
ENSINO MÉDIO

– 2º ANO –

MATEMÁTICA

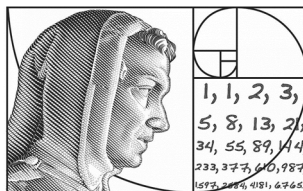
VOLUME 1

Apostila do 2º ano do Ensino Médio, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.





MATEMÁTICA



AULA 03

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

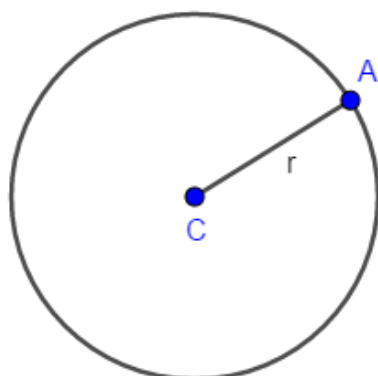


á estudamos no ano passado, a trigonometria no triângulo retângulo e nas primeiras aulas desse volume estudamos a trigonometria em qualquer triângulo. Essa e as próximas aulas têm como objetivo o estudo da trigonometria na circunferência.

A palavra circunferência tem sua origem etimológica no termo em latim CIRCUM, que significa ao redor, e é acrescida da palavra FERRE, que significa levar, carregar, portar.

A matemática define circunferência da seguinte maneira:

Definição: Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano, equidistantes de um ponto fixo (centro da circunferência) desse mesmo plano.



C : centro da circunferência

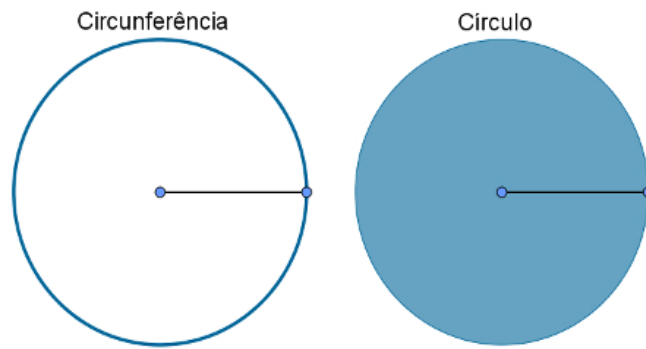
$\overline{CA}$: raio da circunferência

A : ponto da circunferência

*Circunferência de centro C
e raio r .*

Observação: Circunferência e Círculo¹ são figuras diferentes, como podemos ver na imagem.

¹ Círculo é uma figura plana formada pelo conjunto de todos os pontos deste plano, situados a uma distância menor ou igual de um ponto fixo desse plano, denominado centro do círculo.



Vejamos exemplos de círculos e circunferências que encontramos no nosso cotidiano.



Rotatória urbana.



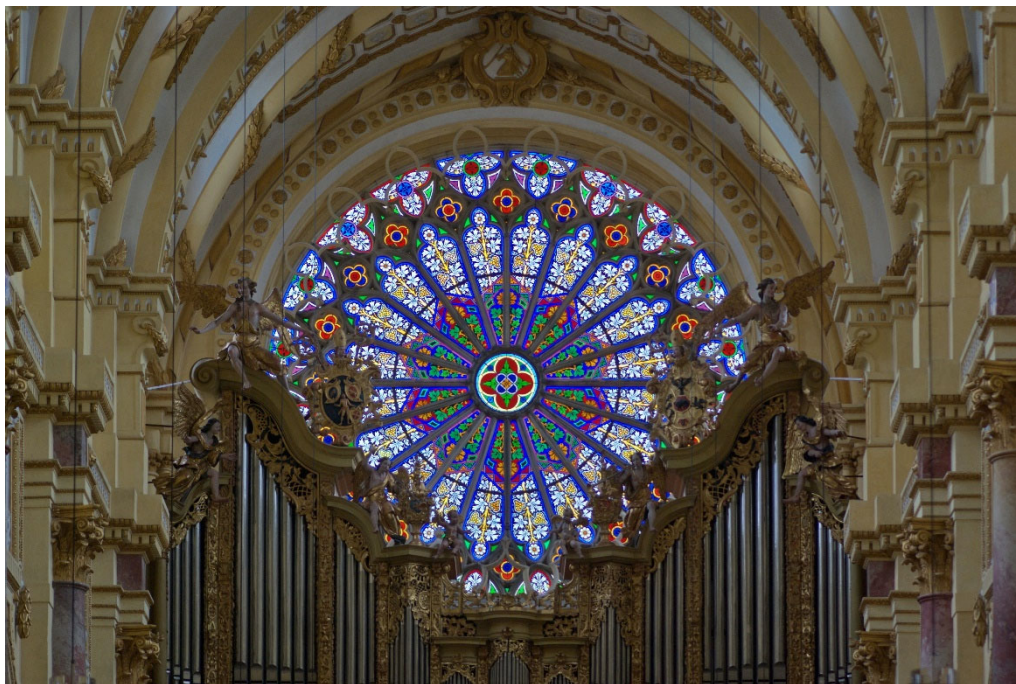
O volante de um carro tem o formato de uma circunferência.



Tábua de churrasco no formato circular.



Roda gigante de um parque de diversões possui o formato de uma circunferência.



Rosácea vista do interior da igreja de Kloster Ebrach em Ebrach, Alemanha.



Relógio no formato circular.



Roda de bicicleta possui um formato de circunferência.



A pizza possui um formato circular.

ELEMENTOS DA CIRCUNFERÊNCIA

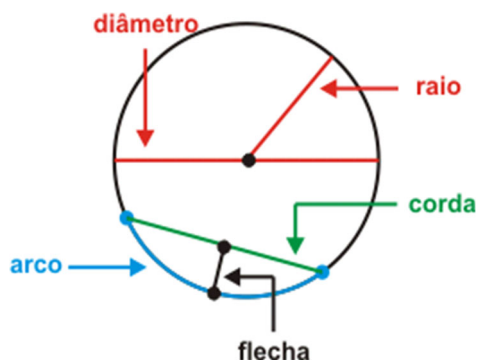
A circunferência possui os seguintes elementos:

Raio: segmento de reta que une um ponto da circunferência ao centro.

Diâmetro: segmento de reta que une dois pontos da circunferência passando pelo centro.

Corda: segmento de reta que une dois pontos da circunferência e não passa pelo centro.

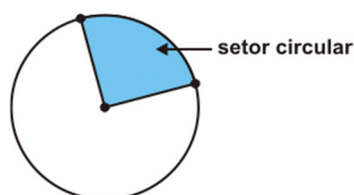
Arco: porção da circunferência limitada por dois pontos.



Elementos de uma circunferência.

Flecha: segmento de reta que une o ponto médio da corda ao ponto médio do arco correspondente.

Além destes elementos, na circunferência encontramos o setor circular, que é a porção do círculo, limitada por um arco e pelos raios que passam pelos seus pontos extremos.



Setor Circular.

Se tomarmos o perímetro de qualquer triângulo pelo seu diâmetro, encontraremos uma constante, que foi chamada de *Número Pi* e denotada com a letra grega π (*pi*).

HISTÓRIA DO NÚMERO π

O número π é famoso universalmente, devido a seu cálculo resultar em infinitas casas decimais. O símbolo π é uma letra grega minúscula, a primeira da palavra *periphéreia*, que significa circunferência. Foi em 1737 que o matemático suíço, Leonhard Euler, deu a conhecer o símbolo π para representar o mesmo, embora o matemático inglês Willian Jones, já em 1706 propusera a mesma notação, porém, sem êxito.

É um número irracional que não pode ser escrito como um número finito de algarismos. **O π representa a razão entre o perímetro de qualquer círculo e seu diâmetro.**

A história do número π começou milênios atrás. No Antigo Testamento, temos duas citações:

"Hiram fez também o mar de bronze, que tinha dez côvados de uma borda à outra, perfeitamente redondo e com altura de cinco côvados; sua circunferência media-se com um fio de trinta côvados." (1 Rs 7, 23)

"Fabricou o “mar” de metal fundido, o qual tinha uma largura de dez côvados de uma borda a outra. Tinha a forma circular e sua altura era de cinco côvados²; sua circunferência era medida por um cordão de trinta côvados." (2 Cr 4, 2)

Estes textos bíblicos descrevem a construção do grande Templo de Salomão³. A circunferência era seis vezes o raio, ou três vezes o diâmetro. Isto significa que os antigos Hebreus se contentavam em atribuir ao número π o valor 3.

O valor 3 foi usado durante muito tempo por vários povos, como os Egípcios e os Babilônios, mesmo eles conhecendo medidas mais precisas. Os valores aproximados utilizados pelos povos Egípcios e Babilônios que se conhecem são respectivamente:

$$4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,16 \quad e \quad 3\frac{1}{8} = 3,125$$

O valor $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$, encontrado pelos egípcios, no segundo século a.C., curiosamente é o mesmo valor que se obtém, medindo a circunferência de latas, pratos e cestas e dividindo-se pelos diâmetros respectivos.

O valor $3\frac{1}{8}$ encontrado pelos Babilônios deduz-se de uma das placas de Susa⁴, única amostra mais precisa da época, embora não haja comprovação de como chegaram ao referido cálculo.

Arquimedes⁵ (287–212 a.C.), matemático grego, conseguiu calcular o valor de π com mais precisão. Ele encontrou a área de dois polígonos encaixados na circunferência, um inscrito e outro circunscrito. Ele usou polígonos regulares, com um número crescente de lados, até chegar ao polígono de 96 lados. Obteve a seguinte aproximação de π :

$$3,1410 < \pi < 3,1428$$

O matemático chinês Zhu Chongzi (429–500 d.C.) obteve uma estimativa do número π com sete dígitos corretos e esta aproximação perdurou por vários séculos.

2 Côvado foi uma medida de comprimento usada por diversas civilizações antigas. Era baseado no comprimento do antebraço, da ponta do dedo médio até o cotovelo.

3 O Templo de Salomão tinha como objetivo ser uma “casa” para a Arca da Aliança e a construção durou sete anos.

4 A Placa de Susa é o único instrumento conhecido da época dos babilônios que permitia determinar precisões exatas. Ela foi usada pelos babilônicos para obter uma aproximação do número π .

5 Arquimedes nasceu em Siracusa, atual Itália, no ano 287 a.C. Foi um matemático, engenheiro, físico, inventor e astrônomo grego. Arquimedes estudou em Alexandria, onde teve contato com Erastótenes.

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

John Wallis (1616–1703), matemático inglês, chegou à descoberta das representações de π por séries infinitas. Descobriu-se então a definição não geométrica de π e do papel "não geométrico" deste valor. Chegou à fórmula,

$$\pi = 2 \cdot \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \right)$$

A fórmula a seguir, é por vezes atribuída a Leibniz⁶ (1646–1716), mas, provavelmente, deve ter sido descoberta primeiro por James Gregory⁷ (1638–1675):

$$\pi = 4 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

A fórmula de Gregory é mais apropriada para o cálculo computacional do que para o cálculo humano, embora também tenha demonstrado um resultado mais geral

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

Então, usando o seguinte fato

$$\arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

conclui-se que,

$$\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(3 \cdot 3)} + \frac{1}{(5 \cdot 3 \cdot 3)} - \frac{1}{(7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)} + \dots\right)$$

John Machin, em 1706, conseguiu calcular o π com 100 casas decimais. A fórmula de Machin ainda é usada por programas de computadores, para calcular os dígitos do π . A fórmula encontrada por Machin é dada por,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctg\left(\frac{1}{5}\right) - \arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

6 Leibniz nasceu em Leipzig, Alemanha. Contribuiu para a aritmética binária, séries infinitas e o Cálculo Diferencial e Integral.

7 James Gregory é matemático, físico teórico e astrônomo escocês, nascido em Drumoak, nas proximidades de Aberdeen, predecessor de Newton, que desenvolveu na Inglaterra o teorema binomial para potências inteiras fracionárias, após estudos com matemáticos do continente e que primeiro estabeleceu uma distinção entre séries convergentes e divergentes e antecipou-se à pesquisa de Isaac Newton sobre o cálculo.

O matemático inglês William Shanks⁸, em 1873 conseguiu calcular o número π com 707 casas decimais, porém havia erros em seu cálculo. Apenas 527 estavam corretas.

Com o desenvolvimento da tecnologia na área da computação, os matemáticos conseguiram avançar enormemente as casas decimais do número π .

Os matemáticos David Harold Bailey, estadunidense, Peter Borwein, canadense e Simon Plouffe, também canadense, obtiveram dez bilhões de casas decimais para π . Usando uma fórmula para cada n escolhido resulta em n casas decimais.

Ao escrevermos o valor do número π , finalizamos com reticências. Isto se deve pelo fato de o número π ser irracional.

⁸ Willian Shanks foi um matemático amador inglês.

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Os povos antigos descobriram a constante π através da razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro.

$$\frac{C}{d} = \pi$$

Com isso, podemos definir uma fórmula para o comprimento da circunferência:

$$C = \pi \cdot d$$

$$C = \pi \cdot 2R$$

$$C = 2\pi R$$

Portanto, o comprimento da circunferência é $2\pi R$.

ÁREA DO CÍRCULO

Existem duas maneiras para determinarmos a área de um círculo:

1ª maneira: usando o círculo dividido em setores

Se dividirmos o círculo em um número par de setores circulares e separarmos cada triângulo, formaremos uma figura cujo contorno lembra um paralelogramo. A base dessa figura mede metade do comprimento do círculo e sua altura mede o valor do raio.

A área dessa figura, é também a área do círculo.

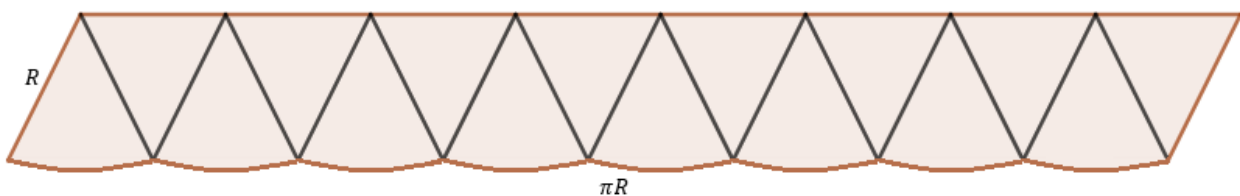
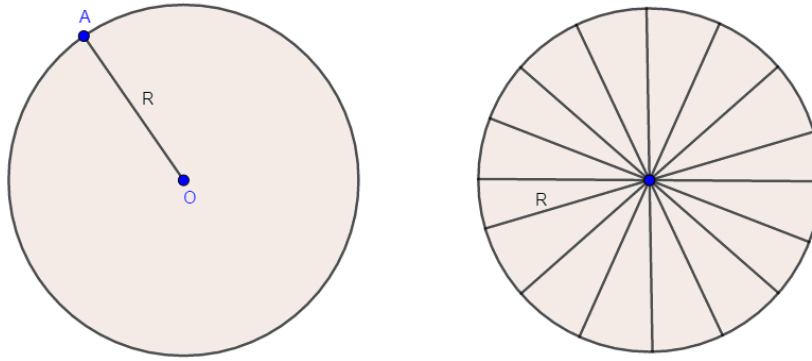


Figura que lembra um paralelogramo.

$$A = \pi R \cdot R = \pi R^2$$



Círculo dividido em setores circulares.

2ª maneira: usando polígonos regulares

Já estudamos no volume 7 do 1º Ensino Médio, que a área da região determinada por um polígono regular é dada por:

$$A = \frac{aP}{2}$$

Onde:

a → apótema

P → perímetro

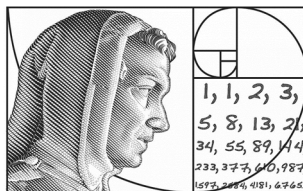
À medida que aumentamos o número de lados dos polígonos regulares, a figura se aproxima de um círculo e com isso, o apótema passa a ser o raio e o perímetro passa a ser o comprimento da circunferência, então temos que:

$$A = \frac{aP}{2} = \frac{R2\pi R}{2} = \pi R^2$$

Portanto, a área de um círculo é πR^2 .

EXERCÍCIOS

1. Defina circunferência e círculo.
2. Qual a diferença entre círculo e circunferência?
3. Quais são os elementos da circunferência? Faça um desenho de uma circunferência com os seus elementos, explicando cada um deles.
4. O que é um setor circular?
5. Faça um resumo sobre a história do número π .
6. Se o raio de uma circunferência é $r = 8$ cm, qual é o comprimento da circunferência?
7. Se o comprimento da circunferência de um círculo é 20π cm, qual é o raio da circunferência?
8. Calcule a área de um círculo com raio $r = 5$ cm.
9. Se a área de um círculo é 36π cm² então qual é o comprimento do raio?



AULA 07

ARCOS CÔNGRUOS



esta aula estudaremos os arcos cômruos. Vamos defini-los:

Definição: Dois arcos são cômruos quando possuem a mesma origem e a mesma extremidade.

Para determinarmos se dois arcos são cômruos, precisamos verificar se a diferença entre eles é um número divisível ou múltiplo de 360° . Para isso, devemos verificar se a diferença entre as medidas dos arcos cômruos, dividido por 360° , resulta em resto igual a zero.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos:

1. Os arcos de medida 6230° e 8390° são cômruos?

Resolução: Primeiramente calculamos a diferença:

$$8390^\circ - 6230^\circ = 2160^\circ$$

E depois dividimos por 360° :

$$\frac{2160^\circ}{360^\circ} = 6$$

Como a divisão resulta em resto zero, então os arcos 6230° e 8390° são cômruos.

2. Os arcos de medida 2019° e 485° são cômruos?

Resolução: Primeiramente calculamos a diferença:

$$2019^\circ - 485^\circ = 1534^\circ$$

E depois dividimos por 360° :

$$\frac{1534^\circ}{360^\circ} \cong 4$$

Como a divisão resulta em resto 94, então os arcos 2019° e 485° não são côngruos.

FORMA GERAL DOS ARCOS CÔNGRUOS

Os arcos no círculo trigonométrico possuem uma determinação, isto é, possui uma origem e um fim. Dois ou mais arcos podem ter a mesma determinação, porém só com esta informação, não podemos afirmar que estes arcos possuem o mesmo comprimento, pois pode ocorrer de possuírem um número inteiro de voltas completas diferentes. Para isso, temos uma definição geral para representar arcos e todos os seus côngruos.

Definição: Seja um arco com medida α tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$. Para expressarmos os arcos côngruos a α , temos a seguinte fórmula:

$$\alpha + 2\pi K$$

onde $K \in \mathbb{Z}$ e representa o número de voltas completas na circunferência.

Observação: Podemos definir também da seguinte maneira:

$$\alpha + 360^\circ \cdot K$$

pois, $360^\circ = 2\pi$ rad.

Exemplos:

1. Encontre o arco côngruo a $\frac{25\pi}{4}$ na primeira volta.

Resolução:

$$\frac{25\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 6\pi + \frac{\pi}{4}$$

O arco $\frac{25\pi}{4}$ corresponde a 3 voltas completas na circunferência mais $\frac{\pi}{4}$, que corresponde a 45° .

2. Em qual quadrante encontra-se o arco $\frac{17\pi}{3}$?

Resolução:

$$\frac{17\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 4\pi + \pi + \frac{2\pi}{3}$$

O arco $\frac{17\pi}{3}$ corresponde a 2 voltas completas na circunferência mais $\frac{5\pi}{3}$, que corresponde a um arco no quarto quadrante.

EXERCÍCIOS

1. Determine se os arcos abaixo são côngruos:

- a) 8000° e 2600°
- b) 160° e 520°
- c) 2024° e 1600°
- d) 22000° e 5800°

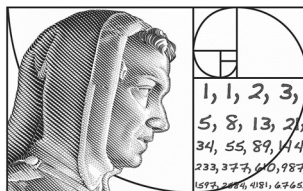
2. Determine a expressão geral dos arcos côngruos aos arcos abaixo:

- a) 400°
- b) 720°
- c) 1000°
- d) $\frac{27\pi}{4}$ rad
- e) $\frac{19\pi}{3}$ rad

3. Marca-se em um pneu, no ponto de seu contato com o solo, um ponto com tinta, que chamaremos de A . O carro percorre um determinado trecho, onde o pneu gira 18780° . Qual a distância do ponto A ao novo ponto de contato do pneu com o solo, chamado de P , em função do raio r do pneu?

4. Em uma pista circular de 400 m de comprimento, Joaquim Barbosa realiza um treinamento no qual ele corre 160 m na maior velocidade que consegue e faz pausas por 30s, repetindo o processo 12 vezes. Determine:

- a) O raio aproximado desta pista.
- b) A medida, em graus, do arco determinado em cada treinamento.



AULA 10

TANGENTE E COTANGENTE

Nesta aula estudaremos as seguintes razões trigonométricas: tangente e cotangente.

TANGENTE



o ano passado estudamos a tangente em um triângulo retângulo e vimos a seguinte definição: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$.

Esse estudo da tangente foi em um intervalo de $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pois o ângulo α é agudo em um triângulo retângulo. E vimos que a fórmula da tangente funciona no primeiro quadrante. Será que ela pode ser definida para ângulos em qualquer quadrante? Ou para ângulos que estejam em qualquer lugar do círculo trigonométrico?

Sabemos que a tangente é definida por uma razão, uma divisão. Com isso, o denominador não pode ser zero, isto é, o cosseno não pode resultar em zero. Então, para que a definição seja válida para ângulos em qualquer lugar do círculo trigonométrico, o cosseno deste ângulo precisa ser da seguinte forma: $\cos \alpha \neq 0$.

Sabemos que existem alguns ângulos β tal que $\cos \beta = 0$. Os ângulos β que correspondem são os ângulos que estão no eixo das ordenadas, ou seja, os ângulos de $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$. Portanto, para os ângulos $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ não vale a definição da tangente. Com isso, conseguimos responder a segunda questão, pois $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ fazem parte do círculo trigonométrico.

Como os ângulos podem ultrapassar uma volta na circunferência, então precisamos generalizar os ângulos onde a tangente não está definida.

Para generalizarmos, vamos utilizar o ângulo β como sendo todos os ângulos aos quais não podemos definir a tangente.

Assim, temos que:

$$\beta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2K\pi \\ \frac{3\pi}{2} + 2K\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

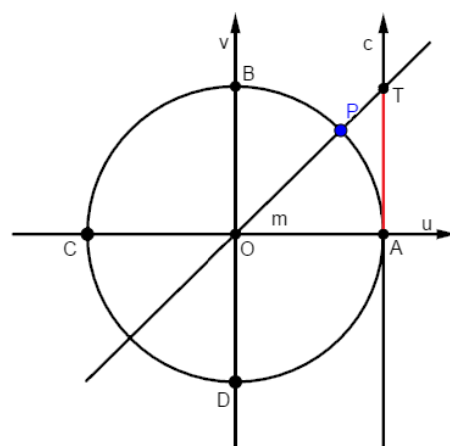
A tangente pode ser definida em qualquer quadrante com a seguinte fórmula:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

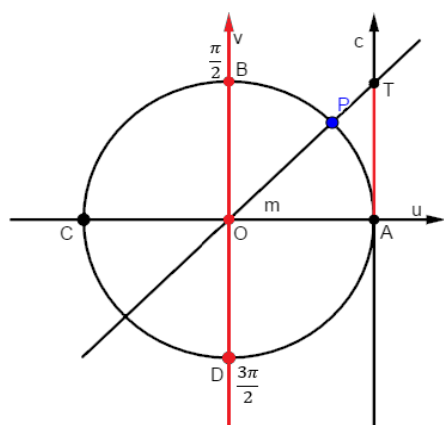
Assim, respondemos a primeira questão. Porém a demonstração desta resposta será apresentada no próximo volume, onde trataremos de indicar as relações trigonométricas, dentre elas, a tangente.

Definição da tangente em um círculo trigonométrico:

Definição: Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no círculo trigonométrico. Consideremos a reta $\overrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com a reta tangente. Denominamos **tangente de x** (e indicamos $\operatorname{tg} x$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.



Definição geométrica da tangente.

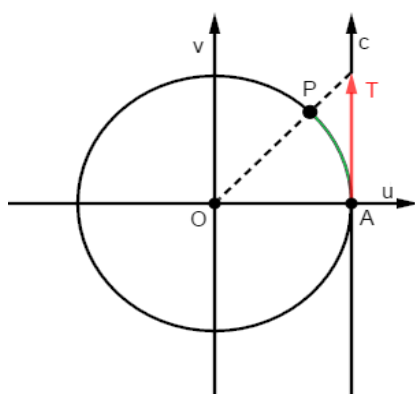


A tangente não pode ser definida em nenhum ponto do eixo da ordenada **a**.

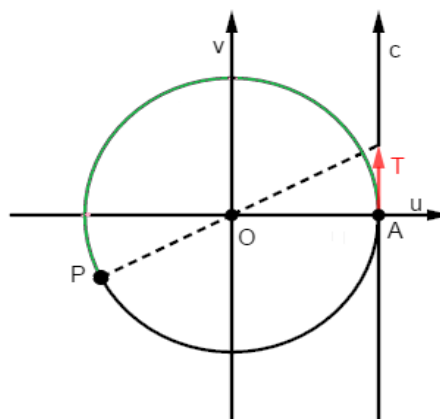
Também podemos compreender geometricamente o motivo dos ângulos $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ não poderem ser definidos na tangente. O ângulo $\frac{\pi}{2}$ está em B e o ângulo $\frac{3\pi}{2}$ está em D, então a reta $\overrightarrow{OP}$ fica paralela à reta tangente. Portanto, não existe o ponto T, e por isso a **tangente** não está definida nestes dois ângulos.

PROPRIEDADES

1ª. Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é positiva.



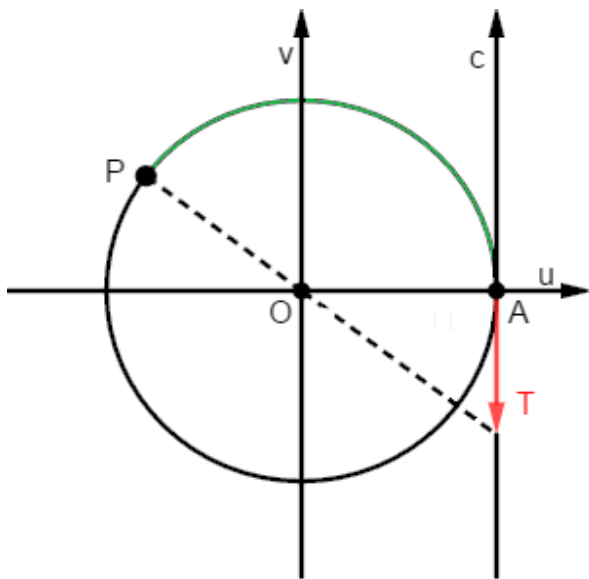
A tangente no 1º Quadrante.



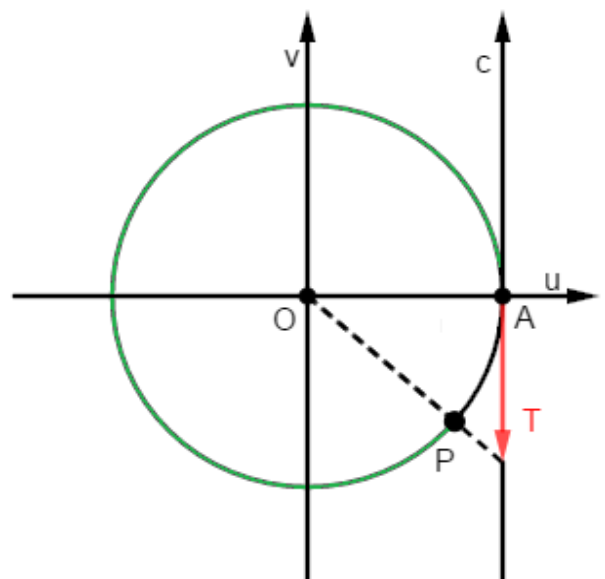
A tangente no 3º Quadrante.

De fato, neste caso o ponto T está acima de A e AT é positiva.

2ª. Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é negativa.



A tangente no 2º Quadrante.

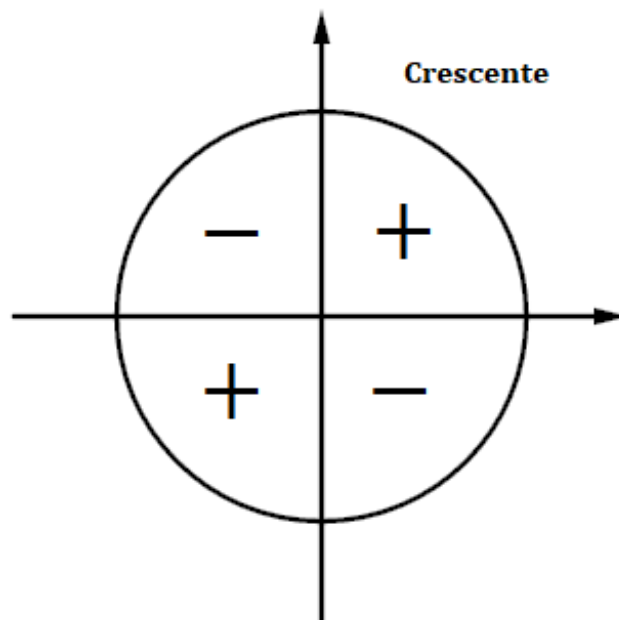


A tangente no 4º Quadrante.

De fato, neste caso o ponto T está abaixo de A e AT é negativa.

3ª. Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\operatorname{tg} x$ é crescente.

A imagem abaixo ilustra as propriedades acima resumidamente:



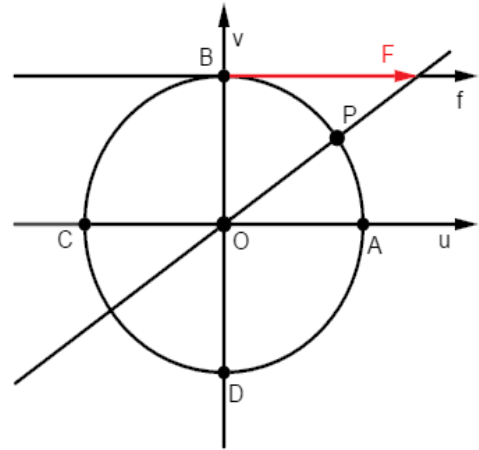
Os sinais da tangente em cada quadrante.

COTANGENTE

Definição 1: A **cotangente** é a inversa numérica da tangente e é definida com a seguinte razão para todos os quadrantes.

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Definição 2: Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, seja P sua imagem no círculo trigonométrico. Consideremos a reta $\overrightarrow{OP}$ e seja F sua interseção com o eixo das cotangentes. Denominamos **cotangente de x** (e indicamos $\cotg x$) a medida algébrica do segmento $\overline{BF}$.



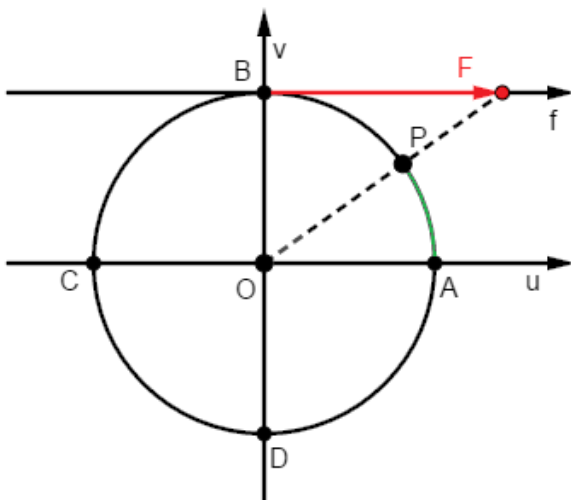
Definição geométrica da cotangente.

Por definição, temos que a cotangente não é definida nos ângulos $0, \pi, 2\pi$. O ângulo 0 e 2π está em A e o ângulo π está em C , então a reta $\overrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Portanto, não existe o ponto F , por isso a **cotangente** não está definida nestes três ângulos.

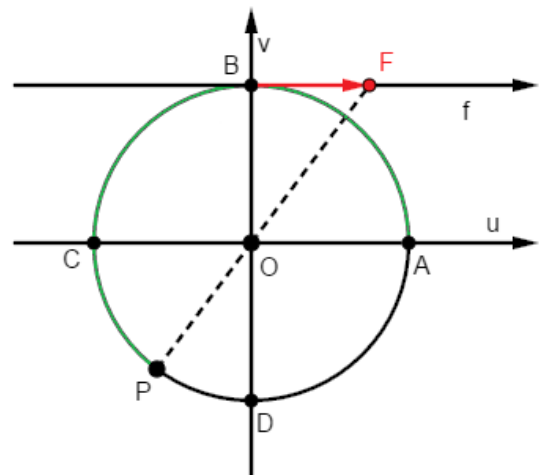
PROPRIEDADES

1ª. Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\cotg x$ é positiva.

De fato, neste caso o ponto F está à frente de B e BF é positiva.

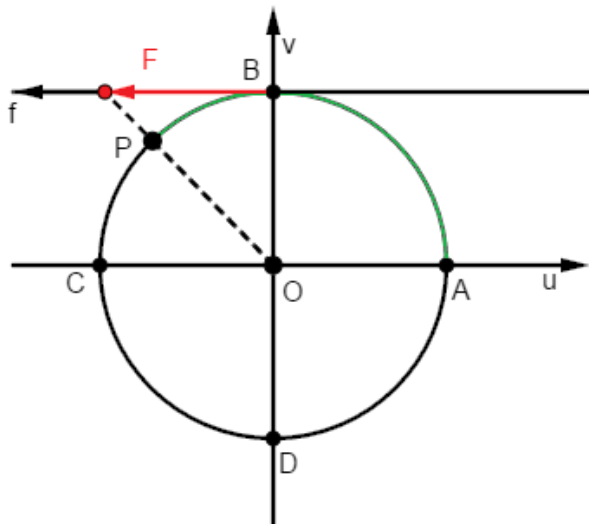


A cotangente no 1º Quadrante.

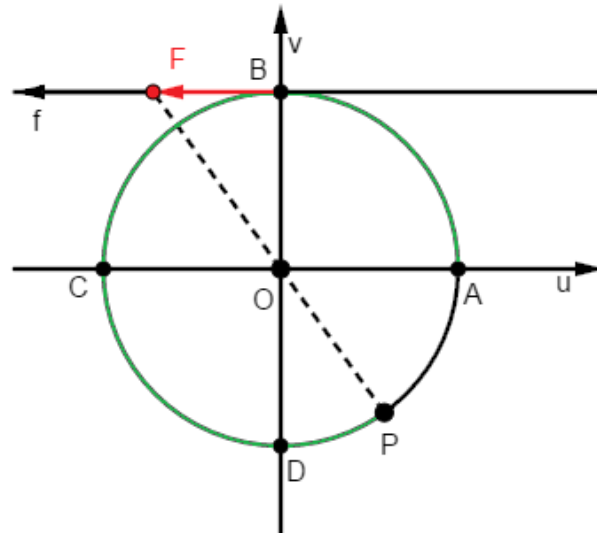


A cotangente no 3º Quadrante.

2ª. Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\cotg x$ é negativa.



A cotangente no 2º Quadrante.

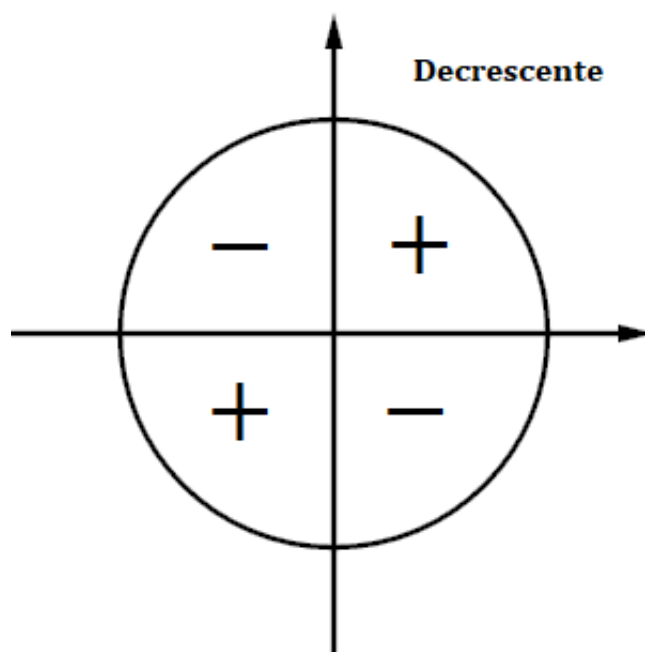


A cotangente no 4º Quadrante.

De fato, neste caso o ponto F está atrás de B e BF é negativa.

3ª. Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\cot x$ é decrescente.

A imagem abaixo ilustra as propriedades acima resumidamente:



Os sinais da cotangente em cada quadrante.

EXERCÍCIOS

1. Localize os arcos $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. Em seguida, dê o sinal da tangente e da cotangente de cada um deles.

2. Dê o sinal dos seguintes números:

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$

b) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$

c) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$

d) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$

e) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$

f) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$

3. Dê o sinal dos seguintes números:

a) $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{6}$

c) $\operatorname{cotg} \frac{7\pi}{6}$

e) $\operatorname{cotg} \frac{4\pi}{3}$

b) $\operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3}$

d) $\operatorname{cotg} \frac{11\pi}{6}$

f) $\operatorname{cotg} \frac{5\pi}{3}$

4. Sabendo que $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, dê o valor de $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$ e $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$.

5. Sabendo que $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, dê o valor de $\operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{cotg} \frac{4\pi}{3}$ e $\operatorname{cotg} \frac{5\pi}{3}$.

6. Localize os arcos no círculo trigonométrico e coloque em ordem crescente os números $\operatorname{tg} 60^\circ$, $\operatorname{tg} 120^\circ$, $\operatorname{tg} 210^\circ$ e $\operatorname{tg} 330^\circ$.

7. Localize os arcos no círculo trigonométrico e coloque em ordem crescente os números $\operatorname{cotg} 60^\circ$, $\operatorname{cotg} 120^\circ$, $\operatorname{cotg} 210^\circ$ e $\operatorname{cotg} 330^\circ$.

8. Calcule as expressões:

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 2\pi$

b) $2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$

c) $-2 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$

9. Calcule as expressões:

a) $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6}$

b) $2 \operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{3}{5} \operatorname{cotg} \frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7} \operatorname{cotg} \frac{7\pi}{6} - \frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} + \frac{4}{5} \cos \frac{5\pi}{4}$

10. Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

a) $y_1 = \operatorname{tg} 269^\circ + \operatorname{sen} 178^\circ$

b) $y_2 = \operatorname{cotg} 269^\circ + \operatorname{sen} 178^\circ$

c) $y_3 = \operatorname{tg} \frac{12\pi}{7} \cdot \left(\operatorname{sen} \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{23\pi}{12} \right)$

d) $y_4 = \operatorname{cotg} \frac{12\pi}{7} \cdot \left(\operatorname{sen} \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{23\pi}{12} \right)$

11. A expressão

$$E = \frac{\operatorname{sen} 75^\circ \cdot \cos 327^\circ \cdot \operatorname{tg} 138^\circ}{\operatorname{sen} 269^\circ \cdot \operatorname{tg} 288^\circ}$$

é positiva, negativa ou zero?

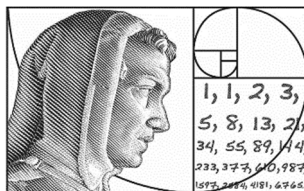
12. (Enem 2013) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (altura indicada na figura como o segmento $\overline{AB}$). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.



Uma das torres Puerta de Europa.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

- a) menor que 100 m^2 .
- b) entre 100 m^2 e 300 m^2 .
- c) entre 300 m^2 e 500 m^2 .
- d) entre 500 m^2 e 700 m^2 .
- e) maior que 700 m^2 .



AULA 16

ARCOS NOTÁVEIS



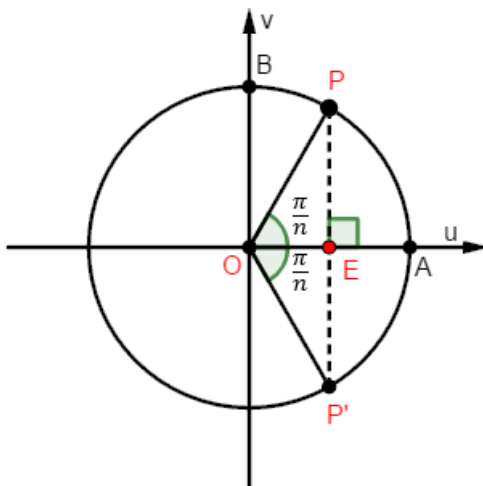
esta aula estudaremos um teorema onde as razões trigonométricas dos reais $x = \frac{\pi}{n}$ tal que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$ podem ser calculadas através do l_n ¹¹.

O lado do polígono regular inscrito na circunferência interfere diretamente nas razões trigonométricas de $\frac{\pi}{n}$, como veremos no teorema abaixo:

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, vale a relação:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{l_n}{2}$$

Demonstração: Seja $\widehat{AOP} = \widehat{AOP'} = \frac{\pi}{n}$.



Como $\widehat{P'OP} = \frac{2\pi}{n}$, decorre que $P'P = l_n$.

O $\triangle P'OP$ é isósceles, o segmento $\overline{OE}$ contido no eixo dos cossenos é bissetriz interna e também altura e mediana, isto é, $\overline{P'P} \perp u$. O ponto E é ponto médio de $\overline{P'P}$. Então:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = EP = \frac{l_n}{2}$$

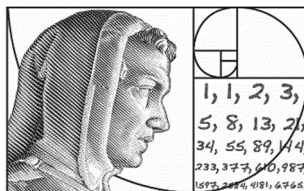
¹¹ l_n é o lado do polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência.

Com este teorema, poderemos escrever uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente para os valores de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$. Contudo, necessitamos primeiramente descobrir os valores de l_3 , l_4 , l_6 e, para tal, necessitaremos de alguns conceitos de geometria, como: Teorema de Pitágoras e Pontos Notáveis em um triângulo.

Veremos nas próximas aulas como encontrar os valores de l_3 , l_4 , l_6 e os valores de seno, cosseno e tangente de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$.

ATIVIDADES

1. O que é um polígono regular?
2. O que é l_n ?
3. Demonstre para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$ que vale a relação $\text{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{l_n}{2}$.



AULA 17

VALORES DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE $\frac{\pi}{3}$



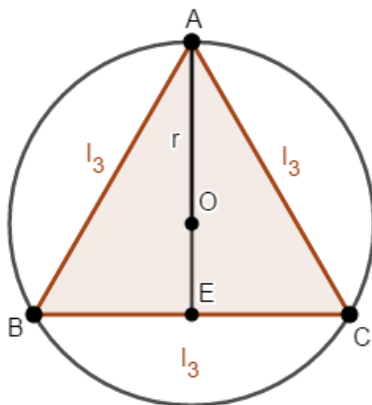
partir desta aula iniciaremos o estudo dos casos mais comuns de aplicação do teorema estudado na aula anterior. Os casos que estudaremos são: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ e

$\frac{\pi}{6}$.

Nesta aula estudaremos o valor da razão trigonométrica de $\frac{\pi}{3}$.

As razões trigonométricas de $\frac{\pi}{3}$ remetem ao l_3 , ou seja, ao polígono regular de três lados, que é o triângulo equilátero. Por isso, vamos construir um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência para encontrarmos o valor de l_3 , e depois encontrarmos as razões trigonométricas de $\frac{\pi}{3}$.

Seja um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.



Polígono regular de três lados inscrito na circunferência.

Pelo Teorema de Pitágoras no ΔAEC , temos que:

$$l_3^2 = h^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2$$

$$l_3^2 = h^2 + \frac{l_3^2}{4}$$

$$l_3^2 = \frac{4h^2 + l_3^2}{4}$$

$$4l_3^2 = 4h^2 + l_3^2$$

$$3l_3^2 = 4h^2$$

$$l_3^2 = \frac{4h^2}{3}$$

$$l_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} h$$

No triângulo equilátero inscrito na circunferência, o ponto central equivale ao Baricentro, Incentro, Circuncentro e o Ortocentro. Com isso, temos uma relação entre o raio da circunferência e a altura do triângulo equilátero.

$$r = \frac{2}{3} h$$

Assim, temos que:

$$h = \frac{3r}{2}$$

Substituindo a altura h para encontrar o valor do lado l do triângulo, temos que:

$$l_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3r}{2}$$

$$l_3 = \frac{3r}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$l_3 = r\sqrt{3}$$

Com o teorema da aula anterior, o valor de $l_3 = r\sqrt{3}$ e $r = 1$, podemos calcular o $\text{sen} \frac{\pi}{3}$.

$$\text{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{l_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por consequência, temos que:

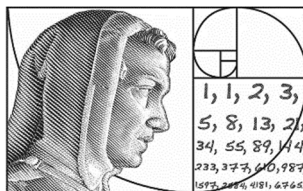
$$\cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \frac{\pi}{3}} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\text{sen} \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ATIVIDADES

1. Demonstre que o lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência corresponde a $r\sqrt{3}$.

2. Explique com suas palavras por que $\text{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Explique com suas palavras por que $\text{cos} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
4. Explique com suas palavras por que $\text{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.



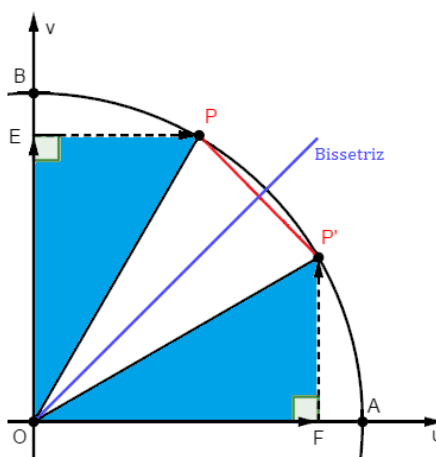
AULA 23

REDUÇÃO DE $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ A $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$



esta aula aprenderemos a reduzir as razões trigonométricas do $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Dado o número real x tal que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, seja P a imagem de x no círculo trigonométrico. Seja P' o ponto do círculo trigonométrico, simétrico de P em relação à bissetriz do primeiro quadrante.



Assim, temos que:

$$\widehat{AP} + \widehat{PB} = \frac{\pi}{2}$$

E como

$$\widehat{AP'} = \widehat{PB}$$

Temos que:

$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = \frac{\pi}{2}$$

Portanto,

$$\widehat{AP'} = \frac{\pi}{2} - x$$

Pela congruência dos ΔOEP e $\Delta OFP'$, temos que:

$$OE = OF \Rightarrow \text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$EP = FP' \Rightarrow \cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Pelas relações fundamentais, podemos concluir que:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{cotg } x = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sec x = \text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{cossec } x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Exemplos:

$$1. \text{sen } 80^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$2. \cos 45^\circ = \text{sen}(90^\circ - 45^\circ) = \text{sen } 45^\circ$$

$$3. \text{tg } 30^\circ = \text{cotg}(90^\circ - 30^\circ) = \text{cotg } 60^\circ$$

$$4. \text{cotg } \frac{\pi}{3} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg } \frac{\pi}{6}$$

$$5. \sec \frac{5\pi}{12} = \text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \text{cossec } \frac{\pi}{12}$$

$$6. \text{cossec } \frac{3\pi}{8} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \sec \frac{\pi}{8}$$

ATIVIDADES

1. Reduza ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$:

a) $\text{sen } 261^\circ$

b) $\text{sen } \frac{4\pi}{3}$

c) $\sin \frac{5\pi}{6}$

d) $\sin \frac{5\pi}{3}$

e) $\cos 341^\circ$

f) $\cos \frac{2\pi}{3}$

g) $\cos \frac{7\pi}{6}$

h) $\cos \frac{4\pi}{3}$

i) $\operatorname{tg} 151^\circ$

j) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$

k) $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$

l) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$

2. O número real m que satisfaz à sentença $\frac{m+1}{m-2} = \cos 3015^\circ$ é

a) $4 - 3\sqrt{2}$.

b) $3\sqrt{2} - 4$.

c) $3 - 4\sqrt{2}$.

d) $4\sqrt{2} + 3$.

e) $3\sqrt{2} + 4$.

3. Calcule as expressões:

a) $2 \cos \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cos \frac{7\pi}{4}$

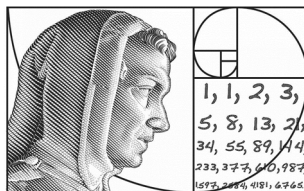
b) $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} - \sin 2\pi$

c) $-\frac{2}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{3}{5} \sin \frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7} \sin \frac{7\pi}{6}$

d) $-2 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$

e) $2 \cotg \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cotg \frac{5\pi}{6}$

f) $\frac{3}{5} \cotg \frac{5\pi}{3} - \frac{6}{7} \cotg \frac{7\pi}{6} - \frac{2}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{4}{5} \cos \frac{5\pi}{4}$



AULA 27

FUNÇÃO COSSENO

Definição: A função **cosse**no é uma função que associa cada número real x ao valor do **cosse**no do arco com medida x *radianos*, denotado por $\cos x$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \cos x$$

Observação 1: O domínio da função **cosse**no é o conjunto dos números reais.

Observação 2: O **cosse**no de um ângulo é dado pela abscissa do ponto atingido por esse ângulo no círculo trigonométrico.

PROPRIEDADES DO COSSENO

O **cosse**no possui oito propriedades que estão dispostas abaixo:

1ª Propriedade: Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $\cos x$ é positivo.

2ª Propriedade: Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $\cos x$ é negativo.

3ª Propriedade: Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\cos x$ é decrescente.

4ª Propriedade: Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\cos x$ é crescente.

5ª Propriedade: O domínio da função **cosse**no é o conjunto dos números reais.

6ª Propriedade: A imagem da função **cosse**no é o intervalo $[-1, 1]$.

7ª Propriedade: A função **cosse**no é periódica e seu período é 2π .

8ª Propriedade: A função **cosse**no é uma função par.

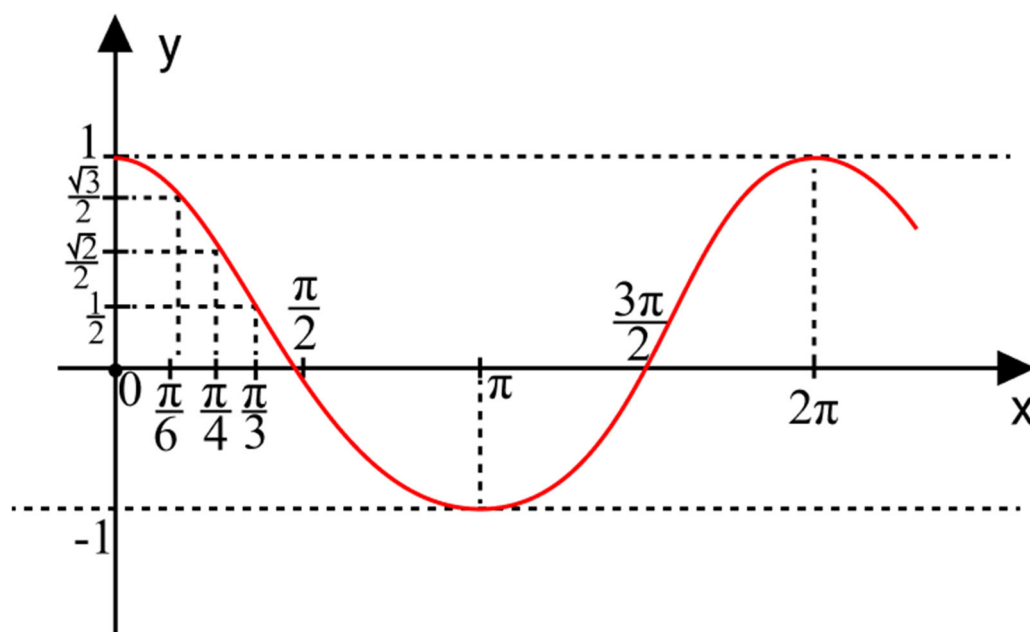
GRÁFICO DO COSSENO

Definição: O gráfico da função **cosse**no é dado através do x nas abscissas e $\cos x$ nas ordenadas. E este gráfico é denominado por **cosse**noide.

Assim, temos os seguintes pontos para a **cosse**noide:

x	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Usando a tabela, temos o gráfico da função *cosse*no abaixo.



A cossenoide

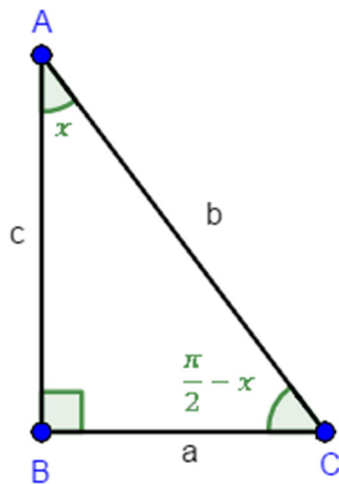
Note que a *cossenoide* é uma senoide transladada $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda. Assim, podemos dizer para todo $x \in \mathbb{R}$ que

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (1)$$

A equação (1) se dá através de dois aspectos: fórmulas de seno e cosseno de um triângulo retângulo em ângulos complementares e a redução dos ângulos ao primeiro quadrante.

No volume anterior, vimos que qualquer ângulo pode ser reduzido ao primeiro quadrante, por isto, basta mostrarmos que a equação (1) é válida no primeiro quadrante para que esta equação seja demonstrada para todo $x \in \mathbb{R}$.

Então, para demonstrar a equação (1) no primeiro quadrante, tomemos um triângulo retângulo qualquer, cujo $\hat{B} = 90^\circ$. Tomando o ângulo $\hat{A} = x$, temos que $\hat{C} = \frac{\pi}{2} - x$.



Triângulo retângulo

Calculando o *cos seno* de $\hat{A}$ e o *seno* de $\hat{C}$, temos que:

$$\cos x = \frac{ca}{hip} = \frac{c}{b}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{co}{hip} = \frac{c}{b}$$

Portanto, temos que:

$$\cos x = \frac{c}{b} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



Q.E.D

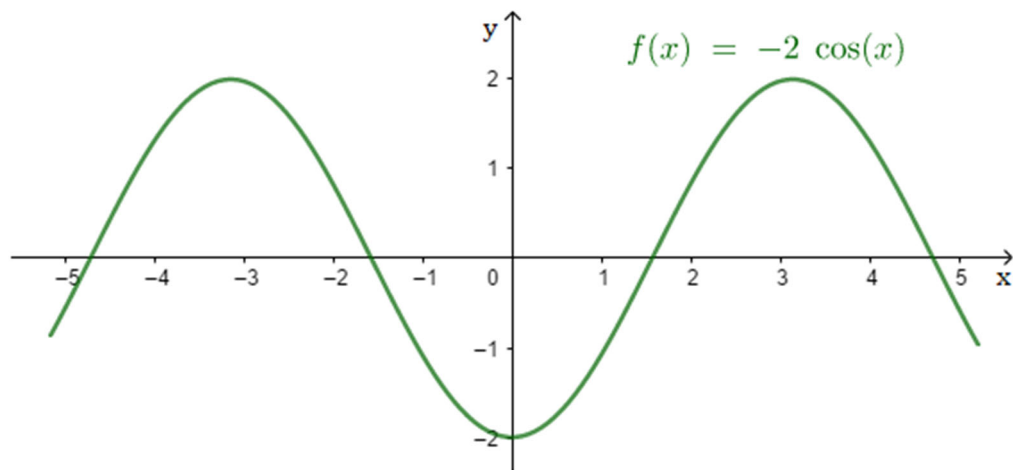
Exemplos:

1. Construa o gráfico e determine o período e a imagem da função.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = -2\cos x$$

Resolução: O gráfico $f(x) = -2\cos x$ é:



O gráfico da função $f(x) = -2\cos x$.

Analisando o gráfico, temos que:

$$I_m(f) = \{-2, 2\}$$

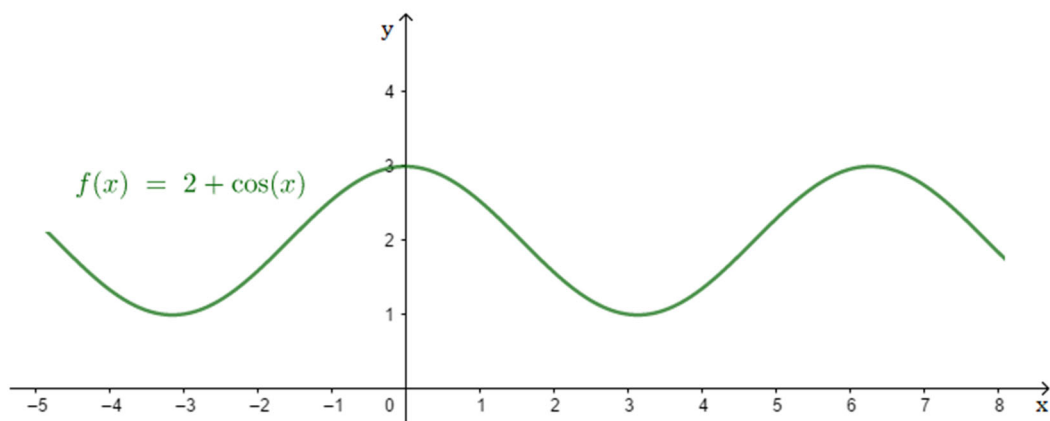
$$p(f) = 2\pi$$

2. Construa o gráfico e determine o período e a imagem da função.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 2 + \cos x$$

Resolução: O gráfico $f(x) = 2 + \cos x$ é:



O gráfico da função $f(x) = 2 + \cos x$.

Analisando o gráfico, temos que:

$$I_m(f) = \{1, 3\}$$

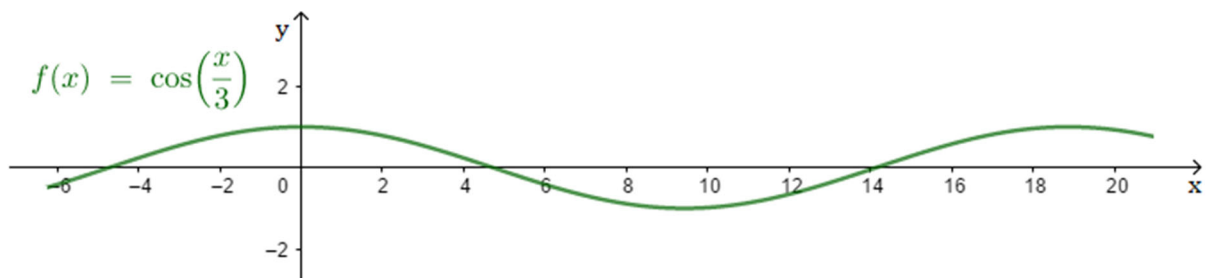
$$p(f) = 2\pi$$

3. Construa o gráfico e determine o período e a imagem da função.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \cos \frac{x}{3}$$

Resolução: O gráfico $f(x) = \cos \frac{x}{3}$ é:



O gráfico da função $f(x) = \cos \frac{x}{3}$.

Analisando o gráfico, temos que:

$$I_m(f) = \{-1, 1\}$$

$$p(f) = 6\pi$$

RESUMO SOBRE A FUNÇÃO COSSENO

1. A função **cosse**no é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \cos x$$

2. O domínio de $f(x) = \cos x$ é $\mathbb{R}$, pois para qualquer valor real de x , existe um e apenas um valor para $\cos x$.

3. O conjunto imagem de $f(x) = \cos x$ é o intervalo $[-1, 1]$, pois $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. A função **cosse**no não é sobrejetora, pois $[-1, 1] \neq \mathbb{R}$, ou seja, sua imagem não é igual ao contradomínio.

5. A função **cosse**no não é injetora, pois para valores diferentes de x temos o mesmo $f(x)$.

6. A função **cosse**no é uma função par $\forall x \in \mathbb{R}$, pois:

$$\cos x = \cos(-x)$$

Como por exemplo,

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad e \quad \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Então:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

ATIVIDADES

1. Determine o período, a imagem e faça o gráfico das funções abaixo:

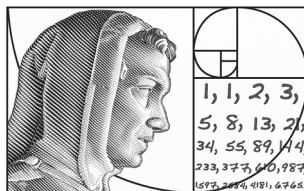
a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = |\cos x|$

c) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

2. Encontre o domínio da função $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

3. Para que valores de t existe x tal que $\cos x = \frac{t+2}{2t-1}$?



AULA 32

FÓRMULAS DA ADIÇÃO



esta aula iniciaremos o nosso estudo das transformações trigonométricas.

A palavra transformação tem sua origem etimológica no termo em latim *transformare*, que significa fazer mudar de forma, de aspecto.

E este significado de transformação também se faz presente nas transformações trigonométricas, pois iremos aplicá-lo à adição, à subtração, à multiplicação e à divisão de dois arcos trigonométricos, transformando-os em fórmulas para se calcular.

Definição: Chamamos de transformações trigonométricas as fórmulas que utilizamos para transformar uma razão trigonométrica em outra em que seja mais fácil calcular o valor do seno, do cosseno e da tangente.

As principais transformações trigonométricas são: soma de dois arcos, diferença de dois arcos, arco duplo, arco metade e transformação em produto. A seguir, veja cada caso em detalhes.

Nesta aula o nosso foco será a fórmula da adição das transformações trigonométricas do seno e do cosseno.

FÓRMULA DA ADIÇÃO

Definição: As fórmulas da adição são usadas para calcular as funções trigonométricas da soma e da diferença, $(a + b)$ e $(a - b)$ respectivamente, de dois números reais quaisquer a e b .

As fórmulas da adição que estudaremos são: seno da soma, seno da diferença, cosseno da soma, cosseno da diferença, tangente da soma, tangente da diferença, cotangente da soma e cotangente da diferença.

Nesta aula estudaremos somente as fórmulas da adição para o seno e cosseno e as fórmulas da adição para a tangente e cotangente serão estudadas na aula seguinte.

Observação: A diferença entra na fórmula da adição, pois é uma adição de fato. Embora considerada uma subtração, na verdade é uma adição com número negativo, como podemos ver abaixo:

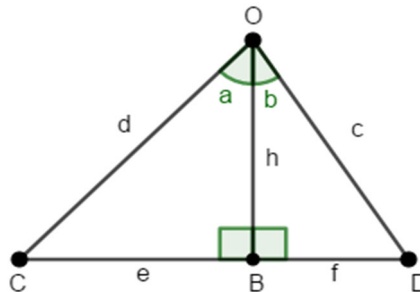
$$(a - b) = [a + (-b)]$$

SENO DA SOMA

Definição: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

Demonstração: Seja dois triângulos equiláteros, como mostra a figura abaixo:



Dois triângulos equiláteros

Calculando as áreas dos triângulos, através do seno de um dos seus ângulos, temos que:

$$A_{BOC} = \frac{e \cdot h}{2} = \frac{h \cdot d \cdot \text{sen } a}{2}$$

$$A_{BOD} = \frac{f \cdot h}{2} = \frac{h \cdot c \cdot \text{sen } b}{2}$$

$$A_{COD} = \frac{d \cdot c \cdot \text{sen}(a + b)}{2}$$

Além disso, temos que:

$$\cos a = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d \cdot \cos a$$

$$\cos b = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \cos b$$

Sabemos que a área do triângulo maior é igual à soma da área dos triângulos menores, então, temos que:

$$A_{COD} = A_{BOC} + A_{BOD}$$

$$\frac{d \cdot c \cdot \text{sen}(a + b)}{2} = \frac{h \cdot d \cdot \text{sen } a}{2} + \frac{h \cdot c \cdot \text{sen } b}{2}$$

Tomando $h = d \cdot \cos a$ e $h = c \cdot \cos b$ iremos modificar os numeradores das frações que estão sendo somadas, então temos que:

$$\frac{d \cdot c \cdot \text{sen}(a + b)}{2} = \frac{\textcolor{red}{h} \cdot d \cdot \text{sen } a}{2} + \frac{\textcolor{red}{h} \cdot c \cdot \text{sen } b}{2}$$

$$\frac{d \cdot c \cdot \text{sen}(a+b)}{2} = \frac{(c \cdot \cos b) \cdot d \cdot \text{sen } a}{2} + \frac{(d \cdot \cos a) \cdot c \cdot \text{sen } b}{2}$$

$$\frac{d \cdot c \cdot \text{sen}(a+b)}{2} = \frac{c \cdot \cos b \cdot d \cdot \text{sen } a}{2} + \frac{d \cdot \cos a \cdot c \cdot \text{sen } b}{2}$$

$$\frac{c \cdot d \cdot \text{sen}(a+b)}{2} = \frac{c \cdot d \cdot \cos b \cdot \text{sen } a}{2} + \frac{c \cdot d \cdot \cos a \cdot \text{sen } b}{2}$$

$$c \cdot d \cdot \text{sen}(a+b) = c \cdot d \cdot \cos b \cdot \text{sen } a + c \cdot d \cdot \cos a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{sen}(a+b) = \frac{c \cdot d \cdot \cos b \cdot \text{sen } a + c \cdot d \cdot \cos a \cdot \text{sen } b}{c \cdot d}$$

$$\text{sen}(a+b) = \frac{(c \cdot d) \cdot \cos b \cdot \text{sen } a}{(c \cdot d)} + \frac{(c \cdot d) \cdot \cos a \cdot \text{sen } b}{(c \cdot d)}$$

$$\text{sen}(a+b) = \cos b \cdot \text{sen } a + \cos a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

■ Q.E.D

Observação: O valor da área do triângulo AOC que é dado pela fórmula $A_{COD} = \frac{d \cdot c \cdot \text{sen}(a+b)}{2}$. Essa fórmula é encontrada através da lei dos senos e da relação do seno de um ângulo diferente do ângulo $\hat{O}$.

SENO DA DIFERENÇA

Definição: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$$

Demonstração: Utilizando o seno da diferença, temos que:

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}[a+(-b)]$$

Aplicando o seno da soma, temos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}[a+(-b)] &= \text{sen } a \cdot \cos(-b) + \text{sen}(-b) \cdot \cos a \\ &= \text{sen } a \cdot \cos b + (-\text{sen } b) \cdot \cos a \\ &= \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a \end{aligned}$$

■ Q.E.D

Observação: Notem que usamos as seguintes relações:

$$\text{sen}(-b) = -\text{sen } b$$

$$\cos(-b) = \cos(b)$$

COSSENO DA SOMA

Definição: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

Demonstração: Como o $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, então temos que:

$$\cos(a + b) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right]$$

$$\cos(a + b) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - a - b\right]$$

$$\cos(a + b) = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

$$\cos(a + b) = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right]$$

$$\cos(a + b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

Como $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ e $\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, temos que:

$$\cos(a + b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

$$= \cos a \cdot \cos b - \sin b \cdot \sin a$$

$$= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

■ Q.E.D

Observação: Notem que usamos as seguintes relações:

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

COSSENO DA DIFERENÇA

Definição: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

Demonstração: Como o $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, então temos que:

$$\cos(a - b) = \cos[a + (-b)]$$

$$\cos(a - b) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (a + (-b))\right]$$

$$\cos(a - b) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - a + b\right]$$

$$\cos(a - b) = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right]$$

$$\cos(a + b) = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right]$$

$$\cos(a - b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

Como $\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ e $\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$, temos que:

$$\cos(a + b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

$$= \cos a \cdot \cos b + \sin b \cdot \sin a$$

$$= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

ATIVIDADES

■ Q.E.D

1. Calcule os valores de:

a) $\cos 15^\circ$

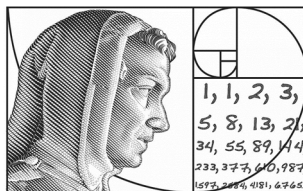
b) $\sin 105^\circ$

c) $\sec 285^\circ$

d) $\sec 255^\circ$

e) $\operatorname{cosec} 15^\circ$

2. Dados $\sin x = \frac{3}{5}$ e $\cos y = \frac{5}{13}$ calcule $\cos(x + y)$, sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$.



AULA 34

FÓRMULAS DE MULTIPLICAÇÃO E DE DIVISÃO



esta aula estudaremos as fórmulas de multiplicação e de divisão.

Iniciaremos o estudo dessa aula com as fórmulas de multiplicação e depois estudaremos as fórmulas de divisão.

FÓRMULAS DE MULTIPLICAÇÃO

As fórmulas de multiplicação são um caso particular das fórmulas de adição, pois multiplicar nada mais é do que somar algarismos iguais. Sendo assim, encontraremos as funções trigonométricas dos arcos $2a$ (arco duplo) e $3a$ (arco triplo).

ARCO DUPLO

Iremos definir e demonstrar as funções trigonométricas de *seno*, *coseno* e *tangente* de $2a$. Estas funções são chamadas de funções trigonométricas dos arcos duplos.

Definição 1: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

Demonstração: Aplicando a fórmula da adição, temos que:

$$\sin 2a = \sin(a + a) = \sin a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

■ Q.E.D

Definição 2: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

ou

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

Demonstração: Aplicando a fórmula da adição, temos que:

$$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \sin a \cdot \sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= \cos^2 a + \cos^2 a - 1 = 2 \cos^2 a - 1$$

E tomando $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, temos que:

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 2(1 - \sin^2 a) - 1 = 2 - 2 \sin^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

■ Q.E.D

Definição 3: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Demonstração: Aplicando a fórmula da adição, temos que:

$$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(a + a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

■ Q.E.D

ARCO TRIPLO

Iremos definir e demonstrar as funções trigonométricas de *seno*, *cos seno* e *tangente* de $3a$. Estas funções são chamadas de funções trigonométricas dos arcos triplos.

Definição 1: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

Demonstração: Aplicando a fórmula da adição, temos que:

$$\begin{aligned} \sin 3a &= \sin(2a + a) = \sin 2a \cdot \cos a + \sin a \cdot \cos 2a \\ &= (2 \sin a \cdot \cos a) \cdot \cos a + \sin a \cdot (1 - 2 \sin^2 a) \\ &= 2 \sin a \cdot \cos^2 a + \sin a \cdot (1 - 2 \sin^2 a) \\ &= 2 \sin a \cdot (1 - \sin^2 a) + \sin a \cdot (1 - 2 \sin^2 a) \\ &= 2 \sin a - 2 \sin^3 a + \sin a - 2 \sin^3 a \\ &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a \end{aligned}$$

■ Q.E.D

Definição 2: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

Demonstração: Aplicando a fórmula da adição, temos que:

$$\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos 2a \cdot \cos a - \sin 2a \cdot \sin a$$

$$\begin{aligned}
&= (2 \cos^2 a - 1) \cdot \cos a - (2 \sin a \cdot \cos a) \cdot \sin a \\
&= 2 \cos^3 a - \cos a - 2 \sin^2 a \cdot \cos a \\
&= 2 \cos^3 a - \cos a - 2(1 - \cos^2 a) \cdot \cos a \\
&= 2 \cos^3 a - \cos a - 2 \cos a + 2 \cos^3 a \\
&= 4 \cos^3 a - 3 \cos a
\end{aligned}$$

■ Q.E.D

Definição 3: Seja $a, b \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}$$

Demonstração: Aplicando a fórmula da adição, temos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(2a + a) &= \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg} a} = \frac{\frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \cdot \operatorname{tg} a} \\
&= \frac{\frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} + \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 a) \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} - \frac{2 \cdot \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} \\
&= \frac{\frac{2 \cdot \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 a - 2 \cdot \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{\frac{3 \cdot \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}{\frac{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}} = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 a}
\end{aligned}$$

■ Q.E.D

Exemplos:

1. Calcule o valor de $\operatorname{sen} 120^\circ$.

Resolução:

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen}(2 \cdot 60^\circ) = 2 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Calcule o valor de $\cos 90^\circ$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\cos 90^\circ &= \cos(3 \cdot 30^\circ) = 4 \cdot \cos^3 30^\circ - 3 \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0
\end{aligned}$$

3. Calcule o valor de $\text{tg } 135^\circ$.

Resolução:

$$\text{tg } 135^\circ = \text{tg}(3 \cdot 45^\circ) = \frac{3 \cdot \text{tg } 45^\circ - \text{tg}^3 45^\circ}{1 - 3 \text{tg}^2 45^\circ} = \frac{3 \cdot 1 - 1^3}{1 - 3 \cdot 1^2} = \frac{3 - 1}{1 - 3} = \frac{2}{-2} = -1$$

FÓRMULAS DE DIVISÃO

Iremos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de $\frac{x}{2}$, sabendo uma das funções circulares de x .

ARCO METADE

A fórmula do arco metade relaciona as funções trigonométricas de um arco x com as funções trigonométricas do arco $\frac{x}{2}$, isto é, dado o valor trigonométrico do arco x , encontraremos o valor do arco $\frac{x}{2}$.

Existem duas formas de encontrarmos o valor do arco metade: dando o $\cos x$ ou dando $\sin x$.

Vejamos abaixo como cada forma procede para encontrar o valor do arco $\frac{x}{2}$ nas funções trigonométricas.

1ª Forma: É dado o $\cos x$

Definição 1: Seja dado $\cos x$ tal que $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Demonstração: Sabemos que $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$. Tomando $2a = x \Rightarrow a = \frac{x}{2}$, então, temos que:

$$\cos 2a = \cos x$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

■ Q.E.D

Definição 2: Seja dado $\cos x$ tal que $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Demonstração: Sabemos que $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$. Tomando $2a = x \Rightarrow a = \frac{x}{2}$, então, temos que:

$$\cos 2a = \cos x$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

■ Q.E.D

Definição 3: Seja dado $\cos x$ tal que $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Demonstração: Sabemos que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, então, temos que:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2} \cdot \frac{2}{1 - \cos x}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

■ Q.E.D

Observação: Os sinais ($\pm$) só tem sentido quando se conhece $\cos x$, sem conhecer o valor de x .

2ª Forma: É dado o $\operatorname{sen} x$

Da mesma forma que é dado o $\cos x$, também é dado o $\operatorname{sen} x$, ou seja, usaremos as três definições de quando é fornecido o $\cos x$ para quando é dado o $\operatorname{sen} x$.

Fornecido $\operatorname{sen} x$ podemos encontrar o $\cos x$ através do Teorema Fundamental da Trigonometria, como segue abaixo:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

E assim, substituímos conforme as definições apresentadas na 1ª Forma, o valor de $\cos x$ encontrado através do $\sin x$ dado para encontrarmos os valores do arco metade das funções trigonométricas.

É DADA O $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Através do arco metade da *tangente*, podemos encontrar os valores trigonométricos de x .

Definição 1: Seja dado $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ tal que $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\sin x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Demonstração: Sabemos que $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$, então temos que:

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot \sin a \cdot \frac{\cos^2 a}{\cos a} = 2 \cdot \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \cos^2 a$$

Como $\cos^2 a = \frac{1}{\sec^2 a}$, temos que:

$$\sin 2a = 2 \cdot \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \cos^2 a = 2 \cdot \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{1}{\sec^2 a} = 2 \cdot \operatorname{tg} a \cdot \frac{1}{\sec^2 a} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{\sec^2 a}$$

Como $\sec^2 a = 1 + \operatorname{tg}^2 a$, temos que:

$$\sin 2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{\sec^2 a} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

Tomando $2a = x \Rightarrow a = \frac{x}{2}$, então, temos que:

$$\sin 2a = \sin x$$

$$\sin x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

■ Q.E.D

Definição 2: Seja dado $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ tal que $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Demonstração: Sabemos que $\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$. Tomando $2a = x \Rightarrow a = \frac{x}{2}$, então, temos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2a &= \operatorname{tg} x \\ \operatorname{tg} x &= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\end{aligned}$$

■ Q.E.D

Definição 3: Seja dado $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ tal que $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Demonstração: Sabemos que $\cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$, então, temos que:

$$\cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}{\frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

■ Q.E.D

Observação: As três fórmulas trigonométricas encontradas a partir da $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ possui uma grande utilidade, pois elas permitem substituímos $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$ por uma única função trigonométrica, a $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Essa substituição é frequentemente utilizada na resolução de equações trigonométricas.

Exemplos:

1. Calcule o valor de *seno*, *coseno* e *tangente* de $\frac{\pi}{8}$.

Resolução: Sabemos que $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$$

2. Seja dado $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ calcule $\operatorname{tg} x$.

Resolução:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

ATIVIDADES

1. Estude a variação da função $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x$.

2. Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen} 2x$.

3. Sendo $\operatorname{cotg} x = \frac{12}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos 2x$.

4. Sendo $\sec x = \frac{25}{24}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule $\operatorname{tg} 2x$.

5. Se $\operatorname{sen} x = \frac{24}{25}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule as funções circulares de $\frac{x}{2}$.

6. Se $\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}$, calcule $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$.

7. Calcule $\operatorname{sen} a$, sabendo que $\operatorname{cotg} \frac{a}{2} = \sqrt{3}$.

8. (U. F. Juiz de Fora - MG) Considere as seguintes afirmativas:

I. $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$

II. $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

III. $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$

IV. $\operatorname{sen}(a \cdot b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b$

Pode-se concluir que:

a) Todas as afirmativas são corretas.

b) Apenas a afirmativa II é correta.

c) Apenas a afirmativa III é correta.

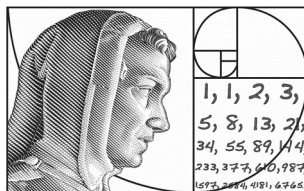
d) As afirmativas II e III são corretas.

e) As afirmativas I e IV são corretas.

9. Simplifique as razões abaixo:

a) $\frac{1 + \cos 2x}{2}$

b) $\frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}$



AULA 39

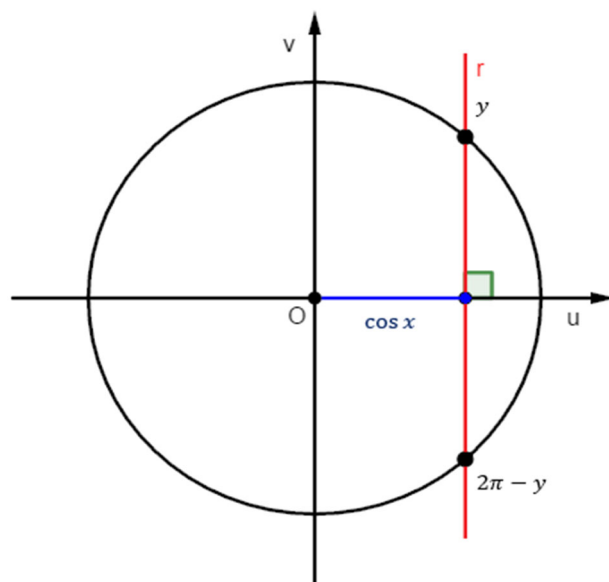
RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $\cos x = \cos y$



esta aula, estudaremos a resolução da equação $\cos x = \cos y$.

Se $\cos x = \cos y$, as extremidades dos arcos de x e y coincidem ou são simétricas em relação ao eixo dos cossenos, ou seja, suas extremidades estão sobre uma reta vertical.

Veja a equação $\cos x = \cos y$ no círculo trigonométrico:



Assim, temos como solução para $x \in [0, 2\pi[$ na equação $\cos x = \cos y$:

$$\begin{cases} x = y \\ x = 2\pi - y \end{cases}$$

Porém, a solução deve ser estabelecida para todo $x \in \mathbb{R}$, e, portanto, temos que:

$$\begin{cases} x = y + 2k\pi \\ x = 2\pi - y + 2k\pi \end{cases}$$

Observação: Em um círculo trigonométrico, temos que:

$$2\pi - y = -y$$

Com isso, podemos descrever o conjunto solução da equação $\cos x = \cos y$ como sendo:

$$\begin{cases} x = y + 2k\pi \\ x = -y + 2k\pi \end{cases}$$

Exemplos:

1. Resolva a equação $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ no intervalo $x \in [0, 2\pi[$.

Resolução: Como $y = \frac{\pi}{4}$, temos que:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

Portanto,

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

2. Resolva a equação $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Como $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos y$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$ então, $y = \frac{5\pi}{6}$. Assim, temos que:

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} \\ x = 2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

Portanto,

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

Em um único conjunto, temos que:

$$S = \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

ATIVIDADES

1. Resolva as seguintes equações, para $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$

b) $\sec x = \sec \frac{2\pi}{3}$

c) $\cos x = 0$

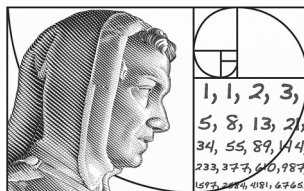
d) $\cos x = 1$

e) $\cos x = -1$

f) $\cos x = \frac{1}{2}$

g) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



AULA 42

RESOLUÇÃO DAS INEQUAÇÕES ENVOLVENDO $\text{sen } x$



Sejam f e g duas funções trigonométricas da variável real x . Para resolvermos a inequação $f(x) > g(x)$ devemos obter o conjunto solução S , isto é, encontrar todos os valores de x que satisfaçam a desigualdade.

A partir dessa aula, trataremos principalmente sobre as Inequações Trigonômétricas Fundamentais, pois para resolvermos as Inequações Trigonômétricas, se faz necessário saber resolver primeiro as Inequações Fundamentais.

Nesta aula, o nosso objetivo é resolver inequações envolvendo $\text{sen } x$.

INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

A maioria das inequações trigonométricas podem ser reduzidas a seis inequações:

1ª) $\text{sen } x > a$

2ª) $\text{sen } x < a$

3ª) $\cos x > a$

4ª) $\cos x < a$

5ª) $\text{tg } x > a$

6ª) $\text{tg } x < a$

sendo a um número real dado. As seis inequações são chamadas de **inequações fundamentais**.

Agora, iremos resolver cada uma das inequações citadas acima.

RESOLUÇÃO DA INEQUAÇÃO $\text{sen } x > a$

Para resolvermos a inequação $\text{sen } x > a$, devemos dividi-la em dois casos:

1º Caso: $0 \leq a < 1$

Neste caso, encontraremos o conjunto solução da inequação $\text{sen } x > a$, onde a é $0 \leq a < 1$. Vemos na imagem abaixo que o seno dos arcos α e $\pi - \alpha$ é a . Assim, todos os valores do arco em vermelho são soluções da inequação.

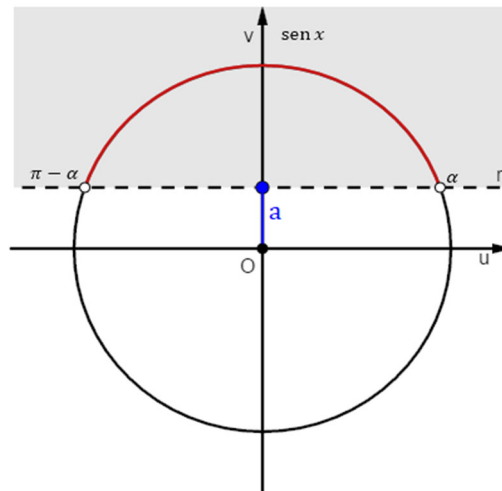


Figura 2

Portanto, o conjunto solução pode ser escrito da seguinte forma:

Na primeira volta:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \pi - \alpha\}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha + 2k\pi < x < \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

ou

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha + 2k\pi < x < (2k + 1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

2º Caso: $-1 < a < 0$

Neste caso, encontraremos o conjunto solução da inequação $\text{sen } x > a$, onde a é $-1 < a < 0$. Vemos na figura 5 que o seno dos arcos $\pi + \alpha$ e $2\pi - \alpha$ é a . Assim, todos os valores do arco em vermelho são soluções da inequação.

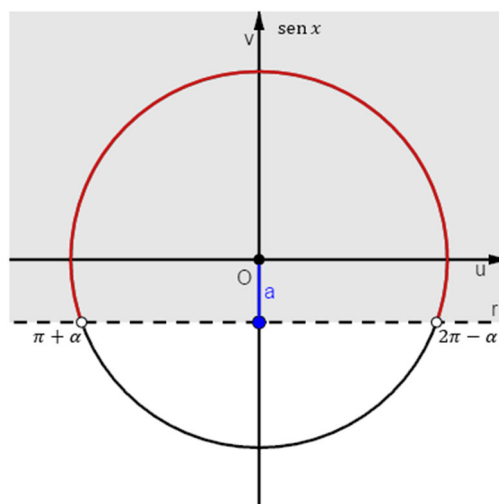


Figura 3

Portanto, o conjunto solução pode ser escrito da seguinte forma:

Na primeira volta:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \pi + \alpha \quad \text{ou} \quad 2\pi - \alpha < x < 2\pi\}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < (\pi + \alpha) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad (2\pi - \alpha) + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\}$$

ou

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < (2k + 1)\pi + \alpha \quad \text{ou} \quad (k + 1)2\pi - \alpha < x < (k + 1)2\pi\}$$

Exemplos:

Resolva a inequação $\text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ no intervalo na primeira volta.

Resolução: Como $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ marcamos o ponto a no eixo dos senos (eixo y) e depois traçamos uma reta horizontal encontrando dois arcos cuja medida é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Os arcos são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$, como mostra a figura a seguir.

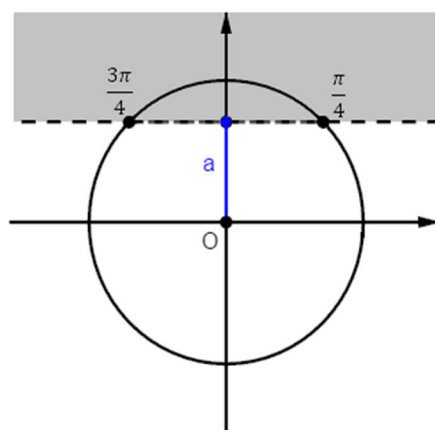


Figura 4

Assim, temos que:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$$

Resolva a inequação $\text{sen } x > -\frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Como $a = -\frac{1}{2}$ marcamos o ponto a no eixo dos senos (eixo y) e depois traçamos uma reta horizontal encontrando dois arcos cuja medida é $-\frac{1}{2}$. Os arcos são $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$, como mostra a figura abaixo.

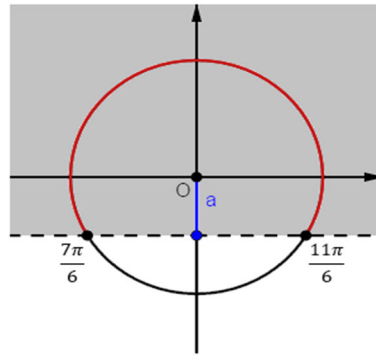


Figura 5

Na primeira volta, temos que:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{7\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi \right\}$$

Assim, temos que:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \right\}$$

RESOLUÇÃO DA INEQUAÇÃO $\text{sen } x < a$

Para resolvermos a inequação $\text{sen } x < a$, devemos dividi-la em dois casos:

1º Caso: $-1 < a < 0$

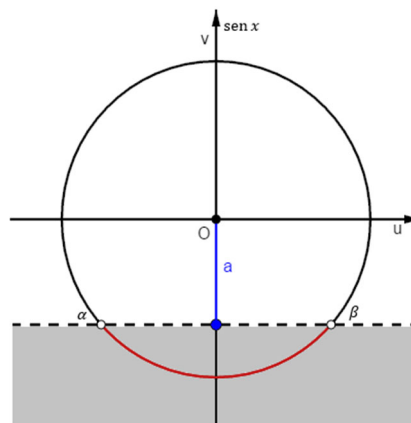


Figura 6

Neste caso, encontraremos o conjunto solução da inequação $\text{sen } x < a$, onde a é $-1 < a < 0$. Vemos na imagem abaixo que o seno dos arcos α e β é a . Assim, todos os valores do arco em vermelho são soluções da inequação.

Portanto, o conjunto solução pode ser escrito da seguinte forma:

Na primeira volta:

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta \}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid \alpha + 2k\pi < x < \beta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \}$$

2º Caso: $0 < a < 1$

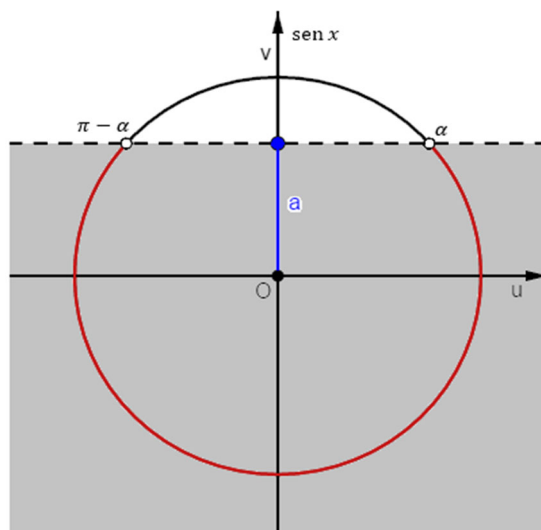


Figura 7

Neste caso, encontraremos o conjunto solução da inequação $\text{sen } x < a$, onde a é $0 < a < 1$. Vemos na imagem abaixo que o seno dos arcos α e $\pi - \alpha$ é a . Assim, todos os valores do arco em vermelho são soluções da inequação.

Portanto, o conjunto solução pode ser escrito da seguinte forma:

Na primeira volta:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \alpha \quad \text{ou} \quad \pi - \alpha < x < 2\pi\}$$

No conjunto dos reais:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad (\pi - \alpha) + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\}$$

ou

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x < \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad (2k + 1)\pi - \alpha < x < (k + 1)2\pi\}$$

Exemplos:

1. Resolva a inequação $\text{sen } x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ no intervalo da primeira volta.

Resolução: Como $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ marcamos o ponto a no eixo dos senos (eixo y) e depois traçamos uma reta horizontal encontrando dois arcos cuja medida é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Os arcos são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$, como mostra a figura ao lado.

Assim, temos que:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$$

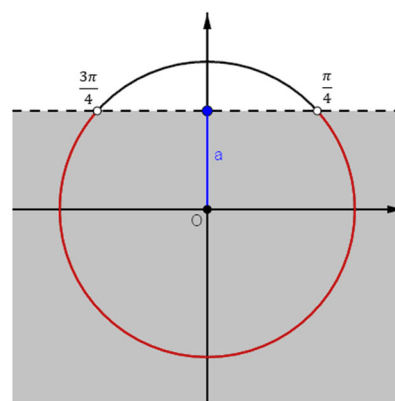


Figura 8

2. Resolva a inequação $\text{sen } x < -\frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Como $a = -\frac{1}{2}$ marcamos o ponto a no eixo dos senos (eixo y) e depois traçamos uma reta horizontal encontrando dois arcos cuja medida é $-\frac{1}{2}$. Os arcos são $\frac{7\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$, como mostra a figura ao lado.

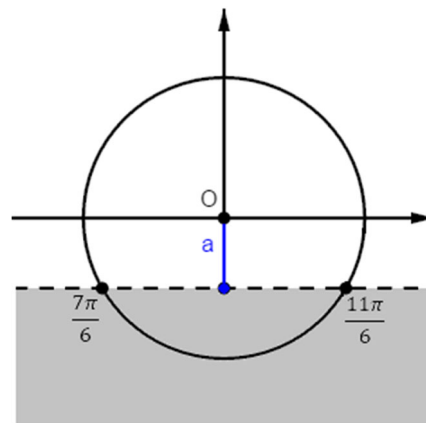


Figura 9

Na primeira volta, temos que:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6} \right\}$$

Assim, temos que:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

ATIVIDADES

1. Resolva as seguintes inequações, para $x \in \mathbb{R}$:

a) $\text{sen } x > \text{sen } \frac{\pi}{5}$

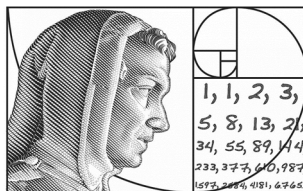
b) $\text{sen } x < \frac{1}{2}$

c) $\text{sen } x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen } x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{sen } x < -\frac{1}{2}$



AULA 46

FUNÇÃO ARCO COSSENO

Nesta aula, estudaremos a função arco cosseno.

Definição: Seja a função $f: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ com

$$f(x) = \arccos x$$

Chamamos f de função arco cosseno.

Esta função é a inversa da função $g: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ com $g(x) = \cos x$.

Pela definição, podemos notar que a função arco cosseno é a função inversa da função cosseno, ou seja, **quando queremos descobrir o resultado do $\arccos x$, devemos encontrar o ângulo que representa o cosseno de x** , como podemos ver abaixo:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x, \quad y \in [0, \pi]$$

Observação 1: O domínio da função arco cosseno é $[-1, 1]$.

Observação 2: A imagem da função arco cosseno é $[0, \pi]$.

Observação 3: A função arco cosseno também pode ser escrita como $\cos^{-1} x$.

Exemplos:

1. Encontre o valor do $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resolução: Tomando $y = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos que:

$$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos y = \cos \frac{\pi}{4}$$

Portanto, em um intervalo onde $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que:

$$y = \frac{\pi}{4}$$

2. Encontre o valor do $\arccos \frac{1}{2}$.

Resolução: Tomando $y = \arccos \frac{1}{2}$, temos que:

$$\cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = \cos \frac{1}{2}$$

Portanto, em um intervalo onde $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que:

$$y = \frac{\pi}{3}$$

PROPRIEDADES

Vejamos as propriedades da função $f(x) = \arccos x$:

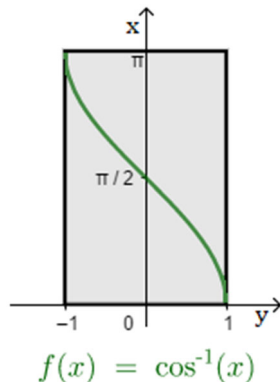
1ª Propriedade: f é injetora e sobrejetora.

2ª Propriedade: a raiz (zero da função) de f é dada por

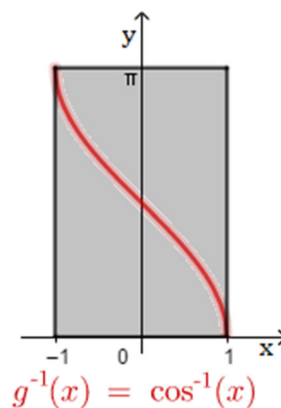
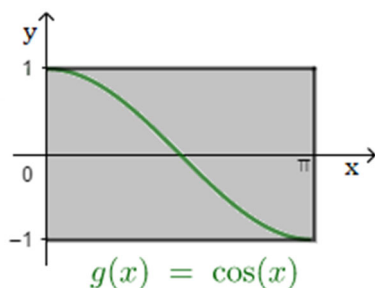
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \arccos x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

GRÁFICO

O gráfico da função $f(x) = \arccos x$ é da seguinte forma:



Observação 4: O gráfico $g(x) = \cos x$ e $g^{-1}(x) = \arccos x$ são simétricos em relação à reta $y = x$. Assim, podemos obter o gráfico de $\arccos x$ através do gráfico de $\cos x$.



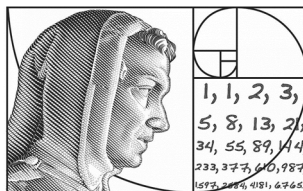
ATIVIDADES

1. Determine o valor de $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Calcule as expressões abaixo:

a) $\operatorname{tg} \left(\arccos \frac{2}{5} \right)$

b) $\operatorname{sen} \left(\arccos \frac{5}{13} + \arcsin \frac{7}{25} \right)$



AULA 51

IGUALDADE DE MATRIZES



esta aula, estudaremos a igualdade de matrizes.

Definição: Sejam duas matrizes A e B do tipo $m \times n$, tal que $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

A definição nos mostra que para termos duas matrizes iguais, elas devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes iguais.

Exemplos:

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$, temos que:

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}, \text{ pois } a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21} \text{ e } a_{22} = b_{22}.$$

2. Seja $C = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$, temos que:

$$C \neq D \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}, \text{ pois } a_{21} \neq b_{21} \text{ e } a_{22} \neq b_{22}.$$

3. Seja $E = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, temos que:

$$E \neq F \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \text{ pois } E \text{ e } F \text{ não têm o mesmo tipo.}$$

4. Seja $G = \begin{bmatrix} 3x + 2y & 2 \\ 2 & 3x - 3y \end{bmatrix}$ e $H = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

As duas matrizes possuem a mesma ordem, então para que sejam iguais devemos ter:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos que:

$$y = 2 \text{ e } x = 1$$

Portanto, as matrizes G e H são iguais quando $x = 1$ e $y = 2$.

ATIVIDADES

1. Determine x e y de modo que se tenha

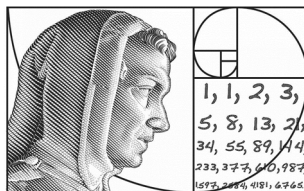
$$\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$$

2. Determine x , y , z e t de modo que se tenha

$$\begin{bmatrix} x^2 & 2x & y \\ 4 & 5 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ z & 5t & t \end{bmatrix}$$

3. Encontre o valor de $c + d$ sabendo que as matrizes A e B , dadas abaixo, são iguais.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ d & 2 \end{bmatrix}$$



AULA 54

PRODUTO DE UM NÚMERO POR MATRIZ



esta aula, estudaremos o produto de um número por uma matriz.

Definição: Sejam um número $k \in \mathbb{R}$ e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chamamos de **produto kA** a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i e j .

$$\begin{aligned}
 k \cdot A &= k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} & \dots & \dots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} & \dots & \dots & k \cdot a_{2n} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} & k \cdot a_{33} & \dots & \dots & k \cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & k \cdot a_{m3} & \dots & \dots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix} = B
 \end{aligned}$$

Multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k .

Exemplos:

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule $3A$.

Resolução:

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot 8 & 3 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -15 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$$

2. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule $2B$.

Resolução:

$$2B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 14 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Seja $C = \begin{bmatrix} 30 & -18 \\ 5 & 15 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$. Calcule $\frac{1}{2}C$.

Resolução:

$$\frac{1}{2}C = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 30 & -18 \\ 5 & 15 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ \frac{5}{2} & \frac{15}{2} \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Além da adição de matrizes, o produto de um número por uma matriz possui algumas propriedades.

Vejamos, abaixo, as propriedades das matrizes na adição.

Teorema: O produto de um número por uma matriz apresenta as seguintes propriedades:

1ª propriedade: $k \cdot (p \cdot A) = (k \cdot p) \cdot A$

2ª propriedade: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

3ª propriedade: $(k + p) \cdot A = k \cdot A + p \cdot A$

4ª propriedade: $1 \cdot A = A$

em que **A** e **B** são matrizes quaisquer do tipo $m \times n$ e **a**, **b** $\in \mathbb{R}$ quaisquer.

Observação: A demonstração ficará a cargo do aluno.

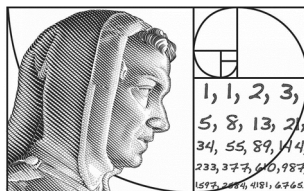
ATIVIDADES

1. Calcule as matrizes $2A$, $\frac{1}{3}B$ e $\frac{1}{2}(A + B)$, sendo dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $3A + 2B$.

3. Demonstre que $1 \cdot A = A$.



AULA 59

MATRIZ INVERSA



esta aula, estudaremos a matriz inversa.

Definição: Seja A uma matriz quadrada da ordem n . Chamamos A de **matriz inversível** se existir uma matriz B , tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Observação: Se a matriz A não for inversível, chamamos A de **matriz singular**.

Se uma matriz A for inversível, como nos mostra a definição, temos que a matriz é única, conforme mostra o teorema abaixo.

Teorema: Se A é inversível, então a matriz B é única, tal que

$$AB = BA = I_n$$

Demonstração: Supondo que exista uma matriz C , tal que

$$AC = CA = I_n,$$

então, temos que:

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B.$$

Portanto, B é único, pois $C = B$.

■ Q.E.D

Agora, iremos definir uma notação para a matriz inversa de A :

Definição: Seja A uma matriz inversível. Chamamos **inversa de A** a matriz A^{-1} , tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Observação: A matriz A^{-1} é quadrada de ordem n .

Exemplos:

1. A inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Encontre, se existir, a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução: Supondo que exista $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então, temos que:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + 3c & 2b + 3d \\ 6a + 4c & 6b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos dois sistemas:

$$\begin{cases} 2a + 3c = 1 \\ 6a + 4c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b + 3d = 0 \\ 6b + 4d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, obtemos:

$$a = -\frac{2}{5}; b = \frac{3}{10}; c = \frac{3}{5}; d = -\frac{1}{5}$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Verificando $A^{-1} \cdot A$, temos que:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, A^{-1} existe e vale:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

ATIVIDADES

1. Determine a inversa de cada matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$