
ENSINO MÉDIO

– 2º ANO –

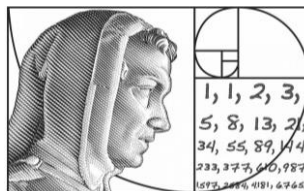
MATEMÁTICA

VOLUME 2

Apostila do 2º ano do Ensino Médio, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



MATEMÁTICA



AULA 63

COMPLEMENTO ALGÉBRICO



esta aula, estudaremos o complemento algébrico.

Definição: Seja uma Matriz M de ordem $n \geq 2$, tal que a_{ij} é um elemento de M . O **Complemento Algébrico do elemento a_{ij}** é o número $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, indicado por A_{ij} (ou cofator de a_{ij}).

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Em outras palavras, podemos dizer que o complemento algébrico será o produto entre o menor complementar e o $(-1)^{i+j}$.

Exemplos:

1. Seja $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ e calculemos A_{11} .

Resolução: Para calcularmos D_{11} devemos suprimir a linha 1 e a coluna 1, tal que:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 6 = 34$$

Assim, temos que:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = (-1)^2 \cdot 34 = 1 \cdot 34 = 34$$

2. Seja $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ e calculemos A_{22} .

Resolução: Para calcularmos D_{22} devemos suprimir a linha 2 e a coluna 2, tal que:

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20$$

Assim, temos que:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22} = (-1)^4 \cdot 20 = 1 \cdot 20 = 20$$

3. Seja $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ e calculemos A_{32} .

Resolução: Para calcularmos D_{32} devemos suprimir a linha 3 e a coluna 2, tal que:

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$$

Assim, temos que:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot D_{32} = (-1)^5 \cdot 7 = (-1) \cdot 7 = -7$$

ATIVIDADES

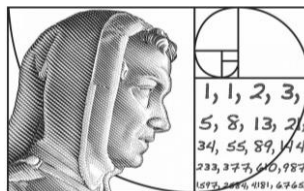
1. Encontre o cofator de 3 na matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & 7 \\ -1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

2. Determine o cofator do elemento a_{23} da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Seja $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ e calculemos A_{23} .

4. Seja $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ e calculemos A_{31} .



AULA 68

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES – PARTE III



esta aula, daremos continuidade ao estudo das propriedades dos determinantes apresentando mais três propriedades.

As propriedades que estudaremos são as seguintes: a Adição de Determinantes, o Teorema da Combinação Linear e o Teorema de Jacobi.

ADIÇÃO DE DETERMINANTES

Propriedade 8: Seja M uma Matriz de ordem n , em que os elementos da j -ésima coluna são, tais que:

$$a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$$

$$a_{2j} = b_{2j} + c_{2j}$$

$$a_{3j} = b_{3j} + c_{3j}$$

$$\vdots$$

$$a_{nj} = b_{nj} + c_{nj}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (b_{1j} + c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j} + c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & (b_{3j} + c_{3j}) & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj} + c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Coluna j

Então, teremos:

$$\det M = \det M' + \det M''$$

em que M' é a Matriz que se obtém de M , substituindo os elementos a_{ij} da j -ésima coluna pelos elementos b_{ij} ($1 \leq i \leq n$), e M'' é a Matriz que se obtém de M , substituindo os elementos a_{ij} da j -ésima coluna pelos elementos c_{ij} ($1 \leq i \leq n$).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & (b_{1j} + c_{1j}) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & (b_{2j} + c_{2j}) & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & (b_{3j} + c_{3j}) & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & (b_{nj} + c_{nj}) & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & b_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & c_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demonstração: Os cofatores dos elementos da j -ésima coluna de M são os mesmos que os da j -ésima coluna de M' e M'' .

Assim, resolvendo o Determinante de M , utilizando a j -ésima coluna, temos que:

$$\det M = (b_{1j} + c_{1j}) \cdot A_{1j} + (b_{2j} + c_{2j}) \cdot A_{2j} + (b_{3j} + c_{3j}) \cdot A_{3j} + \dots + (b_{nj} + c_{nj}) \cdot A_{nj}$$

$$\det M = (b_{1j} + c_{1j}) \cdot A_{1j} + (b_{2j} + c_{2j}) \cdot A_{2j} + (b_{3j} + c_{3j}) \cdot A_{3j} + \dots + (b_{nj} + c_{nj}) \cdot A_{nj}$$

$$\det M = \det M' + \det M''$$

■ Q.E.D

Observação: A propriedade é válida, se tivermos uma linha ou coluna cujos elementos se decompõem em uma soma.

Exemplos:

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & 10 & 7 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} x+y & a & b \\ y+z & c & d \\ z+x & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & b \\ y & c & d \\ z & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & a & b \\ z & c & d \\ x & e & f \end{vmatrix}$$

TEOREMA DA COMBINAÇÃO LINEAR

Propriedade 9: Se uma Matriz quadrada $M = [a_{ij}]$, de ordem n , tem uma linha (ou coluna) que é Combinação Linear de outras linhas (ou colunas), então $\det M = 0$.

Para linhas:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \text{ se}$$

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_{n-1} = L_n$$

Para colunas:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_{n-1} = C_n$$

Exemplos:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Pois, temos que:

$$2C_1 + C_2 = C_3$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 = 5 \\ 2 \cdot 2 + 4 = 8 \\ 2 \cdot 5 + (-1) = 9 \end{cases}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pois, temos que:

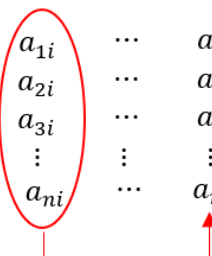
$$L_1 + (-1)L_2 = L_3$$

$$\begin{cases} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 = 0 \\ 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = 2 \\ 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 = 1 \end{cases}$$

TEOREMA DE JACOBI

Propriedade 10: Adicionando a uma fila de uma Matriz M , de ordem n , uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova Matriz M' , tal que $\det M' = \det M$.

Demonstração: Seja uma Matriz M , tal que:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3l} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$


Adicionando à j -ésima coluna à i -ésima multiplicada pela constante k , obtemos:

$$M' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & (a_{1l} + k \cdot a_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & (a_{2l} + k \cdot a_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & (a_{3l} + k \cdot a_{3i}) & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & (a_{nl} + k \cdot a_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Pela propriedade da Adição de Determinantes, temos que:

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3l} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & k \cdot a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & k \cdot a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & k \cdot a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & k \cdot a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Pela propriedade das Filas Paralelas Proporcionais, temos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & k \cdot a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & k \cdot a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & k \cdot a_{3i} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & k \cdot a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Portanto,

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3i} & \cdots & a_{3l} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det M$$

Exemplos:

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 93$$

Substituindo a 3ª coluna pela soma dessa mesma coluna com o quádruplo da 1ª:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 6 & 4 & 25 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = 93$$

$C_3 \rightarrow C_3 + 4C_1$

Observação: C_3 é a coluna 3 e C_1 é a coluna 1.

Observação: Com esta propriedade pode-se introduzir zeros em uma fila da Matriz, sem alterar o seu Determinante, e assim, facilitando a resolução do cálculo do Determinante, através do Teorema de Laplace.

ATIVIDADES

1. Calcule o valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Verifique a identidade seguinte, aplicando as propriedades dos Determinantes:

$$\begin{vmatrix} \cos 2a & \cos^2 a & \sin^2 a \\ \cos 2b & \cos^2 b & \sin^2 b \\ \cos 2c & \cos^2 c & \sin^2 c \end{vmatrix} = 0$$

3. Demonstre, sem desenvolver, o Determinante que:

$$\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} = 0$$

4. Prove que o Determinante é múltiplo de 17, sem desenvolvê-lo. Dado:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

5. Demonstre a identidade:

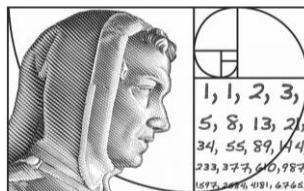
$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & c^2 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

6. Determine o valor da soma

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 & -5 & 1 \\ 8 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

7. (Vunesp) Determine os valores de θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ de maneira que o Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = 0$$



AULA 71

MATRIZ DE VANDERMONDE

Nesta aula, estudaremos a matriz de Vandermonde e suas propriedades.

MATRIZ DE VANDERMONDE (OU DAS POTÊNCIAS)

Definição: Chamamos **Matriz de Vandermonde**, ou das Potências, toda Matriz de ordem $n \geq 2$, do tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

As colunas destas Matrizes são formadas por potências de mesma base com expoente inteiro, que variam de 0 até $n - 1$, isto é, as colunas formam uma progressão geométrica.

Observação: O Determinante de uma Matriz de Vandermonde é indicado por $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Observação: Os elementos da 2ª linha **são** chamados de elementos característicos da Matriz.

PROPRIEDADE DA MATRIZ DE VANDERMONDE

O Determinante $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é igual ao produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos característicos, com a condição de que, nas diferenças, o minuendo tenha índice maior que o subtraendo.

$$V(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$$

Exemplos:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 16 & 25 \end{vmatrix} = (5 - 4) \cdot (5 - 2) \cdot (4 - 2) = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 16 & 25 & 25 \\ 8 & 1 & -27 & 125 \end{vmatrix} = 8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-1) = -1920$$

ATIVIDADES

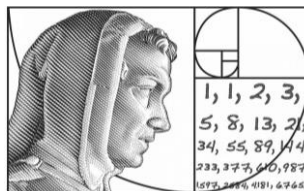
1. Calcule o Determinante:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 27 & 125 & 343 \end{vmatrix}$

2. Calcule o valor do Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 & (\log 2000)^2 \\ (\log 2)^3 & (\log 20)^3 & (\log 200)^3 & (\log 2000)^3 \end{vmatrix}$$



AULA 75

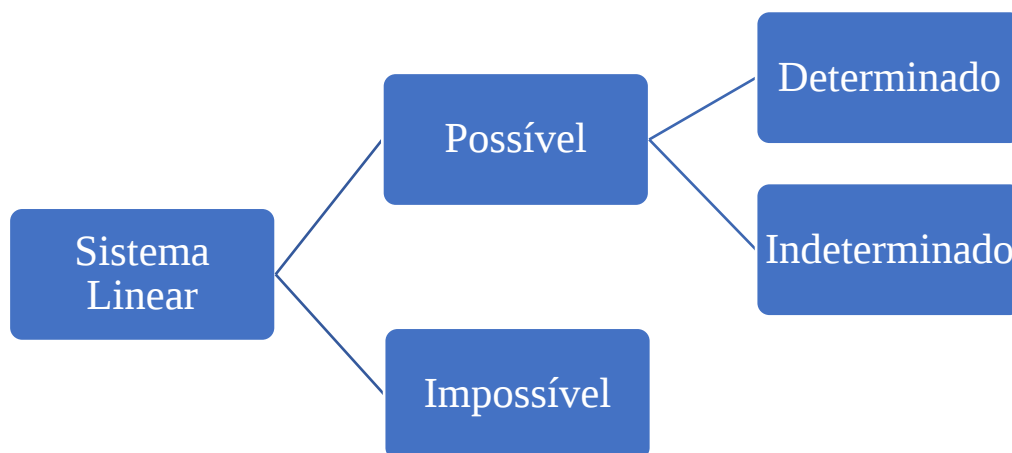
CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS LINEARES

Nesta aula, estudaremos a classificação dos sistemas lineares.

Os sistemas lineares são classificados conforme a quantidade de soluções que possuem, isto é, se o **sistema possui solução** são chamados de **sistemas possíveis** e se **não possui solução** são chamados de **sistemas impossíveis**. Os sistemas possíveis são divididos em duas partes: determinados e indeterminados.

Sistema possível determinado são os **sistemas que possuem uma única solução** e o **sistema possível indeterminado** são os **sistemas que possuem infinitas soluções**.

Vejamos abaixo o fluxograma da classificação dos sistemas lineares.



Exemplos:

1. Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 12x + 8y = 24 \end{cases}$$

Pelo método da adição, temos que:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 12x + 8y = 24 \end{cases} \cdot (-4) \Rightarrow \begin{cases} -12x - 8y = -24 \\ 12x + 8y = 24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -12x - 8y = -24 \\ 12x + 8y = 24 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array}$$

Qualquer valor atribuído a x e a y solucionam a equação. Logo, temos infinitas soluções.

Portanto, é um **sistema possível indeterminado**.

2. Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ 9x + 9y = 6 \end{cases}$$

Pelo método da adição, temos que:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ 9x + 9y = 6 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (9) \\ \cdot (-4) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 36x + 36y = 36 \\ -36x - 36y = -24 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 36x + 36y = 36 \\ -36x - 36y = -24 \\ \hline 0x + 0y = 12 \end{array}$$

Qualquer valor atribuído a x e a y não solucionam a equação, pois é impossível somar $0x$ e $0y$ e resultar em 12.

Portanto, é um **sistema impossível**.

3. Seja o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Pelo método da adição, temos que:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \cdot (-2) \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -16 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -16 \\ 2x - y = 1 \\ \hline 0x - y = -15 \end{array}$$

No sistema, encontramos um valor para y e é único. Logo, teremos um único valor para x .

Portanto, é um **sistema possível determinado**.

Observação: Sistemas lineares possíveis e indeterminados sempre chegarão a uma equação indeterminada do tipo:

$$0x + 0y = 0$$

Observação: Sistemas lineares impossíveis sempre chegarão a uma equação impossível do tipo:

$$0x + 0y = b \quad (\text{com } b \neq 0)$$

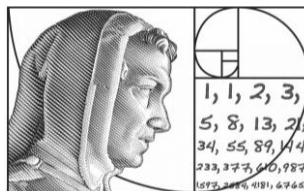
ATIVIDADES

1. (FUVEST-2012) Em uma festa com n pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número n de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a:

- a) 100
- b) 105
- c) 115
- d) 130
- e) 135

2. Classifique os sistemas abaixo e encontre as soluções quando tiver.

- a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 5x + 12y = 8 \\ 15x + 36y = 32 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} 8x + 7y = 15 \\ 96x + 84y = 180 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$
- e) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 6x - 6y = 10 \end{cases}$



AULA 80

MATRIZ ESCALONADA

Nesta aula, estudaremos a matriz escalonada.

Definição: Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Essa matriz A é uma **matriz escalonada** ou está na **forma escalonada** se o número de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo de uma linha, aumenta, linha por linha, até que restem eventualmente apenas linhas nulas.

Vejamos alguns exemplos de matrizes que estão na forma escalonada:

1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ LINHA-EQUIVALENTE

Definição: Dizemos que a matriz B é **linha-equivalente** à matriz A , se B for obtida de A por meio de uma sequência finita de operações, chamadas operações elementares sobre linhas. Tais operações são:

1. Troca de posição de duas linhas.
2. Multiplicação de uma linha qualquer por um número $k \neq 0$.
3. Substituição de uma linha pela soma desta com outra qualquer.

Assim, com estas três operações podemos, dada uma matriz A , encontrar uma matriz B na forma escalonada, linha-equivalente a A .

Exemplos:

1. Seja dada a matriz A ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando a terceira operação, onde iremos substituir a segunda linha pela sua soma, com a primeira multiplicada por -2 , temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 3 & 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Substituindo a terceira linha pela sua soma, com a primeira multiplicada por -3 , temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

Usando a segunda operação, onde iremos multiplicar a segunda linha por -1 , temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Substituindo a terceira linha pela sua soma com a segunda, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

é uma matriz escalonada linha-equivalente a A .

Observação: As **operações elementares sobre linhas** de uma matriz A são análogas às operações para o escalonamento de um sistema linear. Tal fato será evidenciado quando, mais adiante, estudarmos o Teorema de Rouché-Capelli.

ATIVIDADES

1. Escalone as matrizes abaixo:

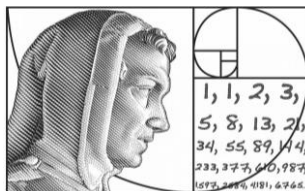
$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 15 \\ 3 & 4 & 2 & 10 \\ 1 & 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$



AULA 84

AVALIAÇÃO

1. Encontre uma solução para a equação linear $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, diferente da solução $(0, 0, 0)$.

2. Verifique se $(1, 0, -2, 1)$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y - 2z - 4t = 5 \\ 2x - 4y + 3z - 5t = -9 \\ -x + 2y - 5z + 3t = 12 \end{cases}$$

3. Escreva na forma matricial os sistemas lineares nas incógnitas x , y e z :

a)
$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 1 \\ 2x - 2y + 3z = 8 \\ x + y - z = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (\sin \theta)x + (\cos \varphi)y = 6 \\ (\cos \varphi)x + (\sin \theta)y = 4 \end{cases}$$

4. Escreva na forma de sistemas lineares a representação matricial abaixo:

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Resolva o sistema abaixo utilizando a Regra de Cramer.

a)
$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$$

6. Mostre que o sistema abaixo tem solução única:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ 5x - y = 7 \end{cases}$$

7. Escalone e classifique os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 3x - y - 2z + t = 2 \\ -x - 2y + 3z + 2t = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = -1 \\ y - z + 2t = 2 \\ 2x + z - t = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ -2x + 5y + 2z = 3 \\ -x + 3y - z = 2 \end{cases}$

8. Resolva o sistema:

a) $\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = 26 \\ x - 7y + z = -16 \\ 5x - y + 3z = 14 \end{cases}$

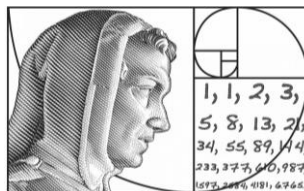
9. Determine o valor de a para que o sistema abaixo seja indeterminado:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + az = 0 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

10. Classifique e resolva os sistemas abaixo, utilizando o teorema de Rouché-Capelli.

a) $\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 3z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$



AULA 86

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM



esta aula, estudaremos o Princípio Fundamental da Contagem.

Definição: O **Princípio Fundamental da Contagem** diz que quando um evento é composto por duas etapas sucessivas, de tal forma que a primeira etapa pode acontecer de ***m*** maneiras e a segunda etapa de ***n*** maneiras, consideramos que, o número total de possibilidades do evento ocorrer é dado pelo produto

$$m \cdot n$$

Observação: Isso vale para um evento com 3 ou mais etapas sucessivas, ou seja, basta multiplicar as possibilidades de cada evento.

Vamos dividir o Princípio Fundamental da Contagem em dois casos: o primeiro será com dois ou mais conjuntos e o segundo será apenas com um único conjunto.

Caso 1: Considere ***n*** conjuntos finitos quaisquer, tais que:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{a_1, a_2, \dots, a_{p_1}\} \quad \#A = p_1 \\ B = \{b_1, b_2, \dots, b_{p_2}\} \quad \#B = p_2 \\ \vdots \\ Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{p_n}\} \quad \#Z = p_n \end{array} \right\} \text{onde cada } p_i \text{ é um número natural}$$

Então, o número de *n*-uplas ordenadas (sequência de ***n*** elementos) do tipo

$$(a_i, b_j, \dots, z_q)$$

Onde

$$a_i \in A, \forall i = 1, 2, \dots, p_1$$

$$b_j \in B, \forall j = 1, 2, \dots, p_2$$

$$\vdots$$

$$z_q \in Z, \forall q = 1, 2, \dots, p_n$$

É dado pelo produto:

$$(\#A) \cdot (\#B) \cdot \dots \cdot (\#Z)$$

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

Demonstração: A demonstração ocorrerá pelo Princípio da Indução Finita.

Para $n = 2$ (dois conjuntos), é válido pelo Lema 1.

Supondo que seja válida para n conjuntos, iremos provar que vale para $(n + 1)$ conjuntos.

$$(n+1) \text{ conjuntos} \left\{ \begin{array}{ll} A = \{a_1, a_2, \dots, a_{p_1}\} & \#A = p_1 \\ B = \{b_1, b_2, \dots, b_{p_2}\} & \#B = p_2 \\ \vdots & \vdots \\ W = \{w_1, w_2, \dots, w_{p_q}\} & \#W = p_q \\ Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{p_{q+1}}\} & \#Z = p_{q+1} \end{array} \right\} n \text{ conjuntos}$$

Para n conjuntos temos a seguinte sequência $(a_j, b_j, \dots, w_j)$ com n elementos.

Por hipótese de indução, temos que existem $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_q$ sequências para n conjuntos.

Para $(n + 1)$ conjuntos temos que existem $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_q$ sequências e p_{q+1} elementos pertencentes ao conjunto Z .

Então, cada sequência $(a_j, b_j, \dots, w_j, z_j)$ consiste de uma sequência $(a_j, b_j, \dots, w_j)$ e um elemento $z_j \in Z$.

Portanto, pelo Lema 1, o número de sequências do tipo $(a_j, b_j, \dots, w_j, z_j)$ é:

$$(p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_q) \cdot p_{q+1} = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_q \cdot p_{q+1}$$

O teorema é válido $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

■ Q.E.D

Observação: O símbolo $\#A$ representa a cardinalidade do conjunto A , ou seja, é a quantidade de elementos que o conjunto A possui.

Caso 2: Seja um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ com $m \geq 2$. Então o número de r -uplas ordenadas (sequência com r elementos), formadas com elementos **distintos dois a dois** de A , é dado por:

$$\underbrace{m.(m-1).(m-2).\dots.[m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$$

Demonstração: A demonstração ocorrerá pelo Princípio da Indução Finita.

Para $r = 2$ temos $m.(n-1)$ que é válido pelo Lema 2.

Supondo que seja válida para uma r -uplas ordenadas, iremos provar que vale para $(r+1)$ -uplas ordenadas.

Por hipótese de indução, temos uma sequência com r elementos

$$\underbrace{m.(m-1).(m-2).\dots.[m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$$

Para formarmos uma $(r+1)$ -uplas ordenadas temos que existem uma sequência com r elementos e $(m-r)$ elementos faltantes pertencentes ao conjunto A.

$$\underbrace{\underbrace{(m).(m-1).(m-2).\dots.[m-(r-1)]}_{r \text{ elementos}} \cdot \underbrace{\dots.[2].[1]}_{(m-r) \text{ elementos}}}_{m \text{ elementos}}$$

Portanto, pelo Lema 2, temos que:

$$\underbrace{m.(m-1).(m-2).\dots.[m-(r-1)].[m-r]}_{(r+1) \text{ fatores}}$$

■ Q.E.D

Exemplos:

1. Uma corrida possui quinze atletas. Quantos resultados existem para o 1º, 2º e 3º lugares?

Resolução: Cada resultado para o 1º, 2º e 3º lugares representa uma tripla ordenada.

- - -

Para o primeiro lugar temos 8 atletas que podem ser o primeiro a cruzar a linha de chegada.

8 - -

Após, o primeiro colocado, teremos 7 atletas que podem cruzar a linha de chegada em segundo lugar.

8 7 -

Depois do primeiro e segundo lugar teremos 6 atletas que podem cruzar a linha de chegada em terceiro lugar.

8 7 6

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

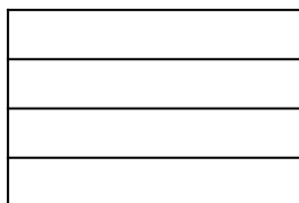
2. Uma moeda é lançada cinco vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

Resolução: Vamos denotar por K o resultado da moeda como sendo cara e por C o resultado como sendo coroa. Queremos determinar o número das n -uplas para $n = 5$, pois a moeda foi lançada cinco vezes. O lançamento de moeda pode ocorrer de duas maneiras: na moeda sai cara (k) ou coroa (C). Assim, podemos determinar o número de sequências possíveis com cinco lançamentos na forma (a, b, c, d, e) tais que $a \in A, b \in A, c \in A, d \in A$ e $e \in A$ para todo $A = \{K, C\} = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$.

Como são 5 lançamentos e cada lançamento possui duas possibilidades, então, pelo P.F.C. temos que:

$$\underbrace{\underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad \underline{2}}_{5 \text{ lançamentos}}$$

3. Uma bandeira é formada por 4 listras que devem ser coloridas usando-se 3 cores A , B ou C , não devendo duas listras adjacentes serem pintadas de uma mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?



Resolução: Primeiramente iremos nomear as 4 listras conforme o desenho abaixo:

L_1
L_2
L_3
L_4

Vamos analisar as opções que temos de cores em cada linha:

Para L_1 temos 3 opções de cores: A , B e C .

Para L_2 temos 2 opções de cores, pois a cor de L_2 tem que ser diferente da cor de L_1 por serem listras adjacentes.

Para L_3 temos 2 opções de cores, pois a cor de L_3 tem que ser diferente da cor de L_2 por serem listras adjacentes. Com isso, uma opção poderia ser repetir a cor de L_1 .

Para L_4 temos 2 opções de cores, pois a cor de L_4 tem que ser diferente da cor de L_3 por serem listras adjacentes.

3
2
2
2

Portanto, pelo P.F.C., temos que:

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

De quantos modos três pessoas podem ficar em fila indiana?

Resolução: Seja $A = \{P_1, P_2, P_3\}$ o conjunto das 3 pessoas. Queremos determinar o número de 3-uplas ordenadas e distintas, então devemos usar o Caso 2.

Na primeira posição da fila temos três opções, já na segunda posição da fila teremos duas opções e na terceira posição teremos uma única opção, pois não conseguimos repetir pessoas em uma fila indiana. Assim, pelo P.F.C., temos que $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

O Princípio Fundamental da Contagem é um instrumento simples para a Análise Combinatória, porém para alguns problemas ele torna-se bem trabalhoso. Assim, se faz necessário definirmos outros modelos de agrupamento para a contagem, como por exemplo: Permutação, Arranjo e Combinação.

Esses três tipos de contagem podem ser simples ou com elementos repetidos.

Antes de apresentarmos esses modelos de agrupamento, estudaremos, na próxima aula, o conceito de Fatorial.

ATIVIDADES

1. Um homem vai ao restaurante disposto a comer um só prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece oito pratos distintos de carne e cinco pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas pode o homem fazer sua refeição?

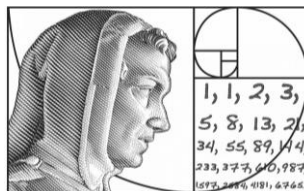
2. Uma moça possui 5 blusas e 6 saias. De quantas formas ela pode vestir uma blusa e uma saia?

3. Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas formas poderá ele vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?

4. Um automóvel é oferecido pelo fabricante em 7 cores diferentes, podendo o comprador optar entre os motores 2 000 cc e 4 000 cc. Sabendo-se que os automóveis são fabricados nas versões “standard”, “luxo” e “superluxo”, quantas são as alternativas do comprador?

5. Uma prova consta de 20 testes do tipo verdadeiro e falso. De quantas formas uma pessoa poderá responder aos 20 testes?

6. Em um computador digital, um bit é um dos algarismos 0 ou 1 e uma palavra é uma sucessão de bits. Qual é o número de palavras distintas de 32 bits?
7. Uma sala tem 10 portas. De quantas maneiras diferentes essa sala pode ser aberta?
8. De um grupo de 5 pessoas, de quantas maneiras distintas posso convidar uma ou mais pessoas para jantar?
9. Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 7, 8?
10. Temos um conjunto de 10 nomes e outro de 20 sobrenomes. Quantas pessoas podem receber um nome e um sobrenome, com esses elementos?
11. Seis dados são lançados simultaneamente. Quantas sequências de resultados são possíveis, se considerarmos cada elemento da sequência como o número obtido em cada dado?
12. O sistema telefônico de São Paulo utiliza oito dígitos para designar os diversos telefones. Supondo que o primeiro dígito seja sempre dois e que o dígito zero não seja utilizado para designar estações (2º e 3º dígitos), quantos números de telefones diferentes poderemos ter?
13. Quantos números telefônicos com 7 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?
14. Quantas peças diferentes podem ser formadas num jogo de dominó se usarmos os números 0, 1, 2, 3, ..., n ?
15. Suponha que no início de um jogo você tenha R\$ 2 000,00 e que só possa jogar enquanto tiver dinheiro. Supondo que em cada jogada você perde ou ganha R\$ 1 000,00, quais são os possíveis resultados ao final de três jogadas?
16. Uma bandeira é formada de 7 listras, que devem ser pintadas de 3 cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?
17. Designando-se seis cidades por A, B, C, D, E e F , determine o número de maneiras que permitem a ida de A até F , passando por todas as demais cidades.
18. Há placas de automóveis que são formadas por duas letras seguidas de 4 algarismos. Quantas placas podem ser formadas com as letras A e B e os algarismos pares, sem repetir nenhum algarismo?



AULA 92

BINÔMIO DE NEWTON



esta aula, estudaremos o Binômio de Newton e o Teorema Binomial.

Definição: Estudar o **Binômio de Newton** consiste em estudar as potências de binômios.

Através das potências de binômios, podemos verificar regularidades que facilitam a representação do polinômio. Além disso, é possível encontrar somente um dos termos do polinômio, sem precisar calculá-lo por completo, utilizando a fórmula do termo geral de um binômio.

As aulas de Análise Combinatória e as aulas envolvendo Binômio de Newton são importantíssimos para compreendermos o Triângulo Pascal que veremos nas duas últimas aulas desse volume.

Antes de definirmos o Binômio de Newton, iremos retomar o conceito de Binômio estudado na 8ª Ano.

Definição: Binômio é uma expressão algébrica que consiste em dois termos ligados por um sinal de mais ou de menos.

Exemplos:

1. $x + 2 \rightarrow$ é um binômio.
2. $3x - 2y + 4 \rightarrow$ não é um binômio, pois são três termos ligados por um sinal de mais ou menos e não dois.
3. $2x \rightarrow$ não é um binômio, pois não possui o sinal de mais ou menos.
4. $4x + 2y \rightarrow$ é um binômio.
5. $4x + 2y \rightarrow$ é um binômio.

Após relembrar o conceito de Binômio, iremos definir o Binômio de Newton.

Definição: Binômio de Newton é qualquer binômio elevado a um número n , onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

$$(x + y)^n$$

O **Binômio de Newton** permite escrever na forma canônica o polinômio correspondente à potência de um binômio, como podemos ver abaixo os casos particulares:

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos calcular da seguinte forma:

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y) \cdot (x + y) \cdot (x + y) \cdot \dots \cdot (x + y)}_{n \text{ fatores}}$$

O nome Binômio de Newton é uma homenagem ao físico e matemático Isaac Newton, entretanto devemos destacar que Newton não tinha como objetivo estudá-lo. Ele estudava regras que valem para $(x + y)^n$ quando o expoente n é fracionário ou inteiro negativo, portanto, seus estudos estavam interessados nas séries infinitas e não do Binômio de Newton.

Observação: No **Binômio de Newton** o expoente n é sempre natural.

Antes de apresentarmos o **Teorema Binomial de Newton**, precisamos de uma definição importantíssima para compreendermos este Teorema.

Definição: Para $n \geq p$ inteiros não nulos, temos que:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Observação: Os termos $\binom{n}{p}$, com $p = 0, 1, \dots, n$

$$\binom{n}{0}; \binom{n}{1}; \binom{n}{2}; \dots; \binom{n}{p}; \dots; \binom{n}{n}$$

são chamados coeficientes binomiais.

Observação: O coeficiente binomial $\binom{n}{p}$ é chamado de coeficiente binomial n sobre p .

Observação: No coeficiente binomial $\binom{n}{p}$, n é chamado **numerador** e p , **denominador**.

Exemplos:

1. Calcule o coeficiente binomial $\binom{8}{3}$.

Resolução:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 42$$

2. calcule o coeficiente binomial $\binom{100}{99}$.

Resolução:

$$\binom{100}{99} = \frac{100!}{99! \cdot (100 - 99)!} = \frac{100 \cdot \cancel{99!}}{\cancel{99!} \cdot 1} = 100$$

3. Calcule o coeficiente binomial $\binom{17}{2}$.

Resolução:

$$\binom{17}{2} = \frac{17!}{2! \cdot (17 - 2)!} = \frac{17 \cdot 16 \cdot \cancel{15!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{15!}} = \frac{272}{2} = 136$$

4. Calcule o coeficiente binomial $\binom{5}{5}$.

Resolução:

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5! \cdot (5 - 5)!} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 1$$

5. Calcule o coeficiente binomial $\binom{4}{0}$.

Resolução:

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot (4 - 0)!} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1$$

6. Calcule o coeficiente binomial $\binom{6}{3}$.

Resolução:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6 - 3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 20$$

7. Calcule o coeficiente binomial $\binom{25}{1}$.

Resolução:

$$\binom{25}{1} = \frac{25!}{1! \cdot (25 - 1)!} = \frac{25 \cdot 24!}{1 \cdot 24!} = 25$$

Existem alguns casos particulares de coeficientes binomiais em que não é necessário fazermos o seu desenvolvimento, ou seja, podemos concluir o seu resultado sem o auxílio da definição acima. São eles:

1º Caso: $p = n$

O coeficiente binomial n sobre n sempre resulta em 1, isto é toda vez que os dois números forem iguais no coeficiente binomial, sempre resultará em 1.

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n - n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

2º Caso: $p = 0$

O coeficiente binomial n sobre 0 sempre resulta em 1, isto é toda vez que o denominador for zero no coeficiente binomial, o resultado será 1.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

3º Caso: $p = 1$

O coeficiente binomial n sobre 1 sempre resulta em n , isto é toda vez que o denominador for 1 no coeficiente binomial, o resultado será o numerador.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

TEOREMA BINOMIAL

Definição: O Teorema Binomial de Newton é o desenvolvimento de $(x + y)^n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in \mathbb{R}$, e é dada por:

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + \dots + \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p + \dots + \binom{n}{n} \cdot y^n$$

Exemplos:

1. Desenvolva $(x + 2)^5$ pelo Teorema Binomial de Newton.

Resolução:

$$\begin{aligned}(x + 2)^5 &= \binom{5}{0} \cdot x^5 + \binom{5}{1} \cdot x^{5-1} \cdot 2^1 + \binom{5}{2} \cdot x^{5-2} \cdot 2^2 + \binom{5}{3} \cdot x^{5-3} \cdot 2^3 + \binom{5}{4} \cdot x^{5-4} \cdot 2^4 + \binom{5}{5} \cdot x^{5-5} \cdot 2^5 \\&= x^5 + \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot x^4 \cdot 2 + \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot x^3 \cdot 4 + \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot x^2 \cdot 8 + \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot x \cdot 16 + 32 \\&= x^5 + \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 1!} \cdot x^4 \cdot 2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^3 \cdot 4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{2!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{2!}} \cdot x^2 \cdot 8 + \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{1 \cdot \cancel{4!}} \cdot x \cdot 16 + 32 \\&= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32\end{aligned}$$

Portanto, desenvolvendo $(x + 2)^5$ pelo Teorema Binomial de Newton, temos

$$(x + 2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

2. Desenvolva $(x + 1)^3$ pelo Teorema Binomial de Newton.

Resolução:

$$\begin{aligned}
(x+1)^3 &= \binom{3}{0} \cdot x^3 + \binom{3}{1} \cdot x^{3-1} \cdot 1^1 + \binom{3}{2} \cdot x^{3-2} \cdot 1^2 + \binom{3}{3} \cdot x^{3-3} \cdot 1^3 \\
&= x^3 + \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot x^2 \cdot 1 + \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot x^1 \cdot 1 + 1 \\
&= x^3 + \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 1!} \cdot x^2 + \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{1! \cdot \cancel{2!}} \cdot x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1
\end{aligned}$$

Portanto, desenvolvendo $(x+1)^3$ pelo Teorema Binomial de Newton, temos

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

3. Desenvolva $(x+3)^4$ pelo Teorema Binomial de Newton.

Resolução:

$$\begin{aligned}
(x+3)^4 &= \binom{4}{0} \cdot x^4 + \binom{4}{1} \cdot x^{4-1} \cdot 3^1 + \binom{4}{2} \cdot x^{4-2} \cdot 3^2 + \binom{4}{3} \cdot x^{4-3} \cdot 3^3 + \binom{4}{4} \cdot x^{4-4} \cdot 3^4 \\
&= x^4 + \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot x^3 \cdot 3 + \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot x^2 \cdot 9 + \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot x^1 \cdot 27 + 81 \\
&= x^4 + \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 1!} \cdot x^3 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^2 \cdot 9 + \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{1 \cdot \cancel{3!}} \cdot x \cdot 27 + 81 \\
&= x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81
\end{aligned}$$

Portanto, desenvolvendo $(x+3)^4$ pelo Teorema Binomial de Newton, temos

$$(x+3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

4. Desenvolva $(x+4)^4$ pelo Teorema Binomial de Newton.

Resolução:

$$\begin{aligned}
(x+4)^4 &= \binom{4}{0} \cdot x^4 + \binom{4}{1} \cdot x^{4-1} \cdot 4^1 + \binom{4}{2} \cdot x^{4-2} \cdot 4^2 + \binom{4}{3} \cdot x^{4-3} \cdot 4^3 + \binom{4}{4} \cdot x^{4-4} \cdot 4^4 \\
&= x^4 + \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot x^3 \cdot 4 + \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot x^2 \cdot 16 + \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot x^1 \cdot 64 + 256 \\
&= x^4 + \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 1!} \cdot x^3 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^2 \cdot 16 + \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{1 \cdot \cancel{3!}} \cdot x \cdot 64 + 256 \\
&= x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256
\end{aligned}$$

Portanto, desenvolvendo $(x+4)^4$ pelo Teorema Binomial de Newton, temos

$$(x + 4)^4 = x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256$$

ATIVIDADES

1. Para cada um dos números binomiais abaixo, encontre outro de mesmo valor.

a) $\binom{9}{2}$

b) $\binom{11}{4}$

c) $\binom{12}{7}$

d) $\binom{139}{0}$

2. Calcule os binomiais abaixo:

a) $\binom{7}{4}$

b) $\binom{6}{2}$

c) $\binom{10}{7}$

d) $\binom{139}{138}$

3. Determine o coeficiente de

a) x^2 no desenvolvimento de $(x + 2)^3$.

b) x^3 no desenvolvimento de $(x + 2)^4$.

c) x^3 no desenvolvimento de $(x + 3)^5$.

d) x^2 no desenvolvimento de $(x + 2)^5$.

e) x^2 no desenvolvimento de $(3x + 2)^3$.

4. Desenvolva, usando o Teorema Binomial:

a) $(x + 3b)^3$

b) $(1 - x^2)^5$

c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$

d) $(\sin \theta + \cos \theta y)^4$

e) $(3 - y)^5$

5. Desenvolva, usando o Teorema Binomial

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)^5 - \left(m - \frac{1}{m}\right)^5$$

6. Desenvolva $(x + a)^7$.

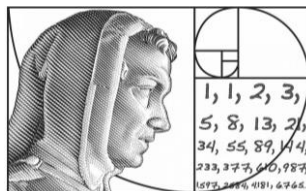
7. Quantos termos tem o desenvolvimento de:

a) $(x + y)^7$

b) $(x + y)^{10}$

8. $(x + y)^n$ No desenvolvimento de $(x + y)^{1000}$, qual o centésimo termo, se o desenvolvimento for feito em potências de expoentes decrescentes de x ?

9. Quais os 3 primeiros termos do desenvolvimento de $(x + y)^{100}$ segundo as potências de expoentes decrescentes de x ?



AULA 96

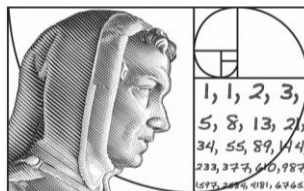
AVALIAÇÃO

1. De um grupo de 5 pessoas, de quantas maneiras distintas posso convidar uma ou mais para jantar?
2. Quantos números de 6 algarismos podemos formar permutando os algarismos 2, 2, 3, 3, 3, 5?
3. De quantas formas se pode dispor oito pessoas em fila indiana?
4. Considere a palavra CONTAGEM. Determine o número de anagramas que:
 - a) Começam com *A* e terminam com *E*.
 - b) Começam com *A* ou terminam com *E*.
 - c) Começam e terminam com vogal.
 - d) Têm a letra *T* antes da letra *M*.
5. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?
6. Um grupo consta de 20 pessoas, das quais 5 matemáticos. De quantas formas podemos formar comissões de 10 pessoas de modo que:
 - a) nenhum membro seja um matemático?
 - b) todos os matemáticos participem da comissão?
 - c) haja exatamente um matemático na comissão?
 - d) Pelo menos um membro da comissão seja matemático?
7. Desenvolva, usando o Teorema Binomial

$$\left(m + \frac{1}{m}\right)^5 - \left(m - \frac{1}{m}\right)^5$$

8. Desenvolvendo $(x + 3y)^9$, qual o termo que contém x^4 ?
9. Calcule $\sum_{k=0}^{10} \binom{11}{k}$.
10. Demostre que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{i} + \binom{n}{n} = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$$



AULA 98

EVENTO



Estudando os experimentos, descobrimos que existem dois tipos: determinístico e aleatório. No determinístico conseguimos prever o resultado que dará, já o aleatório, não conseguimos prever o resultado.

No experimento aleatório nós não conseguimos prever o resultado com toda a certeza, , porém conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer. Isto é chamado de espaço amostral.

No espaço amostral estão todos os possíveis resultados para aquele experimento, porém não conseguimos prever em qual elemento ou em quais elementos resultará. O que podemos fazer é dividir o espaço amostral em eventos.

Mas o que seria um evento?

A palavra evento tem sua origem etimológica no termo em latim EVENTUS que significa acontecimento, ocorrência, acidente, acaso. Na matemática encontramos a palavra evento inserido no conteúdo de Probabilidade. Vejamos a definição:

Definição: O **Evento** é qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω).

Os eventos são sempre indicados por uma letra maiúscula do alfabeto ($A, B, C, \dots, X, Y, Z$). Dizemos que **um evento A ocorre** se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A .

Exemplos:

1. Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Eis alguns eventos:

A: ocorrência de número par.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

B: ocorrência de número ímpar.

$$B = \{1, 3, 5\}$$

C: ocorrência de número primo.

$$C = \{2, 3, 5\}$$

D: ocorrência de número menor que 4.

$$D = \{1, 2, 3\}$$

E: ocorrência de número maior que 4.

$$E = \{5, 6\}$$

F: ocorrência de número menor que 8.

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

G: ocorrência de número maior ou igual a 10.

$$G = \emptyset$$

2. Uma moeda é lançada 2 vezes, e observa-se a sequência de caras e coroas.

$$\Omega = \{(K, K); (K, C); (C, K); (C, C)\}$$

Eis alguns eventos:

A: ocorrência de cara no 1º lançamento.

$$A = \{(K, K); (K, C)\}$$

B: ocorrência de coroa no 2º lançamento.

$$B = \{(K, C); (C, C)\}$$

C: ocorrência de exatamente uma coroa.

$$C = \{(K, C); (C, K)\}$$

D: ocorrência de, no máximo, duas caras.

$$D = \{(K, K); (K, C); (C, K)\}$$

E: ocorrência de pelo menos duas coroas.

$$E = \{(C, C)\}$$

Observação: Os eventos que possuem um **único elemento** ($\#A = 1$) serão chamados **eventos elementares**.

Observação: Notemos que, se $\#\Omega = n$, então Ω terá 2^n subconjuntos e, portanto, 2^n eventos. Entre os eventos, salientamos o $\emptyset$ (chamado **evento impossível**) e o próprio Ω (chamado evento certo).

COMBINAÇÃO DE EVENTOS

Os Eventos apresentados acima, nada mais são do que subconjuntos do conjunto Espaço Amostral, portanto, podemos combinar esses eventos para formar novos eventos, como veremos a seguir.

UNIÃO DE EVENTOS

Definição: Sejam A e B dois eventos, então o evento $A \cup B$ ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem. Dizemos que $A \cup B$ é a **união** entre o evento A e o evento B .

Exemplos:

1. Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sejam os eventos:

A : ocorrência de número par.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

B : ocorrência de número ímpar.

$$B = \{1, 3, 5\}$$

C : ocorrência de número primo.

$$C = \{2, 3, 5\}$$

Então, teremos:

$A \cup B$: ocorrência de número par ou número ímpar.

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

$A \cup C$: ocorrência de número par ou número primo.

$$A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$B \cup C$: ocorrência de número ímpar ou número primo.

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$$

2. Uma moeda é lançada 2 vezes, e observa-se a sequência de caras e coroas.

$$\Omega = \{(K, K); (K, C); (C, K); (C, C)\}$$

Eis alguns eventos:

A : ocorrência de cara no 1º lançamento.

$$A = \{(K, K); (K, C)\}$$

B: ocorrência de coroa no 2º lançamento.

$$B = \{(K, C); (C, C)\}$$

C: ocorrência de exatamente uma coroa.

$$C = \{(K, C); (C, K)\}$$

Então, teremos:

A ∪ B: ocorrência de cara no 1º lançamento ou de coroa no 2º lançamento.

$$A \cup B = \{(K, K); (K, C); (C, C)\}$$

A ∪ C: ocorrência de cara no 1º lançamento ou de exatamente uma coroa.

$$A \cup C = \{(K, K); (K, C), (C, K)\}$$

B ∪ C: ocorrência de coroa no 2º lançamento ou de exatamente uma coroa.

$$B \cup C = \{(K, C); (C, C); (C, K)\}$$

INTERSEÇÃO DE DOIS EVENTOS

Definição: Sejam A e B dois eventos, então o evento $A \cap B$ ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem **simultaneamente**. Dizemos que $A \cap B$ é a **interseção** entre o evento A e o evento B .

Exemplos:

1. Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sejam os eventos:

A: ocorrência de número par.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

B: ocorrência de número ímpar.

$$B = \{1, 3, 5\}$$

C: ocorrência de número primo.

$$C = \{2, 3, 5\}$$

Então, teremos:

A ∩ B: ocorrência de número par e número ímpar.

$$A \cap B = \emptyset$$

A ∩ C: ocorrência de número par e número primo.

$$A \cap C = \{2\}$$

B ∩ C: ocorrência de número ímpar e número primo.

$$B \cap C = \{3,5\}$$

2. Uma moeda é lançada 2 vezes, e observa-se a sequência de caras e coroas.

$$\Omega = \{(K, K); (K, C); (C, K); (C, C)\}$$

Eis alguns eventos:

A: ocorrência de cara no 1º lançamento.

$$A = \{(K, K); (K, C)\}$$

B: ocorrência de coroa no 2º lançamento.

$$B = \{(K, C); (C, C)\}$$

C: ocorrência de exatamente uma coroa.

$$C = \{(K, C); (C, K)\}$$

Então, teremos:

A ∩ **B**: ocorrência de cara no 1º lançamento e de coroa no 2º lançamento.

$$A \cap B = \{(K, C)\}$$

A ∩ **C**: ocorrência de cara no 1º lançamento e de exatamente uma coroa.

$$A \cap C = \{(K, C)\}$$

B ∩ **C**: ocorrência de coroa no 2º lançamento e de exatamente uma coroa.

$$B \cap C = \{(K, C)\}$$

Observação: Se $A \cap B = \emptyset$, A e B são chamados **mutuamente exclusivos**.

COMPLEMENTAR DE UM EVENTO

Definição: Seja A um evento, então o evento A^c ocorrerá se, e somente se, A **não** ocorrer. Dizemos que A^c é o **evento complementar** de A .

Exemplos:

1. Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sejam os eventos:

A: ocorrência de número par.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

B: ocorrência de número ímpar.

$$B = \{1, 3, 5\}$$

C: ocorrência de número primo.

$$C = \{2, 3, 5\}$$

Então, teremos:

A^c : ocorrência de número não par, isto é, número ímpar.

$$A^c = \{1, 3, 5\}$$

B^c : ocorrência de número não ímpar, isto é, número par.

$$B^c = \{2, 4, 6\}$$

C^c : ocorrência de número não primo.

$$C^c = \{1, 4, 6\}$$

2. Uma moeda é lançada 2 vezes, e observa-se a sequência de caras e coroas.

$$\Omega = \{(K, K); (K, C); (C, K); (C, C)\}$$

Eis alguns eventos:

A : ocorrência de cara no 1º lançamento.

$$A = \{(K, K); (K, C)\}$$

B : ocorrência de coroa no 2º lançamento.

$$B = \{(K, C); (C, C)\}$$

C : ocorrência de exatamente uma coroa.

$$C = \{(K, C); (C, K)\}$$

Então, teremos:

A^c : ocorrência de não ter cara no 1º lançamento.

$$A^c = \{(C, K); (C, C)\}$$

B^c : ocorrência de não ter coroa no 2º lançamento.

$$B^c = \{(K, K); (C, K)\}$$

C^c : ocorrência de não ter exatamente uma coroa.

$$C^c = \{(K, K); (C, C)\}$$

UNIÃO DE n EVENTOS

Definição: Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma sequência de eventos. Então o evento

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

ocorrerá se, e somente se, **ao menos um dos eventos A_j ocorrer**. Dizemos que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ é a **união dos eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$** .

Exemplos:

1. Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sejam os eventos:

$$A_1 = \{2, 4, 6\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A_3 = \{2, 3, 5\}$$

Então, teremos:

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Um número é sorteado entre os 50 inteiros de 1 a 50.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 50\}$$

Eis os eventos:

$$A = \{2, 3, 4, \dots, 50\}$$

$$B = \{10, 11, \dots, 50\}$$

$$C = \{20, 21, \dots, 50\}$$

Então, teremos:

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, \dots, 50\}$$

INTERSEÇÃO DE n EVENTOS

Definição: Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n$ uma sequência de eventos. Então o evento

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

ocorrerá se, e somente se, **todos os eventos A_j ocorrerem simultaneamente.**

Dizemos que $A_1 \cap \dots \cap A_n$ é a **interseção dos eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$.**

Exemplos:

1. Um dado é lançado e observa-se o número da face de cima.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sejam os eventos:

$$A_1 = \{2, 4, 6\}$$

$$A_2 = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A_3 = \{2, 3, 5\}$$

Então, teremos:

$$\bigcap_{i=1}^3 A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$$

2. Um número é sorteado entre os 50 inteiros de 1 a 50.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 50\}$$

Eis os eventos:

$$A = \{2, 3, 4, \dots, 50\}$$

$$B = \{10, 11, \dots, 50\}$$

$$C = \{20, 21, \dots, 50\}$$

Então, teremos:

$$\bigcap_{i=1}^3 A_i = A \cap B \cap C = \{20, 21, \dots, 50\}$$

ATIVIDADES

1. Uma urna contém 30 bolinhas numeradas de 1 a 30. Uma bolinha é escolhida e é observado seu número. Seja $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$. Descreva os eventos:

- a) O número obtido é par.
- b) O número obtido é ímpar.
- c) O número obtido é primo.
- d) O número obtido é maior que 16.
- e) O número é múltiplo de 2 e de 5.
- f) O número é múltiplo de 3 ou de 8.
- g) O número não é múltiplo de 6.

2. Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados. Seja Ω o conjunto dos pares (a, b) , em que a representa o número do dado verde e b o do dado vermelho. Descreva os eventos:

- a) **A:** ocorre 3 no dado verde.
- b) **B:** ocorrem números iguais nos dois dados.
- c) **C:** ocorre número 2 em ao menos um dado.
- d) **D:** ocorrem números cuja soma é 7.
- e) **E:** ocorrem números cuja soma é menor que 7.

3. Uma moeda e um dado são lançados. Seja:

$$\Omega = \{(K, 1); (K, 2); (K, 3); (K, 4); (K, 5); (K, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}$$

Descreva os eventos:

- a) **A**: ocorre cara.
- b) **B**: ocorre número par.
- c) **C**: ocorre o número 3.
- d) $A \cup B$.
- e) $B \cap C$.
- f) $A \cap C$.
- g) A^c .
- h) C^c .

4. Um par ordenado (a, b) é escolhido entre os 20 pares ordenados do produto cartesiano $A \times B$, em que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Considere $\Omega = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Descreva os eventos:

- a) $A = \{(x, y) \mid x = y\}$
- b) $B = \{(x, y) \mid x > y\}$
- c) $C = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$
- d) $D = \{(x, y) \mid y = x^2\}$
- e) $E = \{(x, y) \mid x = 1\}$
- f) $F = \{(x, y) \mid y = 3\}$

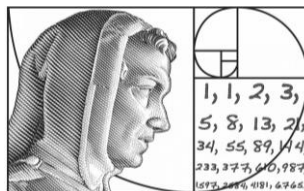
5. Uma urna *I* tem duas bolas vermelhas (*V*) e três brancas (*B*) e a urna *II* tem cinco bolas vermelhas e seis brancas. Uma urna é escolhida e dela é extraída uma bola e observada sua cor. Seja: $\Omega = \{(I, V); (I, B); (II, V); (II, B)\}$

Descreva os eventos:

- a) **A**: a urna escolhida é a *I*.
- b) **B**: a urna escolhida é a *II*.
- c) **C**: a bola escolhida é vermelha.
- d) **D**: a bola escolhida é branca.
- e) $A \cup B$.
- f) $A \cap B$.
- g) D^c .

6. Um experimento consiste em perguntar a 3 mulheres se elas usam ou não o sabonete da marca *A*.

- a) Dê um espaço amostral para o experimento.
- b) Descreva o evento **A**: no máximo duas mulheres usam o sabonete da marca *X*.



AULA 104

INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS



esta aula, estudaremos a independência de eventos. Primeiramente precisamos compreender os significados das palavras.

A palavra independente tem sua origem etimológica nos termos em latim IN e DEPENDERE, o termo IN é um prefixo negativo e DEPENDERE significa estar preso, estar pendurado.

Como o evento é qualquer subconjunto do espaço amostral Ω , a independência de eventos ocorre grosso modo quando estes subconjuntos não estão presos um ao outro, isto é, a ocorrência de um evento não afeta a probabilidade de outro evento.

Iremos definir a independência de eventos para **dois eventos**, para **três eventos** e para **n eventos**.

INDEPENDÊNCIA DE DOIS EVENTOS

Definição: Dados dois eventos A e B de um espaço amostral Ω , diremos que A **independe de B** se:

$$P(A|B) = P(A)$$

isto é, **A independe de B** se a ocorrência de **B** não afeta a probabilidade de **A** .

Observação: Note que, se **A independe de B** ($P(A) > 0$), então **B independe de A** , pois:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Além disso, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot \underbrace{P(B|A)}_{P(B)} = P(A) \cdot P(B)$$

Então, podemos usar como definição:

Definição: Dois eventos A e B são chamados **independentes** se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplos:

1. Uma moeda é lançada três vezes. Sejam os eventos:

A: ocorrerem pelo menos duas coroas.

B: ocorrerem resultados iguais nos três lançamentos.

Assim, temos que:

$$\Omega = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}$$

$$A = \{(K, C, C), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}$$

$$B = \{(K, K, K), (C, C, C)\}$$

$$A \cap B = \{(C, C, C)\}$$

Calculando as probabilidades, temos que:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Logo,

$$\begin{array}{ccccc} P(A \cap B) = & P(A) & \cdot & P(B) \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} \end{array}$$

Portanto, A e B são **independentes**.

2. Duas pessoas arremessam uma bola de basquete na cesta. A probabilidade de a 1ª fazer a cesta é $P(A) = \frac{1}{3}$ e a probabilidade de a 2ª fazer a cesta é $P(B) = \frac{2}{3}$.

Admitindo A e B independentes, se os dois arremessarem, qual a probabilidade de:

a) Ambos fazerem a cesta.

b) Ao menos um atingir o alvo?

Resolução:

a)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

b)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Observação: Se A e B não são independentes, eles são chamados **dependentes**.

Observação: Se A e B são independentes, então:

- A e B^C são independentes.
- A^C e B são independentes.
- A^C e B^C são independentes.

INDEPENDÊNCIA DE TRÊS OU MAIS EVENTOS

Definição: Sejam 3 eventos A, B e C do mesmo espaço amostral Ω . Diremos que A, B e C são independentes, se:

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C) \\P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \\P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)\end{aligned}$$

Podemos generalizar esta definição, para n eventos, isto é, $A_1, A_2, \dots, A_n$ são independentes, se:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) \quad \forall i, j, k \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k$$

.....

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Observação: Em geral, para mais que 2 eventos, não precisamos verificar todas essas condições, pois do ponto de vista prático nós admitimos a independência (baseados nas particularidades do experimento) e usamos esse fato para calcularmos, por exemplo, $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ com $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$.

Exemplos:

1. Uma moeda é lançada 8 vezes. Qual a probabilidade de observarmos coroa nos 8 lançamentos?

Sejam os eventos:

A_1 : ocorre coroa no 2º lançamento.

A_2 : ocorre coroa no 1º lançamento.

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

A_8 : ocorre coroa no 8º lançamento.

Os resultados de cada lançamento não são afetados pelos outros, assim $A_1, A_2, \dots, A_8$ são eventos independentes.

Logo, temos que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_8) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_8)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_8) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_8)$$

Como, $A_1 = A_2 = \dots = A_8 = \frac{1}{2}$, temos que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_8) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{8 \text{ fatores}} = \frac{1}{256}$$

ATIVIDADES

1. Se A e B são eventos independentes, prove que A^c e B também o são. Isto é, prove que a implicação abaixo é verdadeira:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B)$$

2. Numa sala existem 4 homens e 6 mulheres. Uma mosca entra na sala e pousa numa pessoa, ao acaso.

- a) Qual a probabilidade de que ela pouse num homem ($P(H)$)?
- b) Qual a probabilidade de que ela pouse numa mulher ($P(M)$)?
- c) Os eventos H e M são independentes?

3. De um baralho de 52 cartas, uma é extraída ao acaso. Sejam os eventos:

A: A carta é de copas.

B: A carta é um rei.

C: A carta é um rei ou uma dama.

Quais dos pares de eventos são independentes?

- a) A e B

b) A e C

c) B e C

4. As probabilidades de que duas pessoas A e B resolvam um problema são: $P(A) = \frac{1}{3}$ e $P(B) = \frac{3}{3}$. Qual a probabilidade de que:

a) Ambos resolvam o problema?

b) Ao menos um resolva o problema?

c) Nenhum resolva o problema?

d) A resolva o problema, mas B não?

5. B resolva o problema, mas A não? A probabilidade de um certo homem sobreviver mais de 10 anos, a partir de uma certa data, é 0,4, e de que sua esposa sobreviva mais 10 anos a partir da mesma data é 0,5. Qual a probabilidade de:

a) Ambos sobreviverem mais 10 anos a partir daquela data?

b) Ao menos um deles sobreviver mais 10 anos a partir daquela data?

6. A probabilidade de que um aluno A resolva certo problema é $P(A) = \frac{1}{2}$, a de que outro aluno B o resolva é $P(B) = \frac{1}{3}$ e a de que um terceiro aluno C o resolva é $P(C) = \frac{1}{4}$. Qual a probabilidade de que:

a) Os três resolvam o problema?

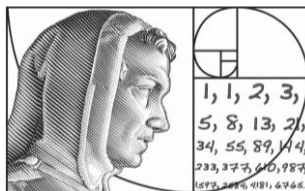
b) Ao menos um resolva o problema?

7. Uma moeda é lançada 10 vezes. Qual a probabilidade de:

a) Observarmos 10 caras?

b) Observarmos 10 coroas?

c) Observarmos 4 caras e 6 coroas?

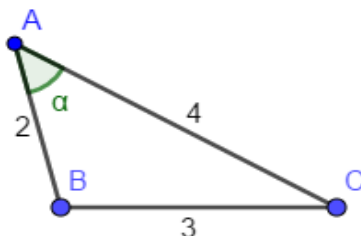


AULA 107

AVALIAÇÃO GERAL – PARTE I

Nesta aula, iniciaremos uma Avaliação Geral contemplando todos os assuntos estudados ao longo dos volumes 1, 2, 3 e 4.

1. Calcule a medida aproximada de $\hat{A}$.



2. Qual é o valor de $\left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - \operatorname{sec} \frac{\pi}{3}\right)$?
3. Reduzir ao primeiro quadrante:
 - a) $\operatorname{tg} 290^\circ$
 - b) $\operatorname{cosec} \frac{11\pi}{6}$
 - c) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$
 - d) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$
4. Qual o valor de $\cos 1200^\circ$?
5. Determine o período, a imagem e faça o gráfico das funções abaixo:
 - a) $f(x) = \cos x$
 - b) $f(x) = \operatorname{cotg} x$
 - c) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$
 - d) $f(x) = \operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
 - e) $f(x) = 2 + \operatorname{tg} x$
6. Simplifique

$$\frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

7. Demonstre:

a) $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

b) $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

c) $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

8. Determine o período, a imagem e faça o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = \cotg x$

c) $f(x) = \sin 2x$

d) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $f(x) = 2 + \operatorname{tg} x$

9. Simplifique

$$\frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

10. Demonstre $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$.