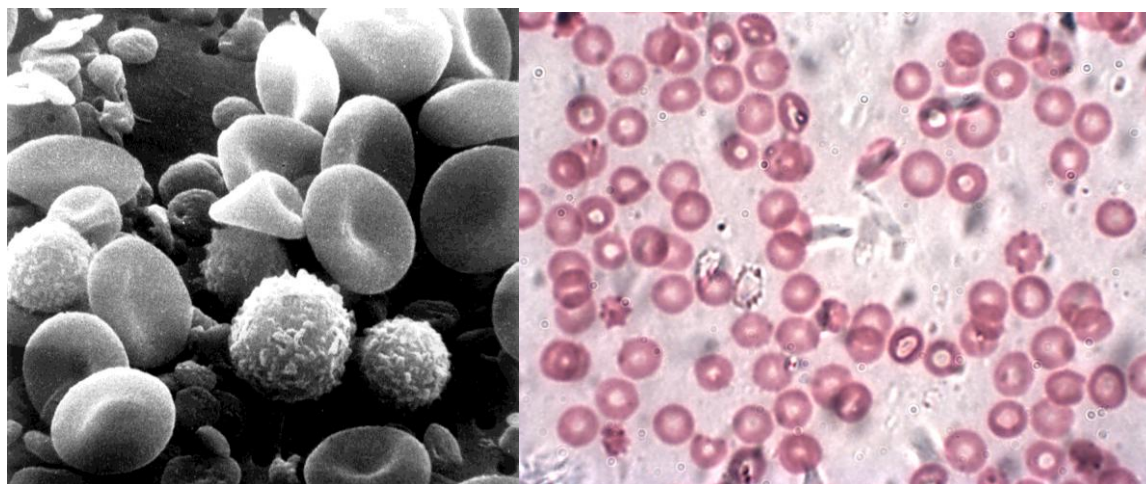
Microscópio óptico.

O aumento do microscópio é o produto do aumento produzido por cada lente. Assim:

$$A = A_{\text{objetiva}} \cdot A_{\text{ocular}}$$

Os melhores microscópios podem produzir ampliações de até $1000\times$. Não fosse a natureza ondulatória da luz, até seria possível obter ampliações maiores, mas um aumento de $1000\times$ coloca-nos em ordens de comprimento comparáveis ao comprimento de onda da luz.

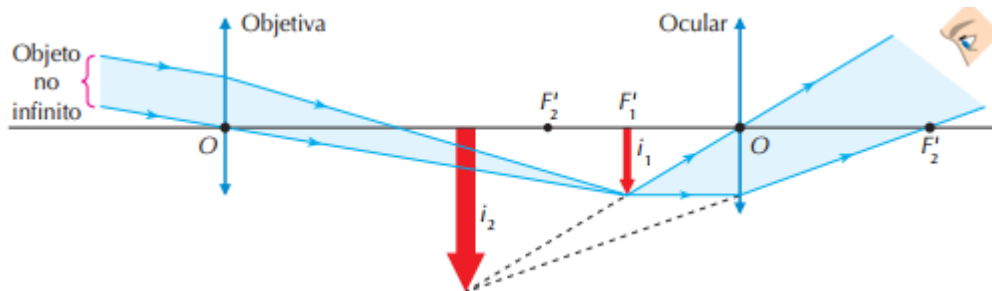
Neste caso, saímos do domínio da óptica geométrica e não enxergaremos nada. Isso foi resolvido utilizando ondas eletromagnéticas mais poderosas (de comprimento de onda mais curto) como fonte de “luz”. Evidentemente, o resultado é não-visível, de modo que é preciso “traduzir” a imagem obtida para algo que possamos enxergar. São os chamados **microscópios eletrônicos**, que usam a peculiar natureza ondulatória dos elétrons para obter ampliações de quase 1×10^6 .



Células sanguíneas sob microscópio eletrônico (esquerda) e microscópio óptico (direita). A imagem do microscópio eletrônico está ainda muito aquém das capacidades deste aparelho,

enquanto a do microscópio óptico corresponde a um aumento de 1000x, próximo ao limite obtível.

Já a **luneta astronômica** é utilizada não para ver pequenos objetos próximos, mas grandes objetos que parecem pequenos porque estão distantes. Ela também consiste na união de uma **lente objetiva** com uma **lente ocular**. A distância focal da lente objetiva é da ordem de alguns metros, sendo muito maior do que a de um microscópio. Vejamos, na figura abaixo, o trajeto percorrido pelos raios a partir do objeto até o olho humano, passando pelas lentes.



O objeto está muito distante, de modo que os raios que dele saem chegam à lente paralelamente. A imagem passa pela lente objetiva e é formada invertida, estando justamente no **plano focal imagem** (por definição, o ponto focal imagem é aquele no qual convergem todos os raios que chegam paralelos na lente). Essa imagem i_1 é real, e serve de matéria prima para uma segunda ampliação devida à ocular, formando a imagem final i_2 .

Como estamos falando de objetos distantes, não falamos de “tamanho”, mas de “diâmetro angular” do objeto observado. O telescópio amplia esse diâmetro angular, esse ângulo. Como se trata de ângulos pequenos, vale:

$$\theta \approx \tan \theta$$

E assim, o aumento angular fica:

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan \theta'}{\tan \theta}$$

Em geral, esse valor G é igual à razão entre a distância focal da objetiva e a distância focal da ocular.

$$G = \frac{f_1}{f_2}$$

Devido ao tamanho da aula, encerraremos o assunto por aqui. Passemos para as atividades.

ATIVIDADES

1. Um microscópio composto tem uma objetiva cuja distância focal é de 5 mm. A distância focal da ocular é de 25 mm. Um objeto é colocado a 7 mm do centro óptico da objetiva. A imagem se forma a 270 mm da ocular. Sendo assim, defina:

- O aumento linear produzido pelo microscópio.
- A distância entre a objetiva e a ocular.

2. A distância entre a objetiva e a ocular de uma luneta doméstica astronômica é de 120 cm. A imagem do astro observado é formada a 20 cm da ocular. Se a distância focal da objetiva for 105 cm, qual é a distância focal da ocular?

3. Galileu não foi o inventor da luneta, mas ele a utilizou de um modo ainda não utilizado. Que modo foi esse? Que implicações isso teve na história humana? Qual foi seu erro no trato com a Santa Igreja? Redija um pequeno texto a esse respeito.



AULA 65

LUNETAS TERRESTRES, TELESCÓPIOS, CÂMERAS E PROJETORES

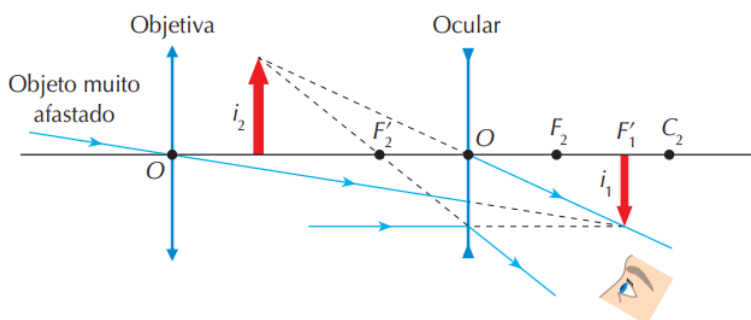


Para encerrar nossos estudos de óptica, falaremos brevemente a respeito do funcionamento de diversos outros instrumentos ópticos, objetivando mais a compreensão teórica e matemática do que as aplicações de cada objeto em específico.

LUNETAS TERRESTRE

A luneta terrestre é muito semelhante à luneta astronômica, estudada na apostila anterior. Ela tem a vantagem de não inverter a imagem observada como ocorre no caso da luneta astronômica. Entretanto, sua definição é menor, pois a imagem sofre muitas aberrações (alterações na cor e no formato). Ela foi inventada antes da luneta astronômica – seu criador foi provavelmente o oculista Hans Lippershey (1570 – 1619). Galileu Galilei (1564 – 1642) usou tal invenção para observar o céu, descobrindo as luas de Júpiter e buscando extrapolar aquilo que viu como justificativa para a teoria de que a Terra girava em torno do Sol (usando, inclusive, de ofensas contra o Papa e seus partidários em suas argumentações). Embora tal teoria seja verdadeira sob certo ponto de vista, a observação de que havia luas girando ao redor de Júpiter não prova nada a respeito da Terra e de seus movimentos, de modo que o Tribunal do Santo Ofício não foi injusto ao condená-lo à prisão domiciliar.

A luneta de Galileu é um instrumento terrestre que usa uma lente divergente de curta distância focal como ocular. A imagem i_1 , formada pela objetiva, está localizada no plano focal da imagem, uma vez que o objeto observado está muito distante. A lente divergente é posicionada entre a objetiva e a imagem i_1 sendo essa última um objeto virtual para a lente divergente, situando-se entre



Caminho óptico em uma luneta terrestre

o foco principal F_2 e o ponto antiprincipal C_2 dessa lente. A imagem final i_2 aparece na mesma orientação do objeto observado.

O binóculo é muito semelhante, sendo constituído por duas lunetas astronômicas (duas lentes convergentes). Para fazer com que a imagem fique direita, não invertida, é colocado no binóculo um prisma de Porro, que endireita a imagem.

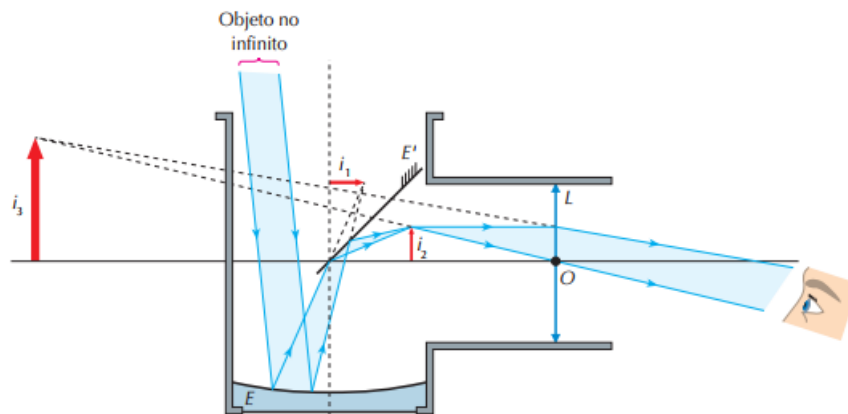


As lunetas utilizadas por Galileu no século XVII

TELESCÓPIO REFLETOR

A luneta é um tipo de telescópio – um telescópio **refrator**. No caso dos chamados **telescópios refletores**, temos a substituição da lente objetiva por um espelho côncavo (esférica ou parabólico). As aberrações presentes nesses telescópios são muito menores, de modo que os grandes telescópios utilizados para observação celeste hoje em dia se enquadram todos nessa categoria. Além disso, pode-se obter, no caso desse tipo de telescópio, ampliações muito maiores para um dado comprimento de tubo – as lunetas podem se tornar desconfortavelmente longas se for delas exigida uma ampliação muito grande. Os telescópios refletores foram inventados por Isaac Newton (1642 – 1727).

Nesse tipo de telescópio, a imagem i_1 real e invertida fornecida pelo espelho E , se situa no plano focal deste mesmo espelho. Essa imagem serve como imagem virtual para um espelhinho plano E' , que gera uma imagem real i_2 . Essa imagem i_2 é objeto para a ocular L , formando a imagem final i_3 observada.



Caminho óptico em um telescópio refletor



Réplica do telescópio refletor inventado por Newton.

CÂMERA

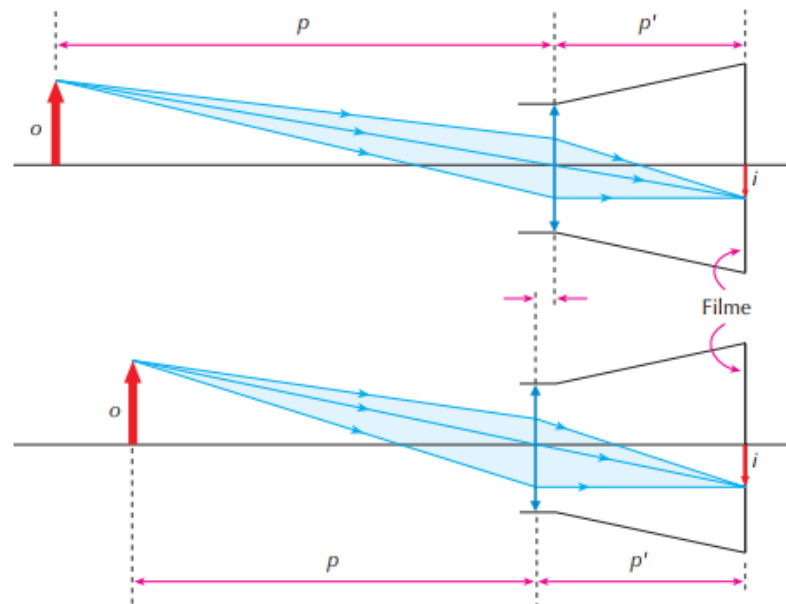
A câmera fotográfica é constituída (contando apenas os aspectos ópticos fundamentais) por uma câmera escura com lente (a lente objetiva, relativa ao objeto) e pelo filme, que fica na parede oposta à objetiva, se estendendo perpendicularmente ao eixo óptico dessa lente.

A luz proveniente do objeto passa pela lente objetiva, que é convergente. Essa luz converge no filme, que é “queimado” pela luz – isso dá origem a uma imagem real e invertida (o famoso negativo fotográfico).

As imagens a seguir expressam o mecanismo de focalização: se um objeto O se aproxima, sua imagem se afasta da lente, formando-se no lugar errado. Assim, precisamos afastar a lente do filme para que a imagem se forme no lugar certo – pensemos em:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Com f fixo.

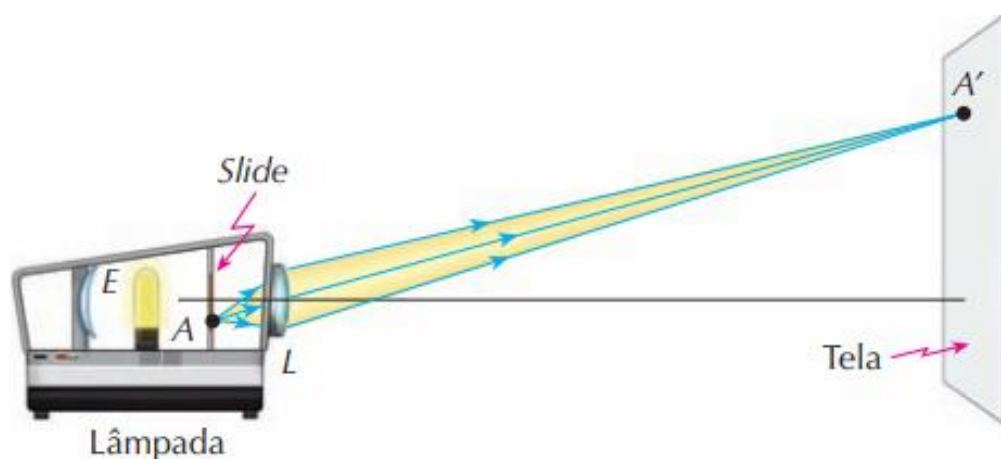


Caminho óptico em uma câmera e a mudança de foco na fotografia

Nas câmeras digitais, o filme é trocado por um sensor com pequenas células sensíveis à luz, que geram sinais elétricos dependendo da quantidade de luz recebida e de sua “cor”, de seu comprimento de onda. Esses sinais elétricos são transformados em sinais digitais, matéria-prima de uma imagem virtual guardada em cartões de memória. Essa imagem pode ser vista na própria câmera do aparelho. A imagem gerada é formada por uma vasta quantidade de pontinhos de cor fixa – os *pixels*. Quanto maior a quantidade deles, melhor é a definição da imagem. Essa é uma flagrante vantagem da tecnologia antiga: a definição das boas fotos analógicas é muito melhor do que aquela tirada por uma boa câmera digital.

PROJETOR

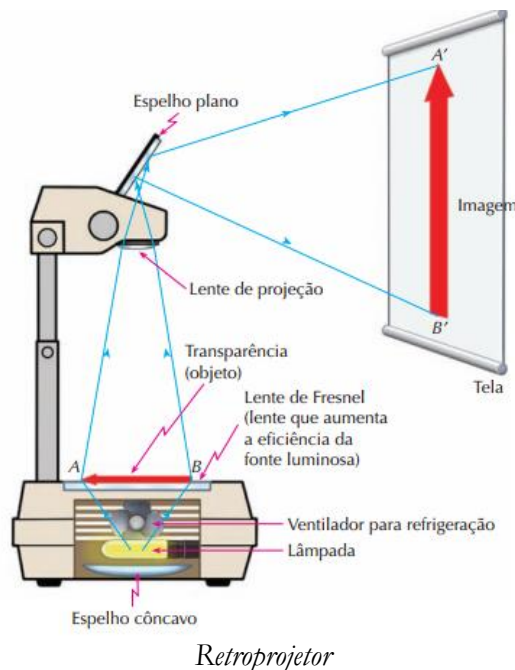
Os projetores são máquinas cuja finalidade é (o nome já diz) projetar uma versão aumentada de um determinado objeto bem iluminado. Os modernos projetores ampliam pequenas imagens provenientes de computadores, enquanto os antigos retroprojetores utilizavam as chamadas “transparências” – folhas transparentes nas quais constavam desenhos e imagens atravessados pela luz.



Caminho óptico em um projetor

Na imagem acima, vemos o *slide* iluminado por uma lâmpada. Atrás da lâmpada, existe um espelho côncavo, que aumenta a intensidade da luz que chega no objeto e diminui a perda luminosa (em função desse espelho, a luz que iria embora acaba sendo refletida na direção do objeto, do slide iluminado). A luz então atravessa o slide e passa por uma lente convergente, que dá origem a uma imagem real, invertida e maior.

Em um **retroprojektor** (que é uma tecnologia mais antiga), a transparência é colocada entre o foco-objeto e o ponto antiprincipal, objeto da lente de projeção. Assim, os raios atravessam a transparência, sofrem refração e são refletidos no espelho plano que se situa no topo do retroprojektor. Seu ângulo determinará a posição na parede (ou no teto, ou no chão) na qual a imagem se formará.



ATIVIDADES

1. Explique como um prisma de Porro pode ser útil para inverter uma imagem em um binóculo
2. Qual é a diferença entre um telescópio refletor, uma luneta astronômica, uma luneta terrestre e um binóculo?



AULA 70

A LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL



s dados obtidos de Tycho Brahe possibilitaram a descoberta de três leis por Kepler, mediante metódico esforço. Tais leis foram publicadas em sua integralidade em 1619. Em 1642, Isaac Newton nasceu em uma pequena aldeia inglesa. Apesar de sua vida atribulada (seu pai morreu durante sua gestação, e ele não apreciava o padrasto – ademais, quando adolescente, seu padrasto também morrera, de sorte que ele se viu forçado a trabalhar como fazendeiro), seus professores notaram rápido o talento descomunal do garoto, de modo que convenceram sua família de que ele deveria fazer estudos mais avançados. Seu tio, Reverendo William Ayscough, arranhou para ele uma vaga no Trinity College, em Cambridge. Lá, ele descobriu o teorema binomial generalizado (binômio de Newton para expoentes não-inteiros) e começou a desenvolver o cálculo diferencial e integral. Em 1665, a peste bubônica assolou a Inglaterra, de sorte que todos os alunos tiveram que voltar para suas casas. Em casa por dois anos, Newton desenvolveu o Cálculo Diferencial e Integral. Em 1667, as aulas voltaram e Newton foi eleito membro do Trinity College.

Sua carreira foi prolífica, tendo inicialmente feito inúmeros progressos na matemática. Depois, passou para a óptica, onde desenvolveu o telescópio refletor e demonstrou a separação da luz branca em um espectro multicolorido e sua posterior reunião em luz branca, com uso de outro prisma.

Em 1679, Newton passou a estudar mecânica celeste novamente. Tendo estudado com afinco as leis de Kepler, ele finalmente surgiu com as famosas **três leis de Newton**, enunciadas em sua obra-prima “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”:

- Um corpo, na ausência de forças resultantes, tende a permanecer em seu estado de movimento inercial (parado ou em movimento retilíneo uniforme).
- A aceleração que um corpo sofre (variação da velocidade) é proporcional à razão entre a força resultante que nele age e a sua massa

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

- Se um corpo A realiza uma força $\vec{F}$ em um corpo B, o corpo B produz no corpo A uma força de reação $-\vec{F}$ (igual em módulo e direção, oposta no sentido).

Entretanto, nossa atenção deve se voltar para um outro resultado expresso nesse livro – a Lei da Gravitação Universal. Newton percebeu que, de acordo com Kepler, a velocidade

orbital variava em módulo, direção e sentido ao longo da órbita elíptica (especialmente dada a segunda lei de Kepler). Ora, se há variação de velocidade, há forças, e essas forças originam-se da atração do Sol sobre os planetas. Entretanto, dado que a Lua gira em torno da Terra e os satélites naturais de Júpiter em torno dele, Newton percebeu que essas forças são originadas por grandes concentrações de massa – corpos muito massivos atraem outros corpos. À essa força foi dado o nome de **gravidade**. Newton também descobriu que essa gravidade era **diretamente proporcional à massa dos corpos que se atraem e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre esses corpos**. Assim, Newton descobriu a famosa lei da Gravitação Universal, que pode ser enunciada do seguinte modo:

Dois pontos materiais irão se atrair com forças diretamente proporcionais às suas massas e inversamente proporcionais ao quadrado da distância entre eles.

De forma matemática, podemos escrever a Lei da Gravitação Universal do seguinte modo:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Onde M e m são as massas dos corpos que se atraem, r é a distância entre eles e $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ é a chamada **constante de gravitação universal**.

Se os corpos envolvidos tiverem grande dimensão, a distância entre eles não é a distância entre suas superfícies, senão que é a distância entre **seus centros de massa**, que coincidem com seus centros geométricos. Em outras palavras, a força gravitacional, por exemplo, entre a Terra e o Sol, tem como argumento a distância r entre o centro da Terra e o núcleo do Sol.

Note que a constante G é minúscula – deste modo, apenas corpos muito massivos produzem força gravitacional relevante.

A teoria gravitacional Newtoniana explicou, com base em um formalismo matemático sólido, as três leis de Kepler, que eram apenas empíricas. Uma das dúvidas que surgiram na época é **como** a atração gravitacional transpunha o vácuo. Como ela transpunha essa distância? Seria uma ação fantasmagórica? No século XIX, passou a ser comum explicar a gravidade como originada de um **campo gravitacional**. Um corpo massivo gera esse campo, que, com isso, se espalha por todo o espaço.

Dado um corpo de massa M , o campo gravitacional gerado por ele será:

$$\vec{g} = \frac{GM}{r^2} \hat{r}$$

Onde $\hat{r}$ é o vetor que vai do ponto selecionado até a massa M . Qualquer corpo de massa m que esteja nesse campo sentirá uma força com seguinte magnitude:

$$\vec{F} = \vec{g}m = G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

Ou seja, a força sentida por esse corpo será justamente a força gravitacional.

Agora, imagine que estejamos sobre a superfície da Terra. A Terra possui raio $r = 6,38 \times 10^6$ m – essa é, portanto, a distância entre a superfície da Terra e seu centro. Assim, a aceleração gravitacional que atuará em nós poderá ser dada pela Segunda Lei de Newton.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

A força que atua em nós é justamente a força gravitacional

$$\vec{F} = G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

E assim, temos a seguinte equação

$$\begin{aligned} \frac{GmM}{r^2} \hat{r} &= m\vec{a} \\ \frac{GM}{r^2} \hat{r} &= \vec{a} \end{aligned}$$

Ou seja, a aceleração gravitacional em um determinado corpo de massa m **independente** da massa m – de acordo com a Segunda Lei de Newton, a massa que aparece em “F” irá anular a massa que aparece em “ ma ”. A direção da aceleração é $\hat{r}$ – a aceleração aponta na direção do centro da Terra. A magnitude dessa aceleração será, considerando que a massa M da Terra é aproximadamente 6×10^{24} quilogramas.

$$\frac{GM}{r^2} = 6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times \frac{1}{(6,38 \times 10^6)^2} = 9,83 \times 10^0 = 9,83 \text{ m/s}^2$$

Essa é justamente a aceleração gravitacional da Terra, usada no 1º Ano do Ensino Médio ao longo de todo o curso de dinâmica!

Por fim, note que um corpo em órbita circular ao redor da Terra tem movimento circular uniforme. Nesse tipo de movimento, não há variações **modulares** na velocidade, mas apenas variações na direção da velocidade. Assim, a única aceleração presente é a aceleração centrípeta, que **tem** que ser causada pela força gravitacional. A aceleração centrípeta se relaciona com a velocidade pela seguinte expressão:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Assim, a velocidade de um objeto girando em torno da Terra será:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ \frac{GmM}{r^2} &= \frac{mv^2}{r} \end{aligned}$$

$$\frac{GM}{r} = v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

Onde $r = R + h$, com R sendo o raio da Terra e h a altura do objeto em órbita com relação à superfície da Terra.

Exemplo: Um satélite geoestacionário orbita 35 786 km acima do equador terrestre. Considerando uma órbita perfeitamente circular, qual é a sua velocidade orbital?

Resolução: Podemos resolver este problema usando a expressão recentemente deduzida. A velocidade de um objeto que tem órbita circular ao redor da Terra é:

$$v = \sqrt{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times \frac{1}{(35,786 + 6,4) \times 10^6}} = \sqrt{0,949 \times 10^7}$$

$$v = 3,08 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Ou seja, os satélites geoestacionários voam a 3,08 km/s, pouco menos de 10 000 km/h.

Passemos às atividades

ATIVIDADES

1. A intensidade da força gravitacional com que a Terra atrai a Lua é F . Se fossem duplicadas a massa da Terra e da Lua e se a distância que as separa fosse reduzida à metade, qual seria nova força:

2. A razão entre as massas de um planeta e de um satélite é 81. Um foguete está a uma distância R do planeta e a uma distância r do satélite. Qual deve ser o valor da razão R/r para que as duas forças de atração sobre o foguete se equilibrem?

3. Calcule a velocidade orbital de Mercúrio ao redor do Sol, considerando $R = 58 \times 10^9$ metros e $M_{Sol} = 2 \times 10^{30}$ kg.