
ENSINO MÉDIO

– 3º ANO –

MATEMÁTICA

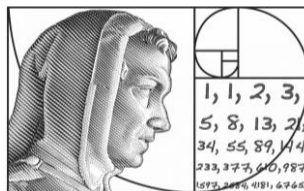
VOLUME 1

Apostila do 3º ano do Ensino Médio, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.





MATEMÁTICA



AULA 01

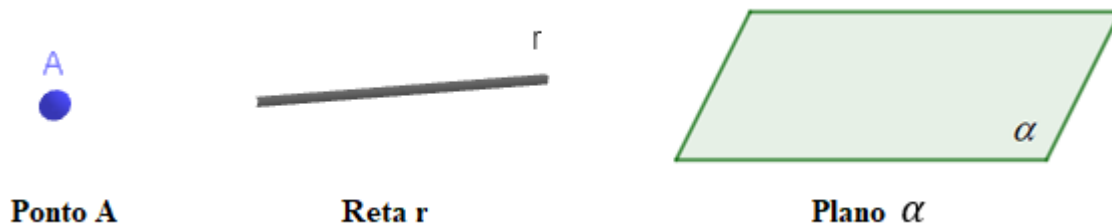
INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESPACIAL – PARTE I

Neste capítulo estudaremos os conceitos primitivos, os postulados, as posições das retas, como determinar um plano e as interseções entre planos.

CONCEITOS PRIMITIVOS E POSTULADOS

Os conceitos geométricos são estabelecidos por meio de definições. Já os primeiros conceitos, isto é, os conceitos primitivos da Geometria são adotados sem definição.

Os conceitos de **ponto**, **reta** e **plano** adotaremos sem definir.



Observação 1: Pela experiência e pela observação temos um conhecimento intuitivo sobre ponto, reta e plano.

A geometria espacial, como o próprio nome já diz, é desenvolvida no espaço. Mas o que seria o espaço?

Definição: O **espaço** é o conjunto de todos os pontos.

As proposições geométricas são aceitas mediante demonstrações. Já as primeiras proposições ou **postulados** são aceitos sem demonstração.

Assim, daremos início ao estudo da Geometria com alguns postulados, que relacionam o ponto, a reta e o plano.

POSTULADOS DA EXISTÊNCIA

Existe reta e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

Existe plano e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

POSTULADO DA DETERMINAÇÃO

Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

Três pontos **não colineares** determinam um único plano que passa por eles.

POSTULADO DA INCLUSÃO

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

RETAS

As retas que estão no mesmo plano são classificadas de duas formas: retas concorrentes ou retas paralelas.

Vejam as definições destas retas:

Definição: Duas retas são **concorrentes** se, e somente se, elas tiverem um único ponto comum.

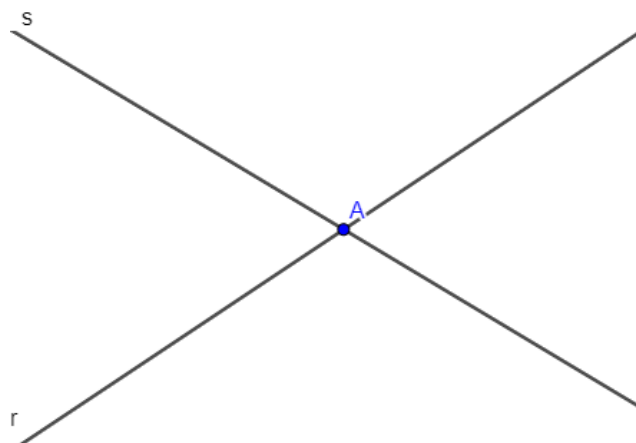


Figura 1 - Retas concorrentes.

Definição: Duas retas são **paralelas** se, e somente se, forem coincidentes¹ ou forem coplanares² e não tiverem ponto em comum.

1 As retas coincidentes são aquelas que pertencem ao mesmo plano e possuem todos os pontos em comum.

2 As **retas coplanares** são aquelas que se encontram no mesmo plano.



Figura 2 - Retas Paralelas

DETERMINAÇÃO DE PLANO

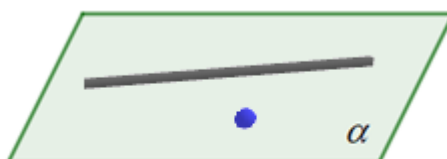
Na matemática podemos determinar um plano de quatro modos diferentes. São eles:

Por três pontos não colineares.



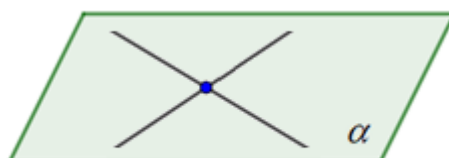
Plano α

Por uma reta e um ponto fora dela.



Plano α

Por duas retas concorrentes.



Plano α

Por duas retas paralelas distintas.



Plano α

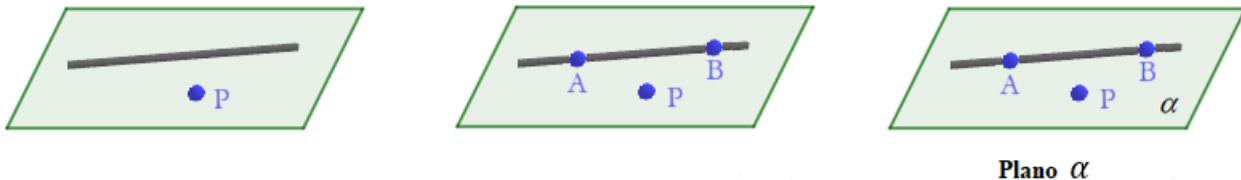
O primeiro modo é o postulado da determinação e os outros modos são três teoremas que demonstraremos a seguir.

Teorema 1: Se uma reta e um ponto são tais que o ponto não pertence à reta, então eles determinam um único plano que os contém.

Demonstração: Sendo um problema de existência e unicidade, dividimos a demonstração nessas duas partes.

1ª parte: Existência

Primeiramente iremos demonstrar por construção.



Tomamos em r dois pontos distintos, A e B .

Os pontos A, B e P , não sendo colineares ($A, B \in r$ e $P \notin r$), determinam um plano α , por conta do primeiro modo de determinar um plano que é um postulado.

Agora, iremos provar que α é o plano de r e P . Pela existência vimos que o plano α possui os pontos A, B e P , então α é plano do ponto P .

$$\alpha = (A, B, P) \Rightarrow P \in \alpha$$

Falta verificarmos que α é plano da reta r . Para isso, temos que α é plano dos pontos A e B e como $A \neq B$ e $A, B \in r$ então temos que $r \subset \alpha$.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = (r, P) \\ A \neq B; A, B \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

Logo, existe pelo menos o plano α construído por r e P e indicaremos por

$$\alpha = (r, P)$$

2ª parte: Unicidade

Provemos que α é o único plano determinado por r e P .

Se existissem α e α' por r e P , teríamos:

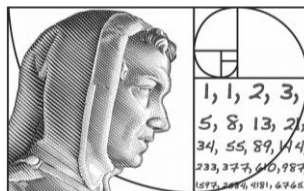
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha = (r, P); A, B \in r) \Rightarrow \alpha = (A, B, P) \\ (\alpha' = (r, P); A, B \in r) \Rightarrow \alpha' = (A, B, P) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'$$

Logo, não existe mais que um plano (r, P) .

Portanto, existe um único plano α determinados por uma reta r e um ponto P fora da reta.

ATIVIDADES

1. Quantas retas há no espaço?
2. Quantas e quais são as retas determinadas pelos pontos A, B, C, D e E tomados dois a dois, se:
 - a) A, B, C, D são colineares?
 - b) A, B, C, D e E não são coplanares?
3. Quantos são os planos determinados por quatro pontos distintos dois a dois?
4. Podemos encontrar mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam, e uma mesa com 3 pernas onde não acontece isso. Explique com suas palavras por quê isso ocorre, utilizando os conceitos apresentados neste capítulo.
5. Quantos são os planos que passam por uma reta? Quantos planos passam por dois pontos distintos?



AULA 06

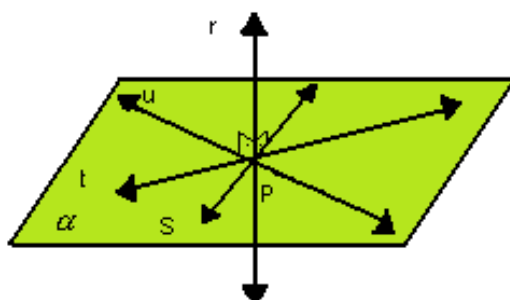
PERPENDICULARIDADE



studaremos nesta aula sobre perpendiculares. Mas o que significa perpendicular?

A palavra perpendicular tem sua origem etimológica no termo em latim PERPENDICULARIS, que significa o que despenca verticalmente de um eixo horizontal.

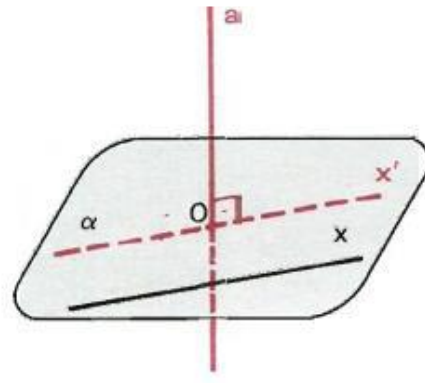
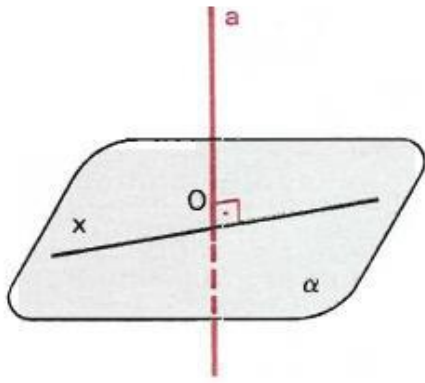
Definição: Uma reta e um plano são **perpendiculares** se, e somente se, eles têm um ponto comum e a reta for perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto comum.



Observação 1: Se uma reta é perpendicular a um plano α (ou o plano α é perpendicular à reta a), o traço de a em α é chamado **pé da perpendicular**.

Observação 2: Uma reta e um plano são **oblíquos** se, e somente se, são concorrentes e não são perpendiculares.

Pelas definições, temos que se uma reta é perpendicular a um plano, então ela forma ângulo reto com qualquer reta do plano.



Sendo x uma reta qualquer de α , então devemos considerar dois casos, para a perpendicular a em O .

1º Caso: x passa por O .

Pela definição, temos que $a \perp x$.

2º Caso: x não passa por O .

Seja a reta x' que passa por O e paralela a x .

Pela definição, temos que $a \perp x'$ e então $a \perp x$

Como a é perpendicular e ortogonal a x , temos que $a \perp x$

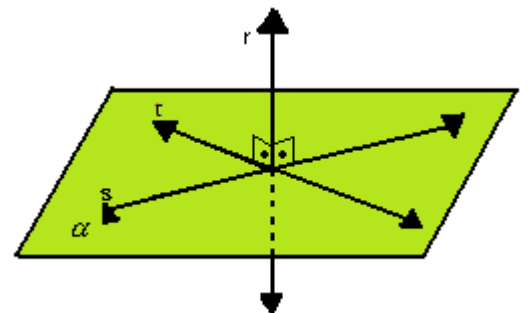
TEOREMA FUNDAMENTAL

Podemos escrever o teorema fundamental, sob duas condições: a primeira condição é que seja suficiente e a segunda é que seja necessário e suficiente.

CONDIÇÃO SUFICIENTE

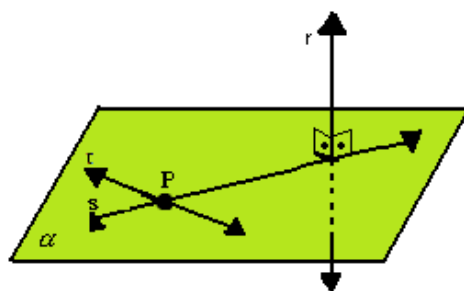
Teorema: Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes s e t de um plano α , então a reta r é perpendicular ao plano α .

$$\left. \begin{array}{l} r \perp s \text{ e } r \perp t \\ s \subset \alpha \text{ e } t \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$



Temos duas consequências do Teorema:

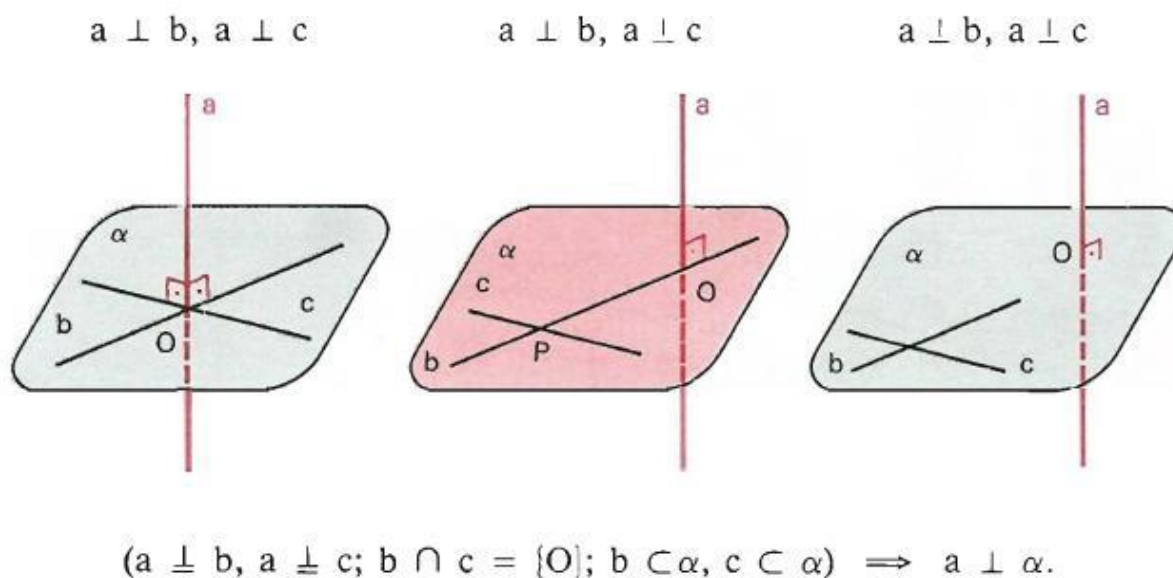
Seja um plano α com duas retas concorrentes r e s que se encontram no ponto P . Se uma reta r é perpendicular a s e ortogonal a t , então a reta r é perpendicular ao plano α .



Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Podemos escrever o teorema de outra forma na condição suficiente.

Teorema: Se uma reta forma ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.



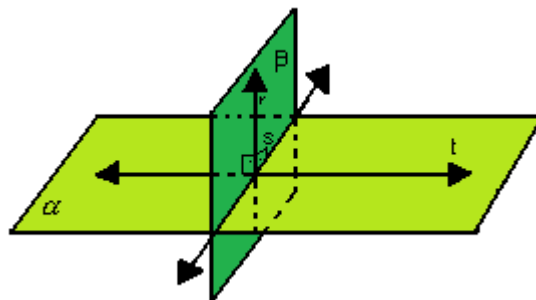
CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE

Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um ponto é formar **ângulo reto** com duas retas **concorrentes** do plano.

PLANOS PERPENDICULARES

Definição: Um plano α é perpendicular a um plano β se, e somente se, α conter uma reta perpendicular a β .

$$\alpha \perp \beta \Rightarrow \exists r \subset \beta \text{ e } r \perp \alpha$$



Observação: A existência de um plano perpendicular a outro baseia-se na existência de uma reta perpendicular a um plano.

Observação: Existem infinitos planos perpendiculares a um plano dado e esses planos podem ser paralelos entre si ou secantes.

Teorema: Se dois planos são perpendiculares entre si e uma reta de um deles é perpendicular à interseção dos planos, então essa reta é perpendicular ao outro lado.

Observação: Pela definição, se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer outro plano que a contenha é perpendicular ao primeiro.

Juntando as definições e o teorema, podemos enunciar uma condição necessária e suficiente para que dois planos secantes sejam perpendiculares.

CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE

Uma condição necessária e suficiente para que dois planos secantes sejam perpendiculares é que toda reta de um deles, perpendicular à interseção, seja perpendicular ao outro.

Definição: Dois planos secantes, não perpendiculares, são ditos planos oblíquos.

ATIVIDADES

1. Sejam três retas a , b e c no espaço tais que $a \perp b$ e $c \perp a$. Que se pode concluir a propósito das posições relativas das retas b e c ?

2. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Para que uma reta e um plano sejam perpendiculares é necessário que eles sejam secantes.

b) Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas do plano.

c) Uma reta perpendicular a um plano forma ângulo reto com qualquer reta do plano.

- d) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
- e) Se uma reta é perpendicular a duas retas paralelas e distintas de um plano, então ela está contida no plano.
- f) Se uma reta é ortogonal a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.
- g) Uma reta ortogonal a duas retas paralelas e distintas de um plano pode ser paralela ao plano.
- h) Dadas duas retas distintas de um plano, se uma outra reta é perpendicular à primeira e ortogonal à segunda, então ela é perpendicular ao plano.
- i) Se uma reta forma ângulo reto com duas retas de um plano, distintas e que têm um ponto comum, então ela é perpendicular ao plano.
- j) Duas retas reversas são paralelas a um plano. Toda reta ortogonal a ambas é perpendicular ao plano.
- k) Duas retas não paralelas entre si são paralelas a um plano. Se uma reta forma ângulo reto com as duas, então ela é perpendicular ao plano.
- l) Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.
- m) Uma reta e um plano são perpendiculares. Toda reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano ou está contida nele.
- n) Uma reta e um plano, perpendiculares a uma outra reta em pontos distintos são paralelos.

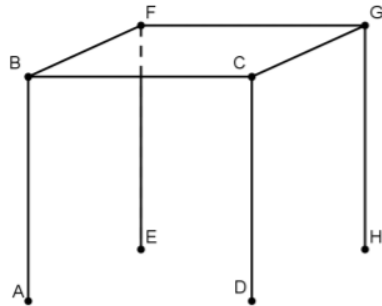
3. Classifique em verdadeiro (*V*) ou falso (*F*):

- a) Se dois planos são secantes, então eles são perpendiculares.
- b) Se dois planos são perpendiculares, então eles são secantes.
- c) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles é perpendicular ao outro.
- d) Se uma reta é perpendicular a um plano, por ela passa um único plano, perpendicular ao plano dado.
- e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.
- f) Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são paralelos.
- g) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta perpendicular a um deles é paralela ao outro ou está contida neste outro.
- h) Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
- i) Uma reta e um plano são paralelos. Se um plano é perpendicular ao plano dado, então ele é perpendicular à reta.

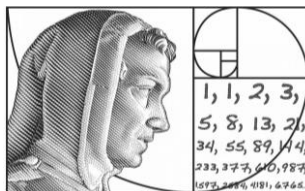
j) Por uma reta passa um plano perpendicular a um plano dado.

k) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta de um deles forma ângulo reto com qualquer reta do outro.

4. A figura abaixo representa uma mesa, cujo tampo é perpendicular às pernas que, por sua vez, são perpendiculares ao solo. Responda:



- a) Qual a posição relativa das retas que contêm as pernas?
- b) Qual a posição relativa entre as retas que contêm as pernas e o plano que contém o tampo?
- c) Qual a posição relativa entre a reta que contém uma régua, deixada sobre o tampo, e as retas que contêm as pernas?

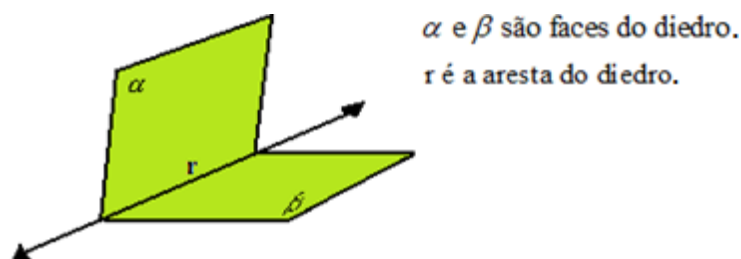


AULA 11

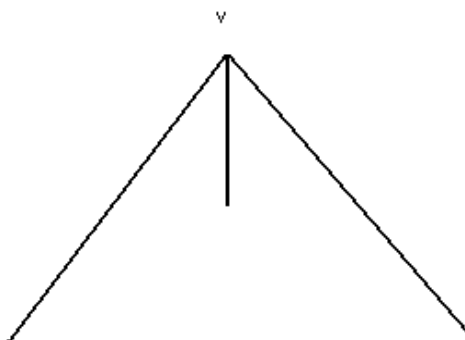
DIEDROS, TRIEDRO E ÂNGULO POLIÉDRICO

Nesta aula estudaremos as definições de diedro, triedro e ângulo poliédrico.

Definição: Dois semiplanos não coplanares, com origem numa mesma reta, determinam uma figura geométrica chamada **ângulo diédrico**, ou **diedro**.



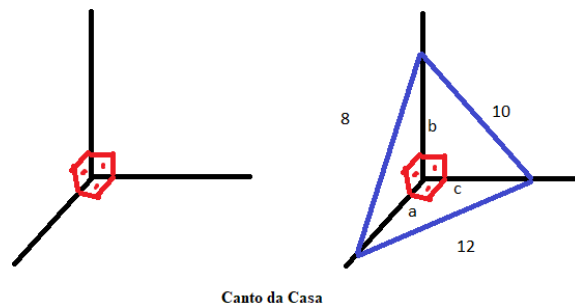
Definição: Três semi-retas não coplanares, com origem em um mesmo ponto, determinam três ângulos que formam uma figura geométrica chamada **ângulo triédrico** ou **triedro**.



Vejamos alguns exemplos de triedro:

Exemplos:

1. Cantos de casa



2. Caixa de Toblerone



Caixa de Toblerone

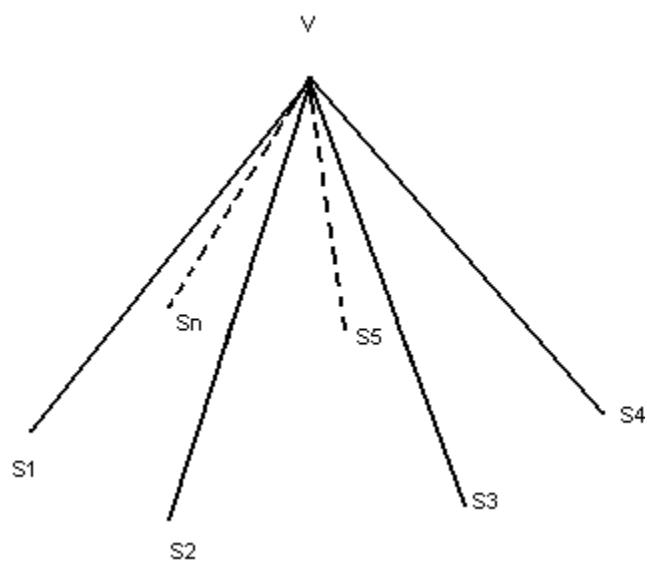
3. Calendário



Calendário

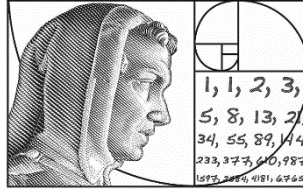
Definição: Sejam n ($n \geq 3$) semirretas de mesma origem tais que nunca fiquem três em um mesmo semiplano. Essas semirretas determinam n ângulos em que o plano de cada um

deixa as outras semirretas em um mesmo semiespaço. A figura formada por esses ângulos é o ângulo poliédrico.



ATIVIDADES

1. Defina diedro.
2. Defina triedro.
3. Defina ângulo poliédrico.



AULA 13

POLIEDROS CONVEXOS



esta aula estudaremos os poliedros: convexos, eulerianos, os de Platão e os regulares.

Primeiramente, devemos nos ater à palavra poliedro: qual seu significado?

A palavra poliedro tem sua origem etimológica no termo em grego POLIHEDRA, que significa o que tem muitas faces.

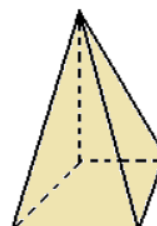
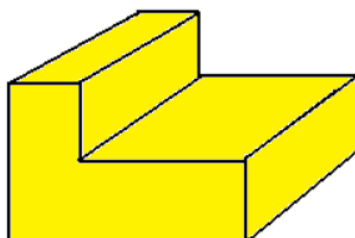
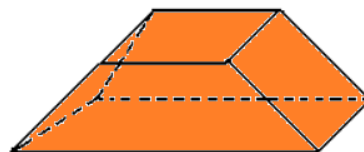
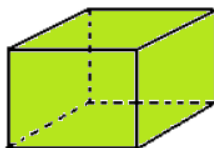
A partir da etimologia da palavra poliedro, podemos definir matematicamente o que é um poliedro.

Definição: O sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm dois a dois somente uma aresta em comum são chamados de **Poliedro**.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplos:

1.



Observação 1: Em um poliedro, temos que:

- Dois polígonos não estão no mesmo plano.
- Cada lado de um polígono não está em mais que dois polígonos.

ELEMENTOS DE UM POLIEDRO

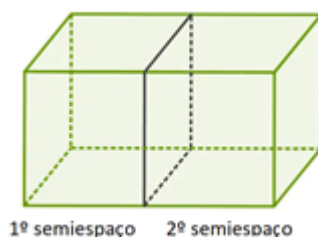
Os elementos de um poliedro são:

- **Faces:** são os polígonos.
- **Arestas:** são os lados dos polígonos.
- **Vértices:** são os vértices dos polígonos.
- **Ângulos:** são os ângulos dos polígonos.

Observação 2: A reunião das faces é a **superfície** do poliedro.

POLIEDRO CONVEXO

Definição: Um plano divide o espaço em dois semiespaços.

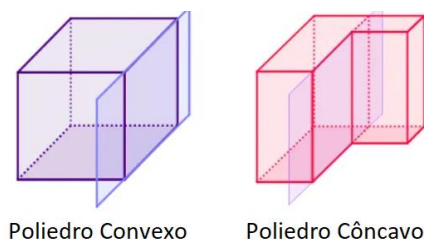


Definição: Seja um número finito n de polígonos convexos, tal que $n \geq 4$, é um **Poliedro Convexo**, se:

- Dois polígonos não estiverem num mesmo plano.
- Cada lado de polígono for comum a dois e somente dois polígonos.
- O plano de cada polígono deixar os demais polígonos num mesmo semiespaço.

Podemos definir de outra forma o poliedro convexo, observando a sua face, pois a face de um **poliedro convexo** nunca corta a outra face, isto é, deixando parte do poliedro em um semiespaço e a outra parte em outro.

Observação 3: Se uma parte de um poliedro está em um semiespaço e a outra parte em outro, dizemos que o poliedro é **não convexo** ou **côncavo**.



CONGRUÊNCIA

Definição: Dois poliedros são congruentes se, e somente se, for possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que as faces e os ângulos poliédricos de um forem ordenadamente congruentes às faces e ângulos poliédricos do outro.

Observação 4: Da congruência entre dois poliedros sai a congruência das faces, arestas, ângulos e diedros.

RELAÇÃO DE EULER

Definição: Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação

$$V - A + F = 2$$

Em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

POLIEDRO EULERIANO

Definição: Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler são chamados poliedros eulerianos.

Teorema: Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Propriedade: A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é

$$S = (V - 2) \cdot 4r$$

em que V é o número de vértices e r é um ângulo reto.

POLIEDROS DE PLATÃO

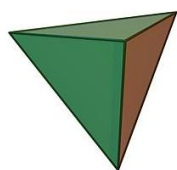
Definição: Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

- Todas as faces tiverem o mesmo número (n) de arestas.
- Todos os ângulos poliédricos tiverem o mesmo número (m) de arestas.
- Valer a relação de Euler ($V - A + F = 2$).

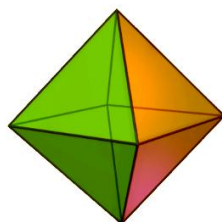
Propriedade: Existem cinco, e somente cinco, **classes** de poliedros de Platão.

NOMES DOS POLIEDROS DE PLATÃO

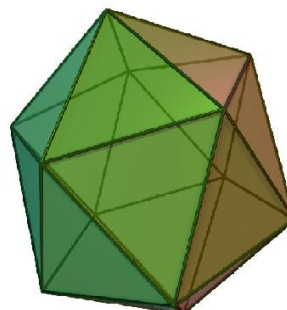
Como indicamos na propriedade acima, temos, em resumo:



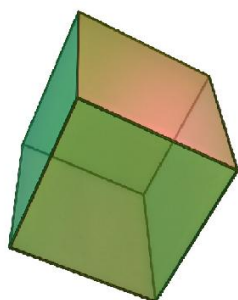
Tetraedro



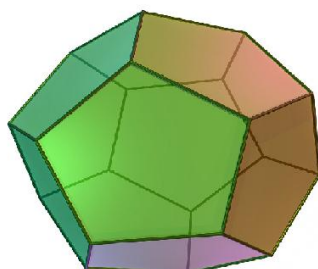
Octaedro



Icosaedro



Hexaedro

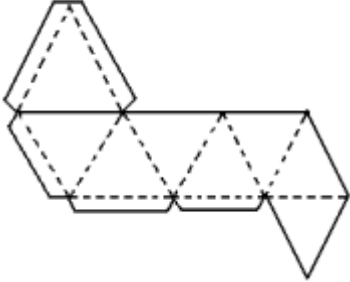
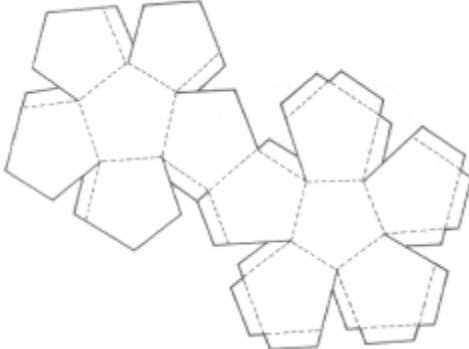
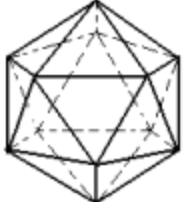
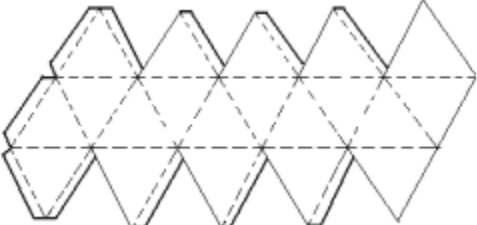


Dodecaedro

Nome	m	n	A	V	F
Tetraedro	3	3	6	4	4
Hexaedro	3	4	12	8	6
Octaedro	4	3	12	6	8
Dodecaedro	3	5	30	20	12
Icosaedro	5	3	30	12	20

Podemos resumir os Poliedros de Platão com a seguinte tabela:

Poliedro	Planificação	Elementos
 Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas

 Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
 Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
 Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

POLIEDROS REGULARES

Definição: Um poliedro convexo é regular quando:

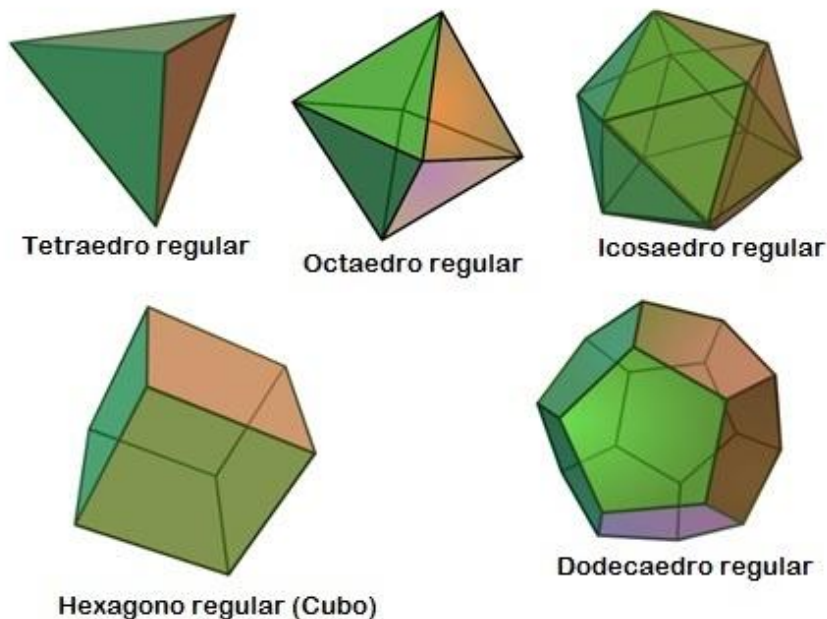
- Suas faces são polígonos regulares e congruentes.
- Seus ângulos poliédricos são congruentes.

Propriedade: Existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros regulares.

Demonstração: Usando as condições para um poliedro ser regular, temos:

- Suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todas têm o mesmo número de arestas.
- Seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos têm o mesmo número de arestas.

Pelas condições necessárias para termos um poliedro regular, os únicos poliedros que se encaixam nestes termos são os poliedros de Platão, e como estes são constituídos por cinco poliedros, então podemos afirmar que existem cinco e somente cinco tipos de poliedros regulares: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

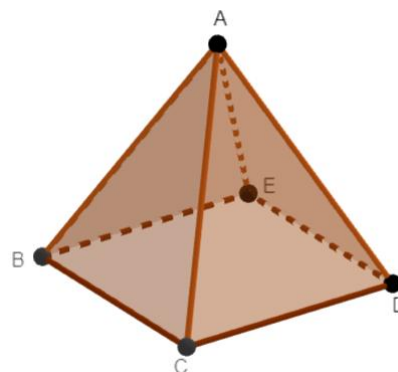


Observação 5: Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

ATIVIDADES

1. Analise o poliedro da figura ao lado e responda:

- Qual é o número de faces, de arestas e de vértices?
- Qual é a forma de cada face?
- O vértice C é comum a quantas arestas?
- O vértice A é comum a quantas arestas?
- Qual é a posição relativa das retas determinadas pelas arestas $\overline{AE}$ e $\overline{BC}$?



2. Num poliedro convexo, o número de vértices é 5 e o de arestas é 10. Qual é o número de faces?

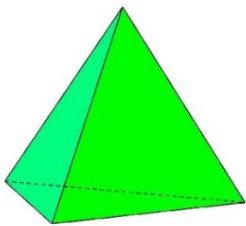
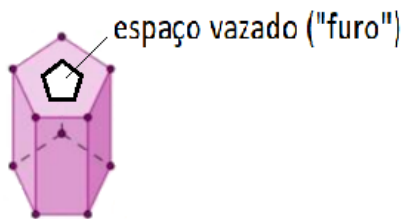
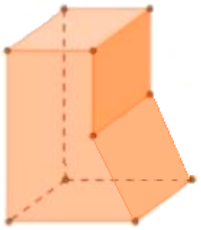
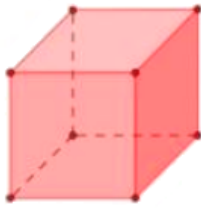
3. Em um poliedro convexo de 20 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?

4. Um poliedro convexo apresenta uma face hexagonal e seis faces triangulares. Quantos vértices tem esse poliedro?

5. Faça um desenho de cada um dos Poliedros de Platão.

6. Um poliedro convexo tem 6 faces triangulares e 4 faces hexagonais. Quantas arestas e quantos vértices tem esse poliedro?

7. Classifique cada um dos poliedros em convexo ou não convexo.



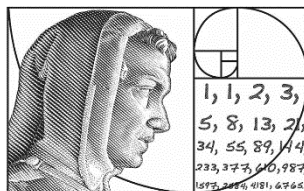
8. Qual é o número de faces de um poliedro convexo de 20 vértices tais que em cada vértice concorrem 5 arestas?

9. Em um poliedro o número de vértices corresponde a $\frac{2}{3}$ do número de arestas e o número de faces é três unidades menos que o vértice. Descubra quantas são as faces, os vértices e as arestas desse poliedro.

10. Determine a soma dos ângulos das faces de um poliedro que possui:

a) 5 vértices;

b) 12 arestas e 6 faces.



AULA 19

CILINDRO

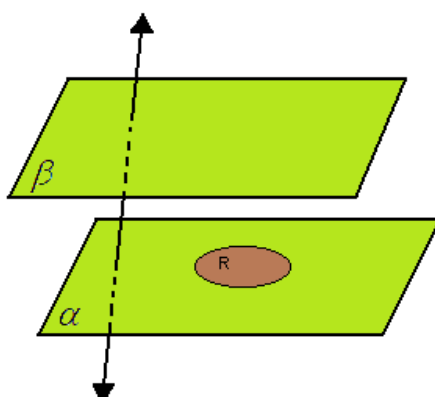


esta aula estudaremos o cilindro, que é uma forma muito utilizada no nosso cotidiano.

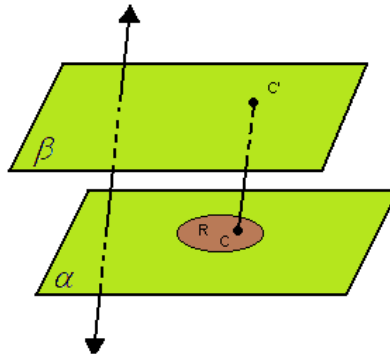
Mas será que conhecemos o significado e a etimologia da palavra cilindro?

A palavra cilindro tem sua origem etimológica no termo em grego KÝLINDROS que significa rolo e está ligado com a palavra KÝLINDEIN que significa rolar.

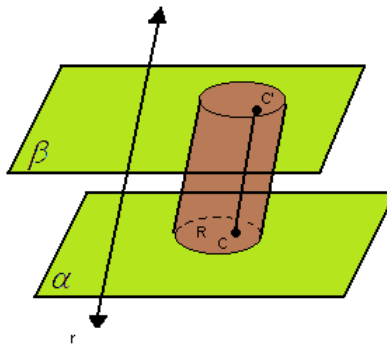
Definição: Seja α e β dois planos paralelos e distintos, um círculo R contido em α e uma reta r que intercepta α e β , mas não R :



Para cada ponto C da região R , vamos considerar o segmento $\overline{CC'}$, paralelo à reta r , onde $C' \in \beta$:



Assim, o conjunto de todos os segmentos $\overline{CC'}$ congruentes e paralelos a $\mathbf{r}$ chamamos de **Cilindro**, ou **Cilindro Circular**.



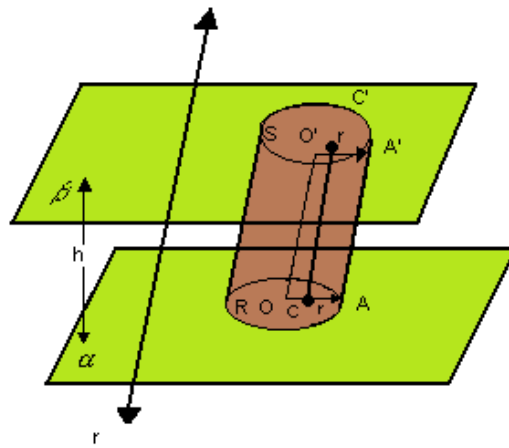
ELEMENTOS DO CILINDRO

Um cilindro possui os seguintes elementos:

- Bases.
- Altura.
- Geratriz.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 1: Considerando o cilindro abaixo, temos os seguintes elementos:



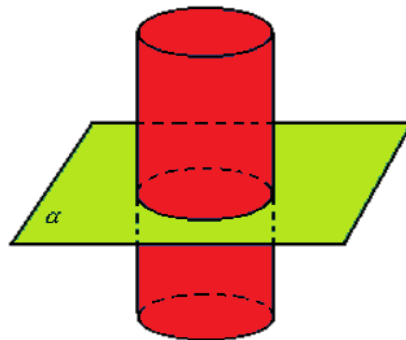
Bases: os círculos de centro O e O' e raios r .

Altura: a distância h entre os planos α e β .

Geratriz: qualquer segmento de extremidades nos pontos das circunferências das bases (por exemplo, $\overline{AA'}$) e paralelo à reta r .

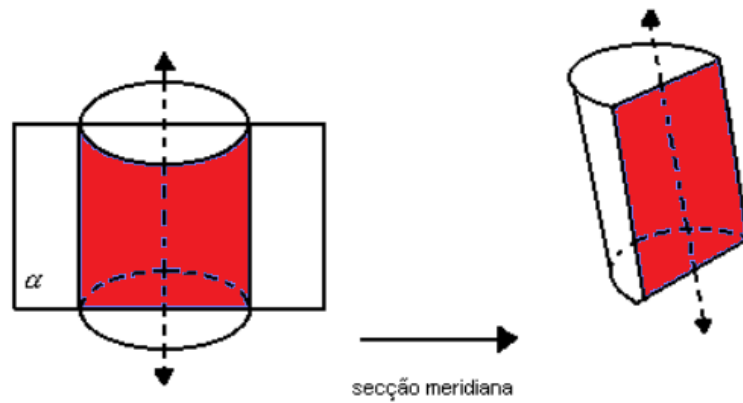
SEÇÕES

Definição: Seção transversal é a região determinada pela interseção do cilindro com um plano paralelo às bases.



Observação 1: Todas as seções transversais são congruentes.

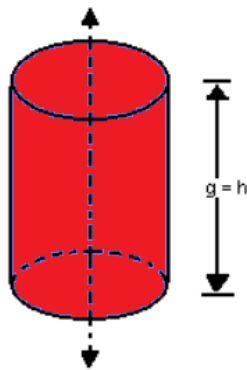
Definição: Seção meridiana é a região determinada pela intersecção do cilindro com um plano que contém o eixo.



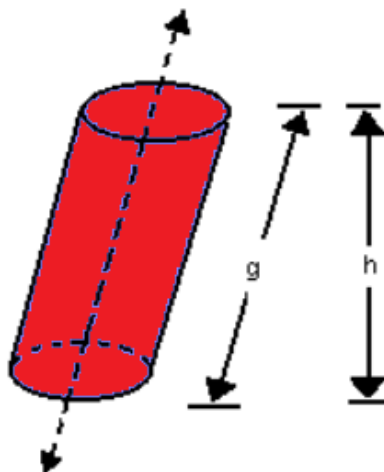
CLASSIFICAÇÃO

Um cilindro pode ser classificado de duas formas:

Circular Reto: quando as geratrizes são perpendiculares às bases.

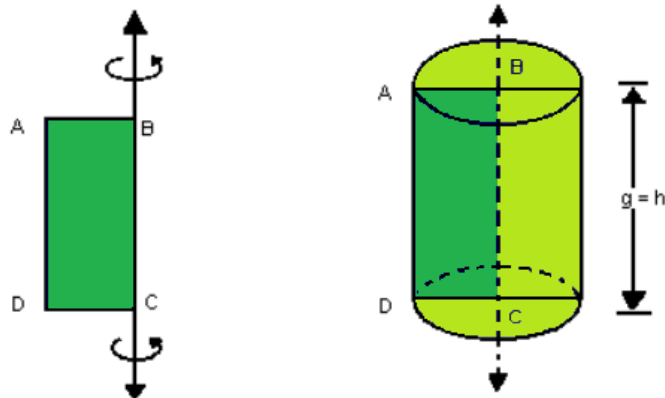


Circular Oblíquo: quando as geratrizes são oblíquas às bases.



O cilindro circular reto também é conhecido por cilindro de revolução, pois ele pode ser gerado pela rotação completa de um retângulo por um de seus lados.

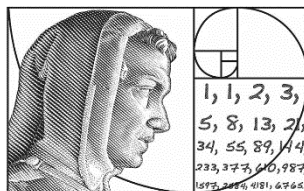
Assim, seja um retângulo $ABCD$: se rotacionarmos o lado $\overline{BC}$ temos o cilindro a seguir:



Observação 1: A reta $\overleftrightarrow{BC}$ contém os centros das bases e é o eixo do cilindro.

ATIVIDADES

1. Defina um cilindro.
2. Desenhe um cilindro qualquer, indique no desenho os seus elementos e explique cada elemento que lhe pertence.
3. Defina:
 - a) Seção transversal
 - b) Seção meridiana
 - c) Circular reto
 - d) Circular oblíquo

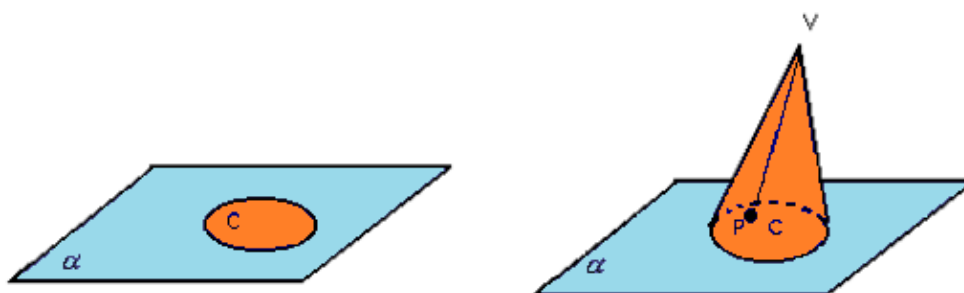


AULA 21

CONE

Nesta aula estudaremos o cone, que é muito utilizado em festa de aniversário quando tem o chapéu de aniversário.

Definição: Seja um círculo C , contido num plano α , e um ponto V (vértice) fora de α , chamamos de Cone Circular o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}$ com $P \in C$.



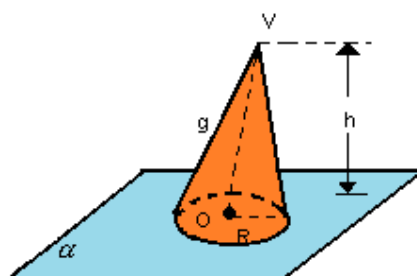
ELEMENTOS DO CILINDRO

Um cone possui os seguintes elementos:

- Altura.
- Geratriz.
- Raio da base.
- Eixo de rotação.

Exemplos:

1. Considerando o cone abaixo, temos os seguintes elementos:



Altura: a distância h do vértice V ao plano α .

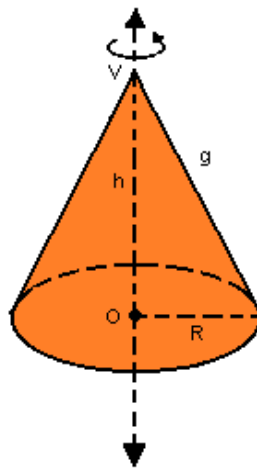
Geratriz (g): segmento com uma extremidade no ponto V e outra num ponto da circunferência.

Raio da base: raio R do círculo.

Eixo de rotação: reta $\overleftrightarrow{VO}$ determinada pelo centro do círculo e pelo vértice do cone.

CONE RETO

Definição: Todos os cones cujo eixo de rotação é perpendicular à base é chamado Cone Reto ou Cone de Revolução.



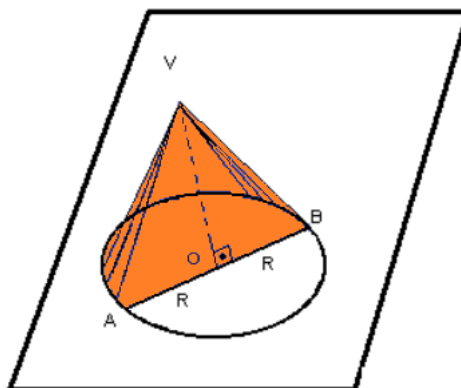
Observação 1: O Cone de Revolução pode ser gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.

Observação 2: Da figura acima e pelo Teorema de Pitágoras, temos a relação:

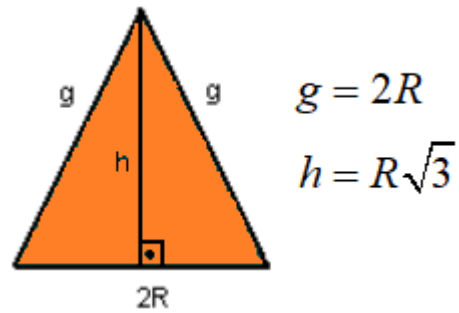
$$g^2 = h^2 + R^2$$

SEÇÕES

Definição: Seção meridiana é a região triangular determinada pela interseção do Cone de Revolução com um plano que contém o seu eixo.

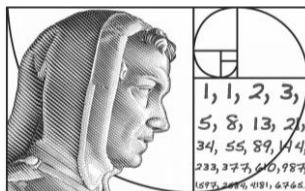


Observação 1: Se o triângulo AVB for equilátero, então o cone será equilátero.



ATIVIDADES

1. Defina um cone.
2. Desenhe um cone qualquer, indique no desenho os seus elementos e explique cada elemento que lhe pertence.
3. Defina:
 - a) Cone reto
 - b) Seção meridiana



AULA 28

ESFERA E CUBO



esta aula, daremos início ao estudo da inscrição e a circunscrição de sólidos. Mas o que significa um sólido ser inscrito ou circunscrito?

Definição: Um sólido A é **inscrito** em um sólido B se todos os vértices de A pertencerem ao sólido B.

Definição: Um sólido A é **circunscrito** em um sólido B se todos os lados de A são tangentes ao sólido B.

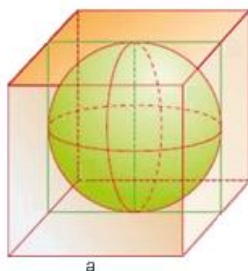
Nesta aula, iniciaremos o estudo da inscrição e a circunscrição de sólidos com a inscrição e a circunscrição da esfera e do cubo, isto é, estudaremos a esfera circunscrita e inscrita em um cubo.

ESFERA E CUBO

Iremos estudar a esfera inscrita e circunscrita em um cubo.

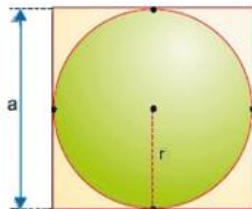
ESFERA INSCRITA EM CUBO

Seja uma esfera de raio r inscrita num cubo de aresta a .



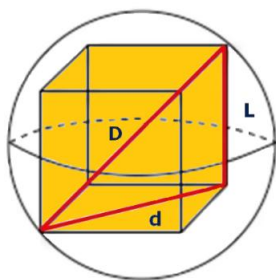
Podemos definir o raio r da esfera em função da aresta a do cubo, relacionando o diâmetro com a aresta.

$$2r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$



ESFERA CIRCUNSCRITA AO CUBO

Seja uma esfera de raio R circunscrita num cubo de aresta a .

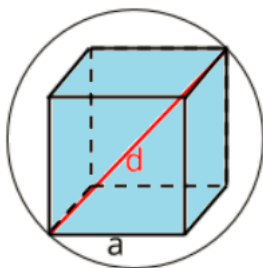


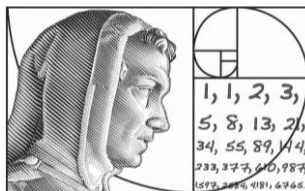
Podemos definir o raio R da esfera em função da aresta a do cubo, relacionando o diâmetro com a diagonal do cubo.

$$2R = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ATIVIDADES

1. Determine o volume de uma esfera inscrita em um cubo cuja medida da aresta é de 6 cm .
2. Determine a área de uma esfera inscrita em um cubo com aresta de 8 dm .
3. Calcule o volume de um cubo inscrito em uma esfera de raio igual a 6 cm .
4. Determine a razão entre a área da esfera e a do cubo ilustrados abaixo, com $a = 4\text{ cm}$.





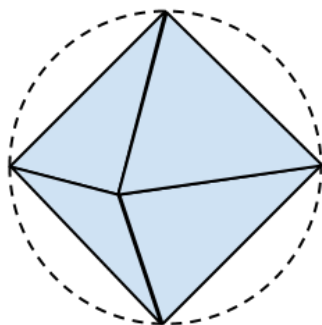
AULA 29

ESFERA E OCTAEDRO REGULAR

Nesta aula, estudaremos a inscrição e a circunscrição da esfera e do octaedro regular, isto é, estudaremos a esfera circunscrita e inscrita em um octaedro regular.

ESFERA CIRCUNSCRITA AO OCTAEDRO REGULAR

Seja uma esfera de raio R circunscrita num octaedro regular de aresta a .



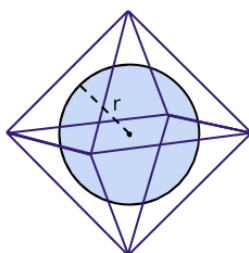
Podemos definir o raio R da esfera em função da aresta a do octaedro regular, relacionando o diâmetro com a diagonal do octaedro.

$$2R = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ESFERA INSCRITA EM UM OCTAEDRO REGULAR

Seja uma esfera de raio r inscrita num octaedro regular de aresta a . O raio de uma esfera inscrita em um octaedro regular é dado por:

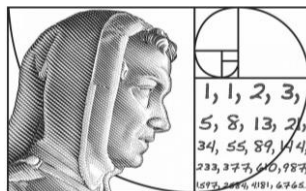
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



Observação: Lembre-se que a é a medida da aresta do octaedro.

ATIVIDADES

1. Determine o volume de uma esfera inscrita em um octaedro de aresta igual a 36 dm .
2. Uma esfera está inscrita em um octaedro regular de aresta igual a 3 cm . Calcule a área desta esfera.
3. Determine a área de uma esfera circunscrita em um octaedro regular cuja aresta mede 40 dm .
4. Determine o volume de uma esfera circunscrita em um octaedro regular de aresta igual a 8 cm .



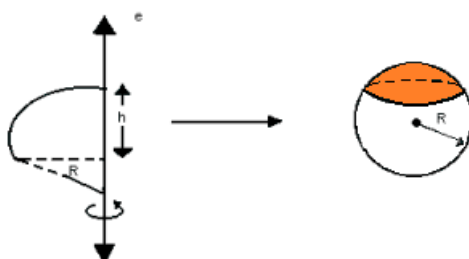
AULA 35

SUPERFÍCIES E SÓLIDOS ESFÉRICOS

Nesta aula, estudaremos a superfície e os sólidos esféricos

CALOTA ESFÉRICA

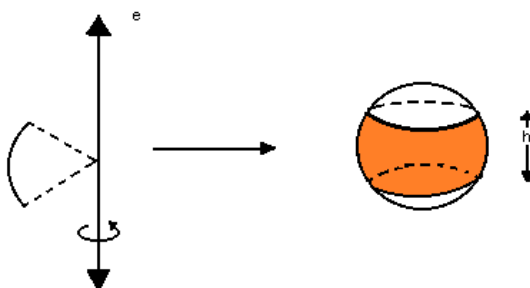
Definição: A **calota esférica** é a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta tal que passa por um extremo do arco e não intercepta em outro ponto.



Definição: A área da calota esférica é dada por $A_{calota} = 2\pi R h_{calota}$.

ZONA ESFÉRICA

Definição: A **Zona esférica** é a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta tal que não passa por nenhum extremo do arco e nem intercepta o arco em outro ponto.

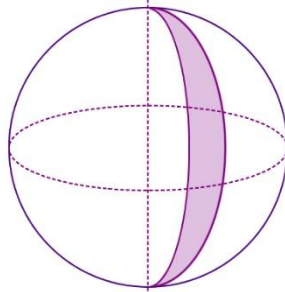


Observação 1: A zona esférica é chamada de superfície esférica.

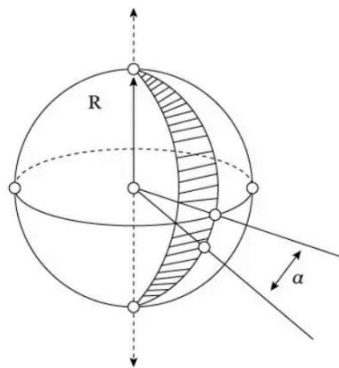
Definição: A área da zona esférica é dada por $A_{Zona} = 2\pi Rh_{Zona}$.

FUSO ESFÉRICO

Definição: O **fuso esférico** é uma parte da superfície esférica que se obtém ao girar uma semicircunferência de um ângulo em torno de seu eixo:



Teorema: A área do **fuso esférico** é calculada pelas seguintes fórmulas:



$$A_F = 2\pi R^2 \alpha \quad (\alpha \text{ em radianos}) \quad \text{ou} \quad A_F = \frac{\pi R^2 \alpha}{90^\circ} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

Demonstração: Seja uma esfera de raio R e o fuso esférico com um ângulo α . Podemos obter a área do fuso esférico de duas formas: o ângulo em radianos ou o ângulo em graus.

Ângulo em radiano

Fazendo uma regra de três com o ângulo em radiano, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} A_S - 2\pi \\ A_F - \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow A_F = \frac{4\pi R^2 \alpha}{2\pi}$$

$$A_F = 2\pi R^2 \alpha$$

Ângulo em graus

Fazendo uma regra de três com o ângulo em radiano, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} A_S \\ A_F \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \left. \begin{array}{l} 360^\circ \\ \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow A_F = \frac{4\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$$

$$A_F = \frac{\pi R^2 \alpha}{90^\circ}$$

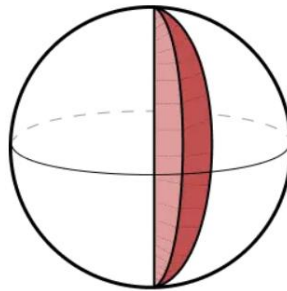
Antes de adentrarmos nas partes da esfera, iremos definir a sua área.

Definição: A **área da superfície esférica** de raio R é dada por $A_s = 4\pi R^2$.

A esfera possui quatro partes as quais iremos estudar: **cunha esférica**, **segmento esférico de uma base**, o **segmento esférico de duas bases** e **setor esférico**.

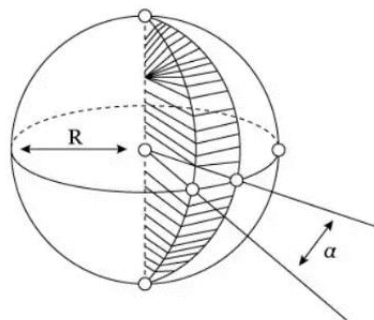
CUNHA ESFÉRICA

Definição: A **cunha esférica** é uma região tridimensional formada por dois semicírculos e o eixo de rotação da esfera.



Observação: Podemos comparar a cunha esférica com o gomo de uma laranja.

Teorema: O **volume da cunha esférica** é calculado pelas seguintes fórmulas:



$$V_c = \frac{2}{3} R^3 \alpha \quad (\alpha \text{ em radianos}) \quad \text{ou} \quad V_c = \frac{\pi R^3 \alpha}{270^\circ} \quad (\alpha \text{ em graus})$$

Demonstração: Seja uma esfera de raio R e a cunha com um ângulo α . Podemos obter o volume da cunha de duas formas: o ângulo em radianos ou o ângulo em graus.

Ângulo em radiano

Fazendo uma regra de três com o ângulo em radiano, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} V_E \\ V_C \end{array} \right\} \begin{array}{l} - 2\pi \\ - \alpha \end{array} \Rightarrow V_C = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi R^3 \alpha}{2\pi}$$

$$V_C = \frac{2}{3} R^3 \alpha$$

Ângulo em graus

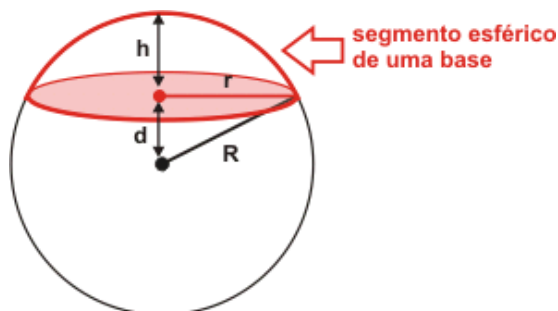
Fazendo uma regra de três com o ângulo em radiano, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} V_E \\ V_C \end{array} \right\} \begin{array}{l} - 360^\circ \\ - \alpha \end{array} \Rightarrow V_C = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi R^3 \alpha}{360^\circ}$$

$$V_C = \frac{\pi R^3 \alpha}{270^\circ}$$

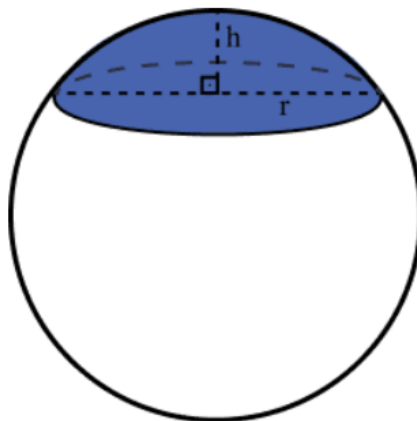
SEGMENTO ESFÉRICO DE UMA BASE

Definição: O **segmento esférico de uma base** é um segmento de uma esfera que foi cortada por um plano perpendicular ao eixo da esfera.



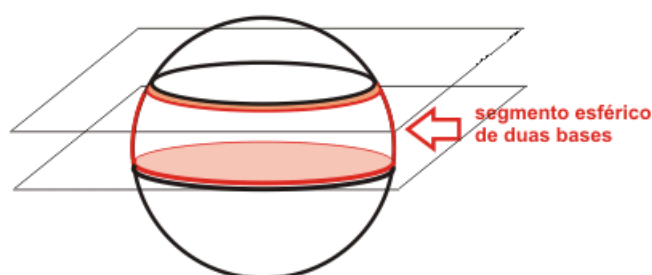
Definição: O **volume do segmento esférico de uma base** é dado pela seguinte fórmula:

$$V = \frac{\pi h}{6} [3r^2 + h^2]$$

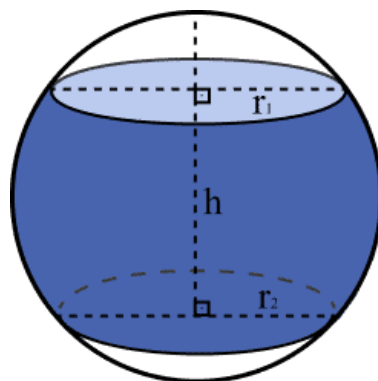


SEGMENTO ESFÉRICO DE DUAS BASES

Definição: O **segmento esférico de duas bases** é um segmento de uma esfera que foi cortada por dois planos paralelos entre si e perpendicular ao eixo de rotação da esfera.

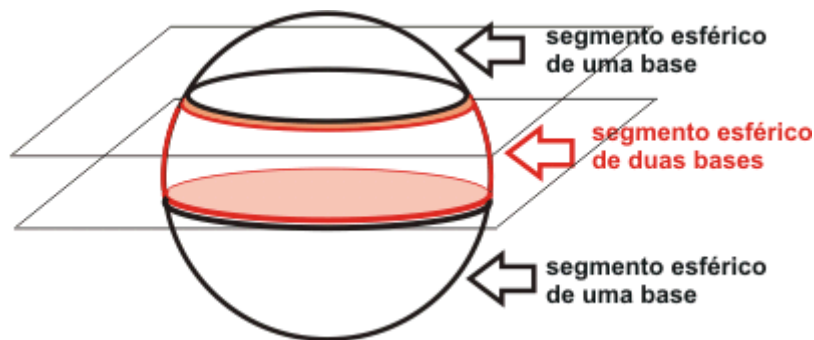


Definição: O **volume do segmento esférico de duas bases** é dado pela seguinte fórmula:



$$V = \frac{\pi h}{6} \left[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2 \right]$$

Observação: Passando dois planos paralelos entre si na esfera, acabamos dividindo-a em três partes; a parte compreendida entre os dois planos é chamada de **segmento esférico de duas bases** e as outras duas partes são chamadas de **segmento esférico de uma base**.



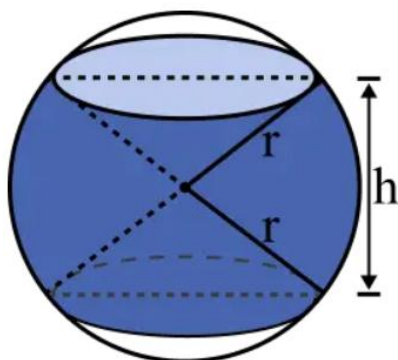
Definição: O volume da esfera de raio R é dado por.

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

SETOR ESFÉRICO

Definição: O **setor esférico** é uma região compreendida entre uma região que foi cortada por dois planos paralelos entre si e perpendiculares ao eixo da esfera.

Definição: O volume do setor esférico é dado pela seguinte fórmula:

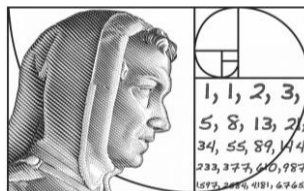


$$V_{SE} = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

ATIVIDADES

1. Determine a área de uma calota esférica de 75 cm de altura de uma esfera de 70 cm de raio.
2. Determine a área de uma esfera em que uma zona de 10 cm de altura tem área de $120\pi \text{ cm}^2$.
3. Determine o volume de uma esfera, sabendo que uma calota dessa esfera tem 47 cm de altura e $198\pi \text{ cm}^2$ de área.

4. Determine a altura de uma zona esférica, sabendo que sua área é igual ao quíntuplo da área do círculo máximo da esfera na qual está contida.
5. Determine o volume de um segmento esférico de uma base, sendo de $16\pi \text{ m}^2$ a área da base e 2 m a altura do segmento.
6. O raio da base e a altura de um segmento esférico de uma base medem, respectivamente, 8 cm e 12 cm. Determine o volume do segmento esférico.
7. Determine o volume de um segmento cuja calota tem $100\pi \text{ cm}^2$ de área, estando ambos situados em uma esfera de 20 cm de diâmetro.

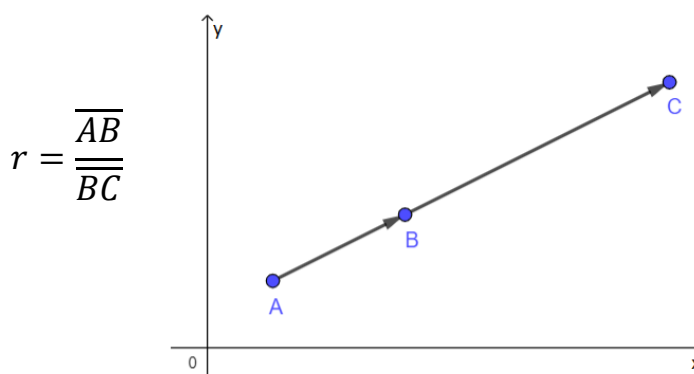


AULA 39

RAZÃO ENTRE SEGMENTOS COLINEARES

Nesta aula, estudaremos a razão entre segmentos colineares.

Definição: Dados três pontos colineares A , B e C tal que $A \neq B \neq C$, chamamos de razão entre os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ o número real r tal que:



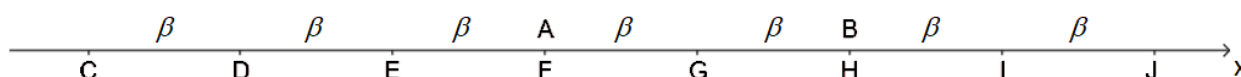
Observação: Como r é o quociente entre as medidas algébricas de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, temos que:

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm o mesmo sentido, então a razão r é positiva.

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm sentidos opostos, então a razão r é negativa.

Exemplos:

1. Seja um eixo x e sobre ele os pontos C, D, E, F, G, H, I, J tais que $F = A$ e $H = B$ e $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{HI}, \overrightarrow{IJ}$, têm comprimento β . Calculemos as razões: $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}, \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BD}}, \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BE}}, \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BF}}, \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BG}}, \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BH}}, \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BI}}$ e $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BJ}}$.



Resolução:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{2\beta}{-5\beta} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BG}} = \frac{2\beta}{-\beta} = -2$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{2\beta}{-4\beta} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \frac{2\beta}{0} \text{ (não existe)}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{2\beta}{-3\beta} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BI}} = \frac{2\beta}{\beta} = 2$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} = \frac{2\beta}{-2\beta} = -1$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BJ}} = \frac{2\beta}{\beta} = 1$$

Quando temos as coordenadas de A , B e C , poderíamos recorrer à fórmula de distância entre dois pontos, porém este não é o melhor caminho, por um único motivo:

O resultado de r , seria sempre $r \geq 0$ (**positivo**).

Assim, quando $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ têm **sentidos opostos**, erraríamos o sinal da razão.

Para resolver os problemas apresentados com as coordenadas de A , B e C , temos a seguinte definição:

Definição: Sejam três pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$, podemos definir a razão entre segmentos colineares da seguinte forma:

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

Exemplos:

1. Dados os pontos $A = (4, 9)$, $B = (7, 15)$ e $C = (9, 19)$, calcular a razão entre os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Resolução: Calculando pelas projeções no eixo Ox , temos que:

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{7 - 4}{9 - 7} = \frac{3}{2}$$

Calculando pelas projeções no eixo Oy , temos que:

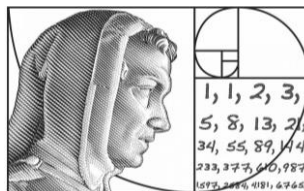
$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{15 - 9}{19 - 15} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Observação: Note que os dois valores, tanto no eixo Ox quanto no eixo Oy tinham que ser iguais.

ATIVIDADES

1. Calcule a razão $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right)$, sendo dados os pontos $A = (1, 4)$, $B = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $C = (-2, -2)$.

2. Dados $A = (5, 3)$ e $B = (-1, -3)$, seja C a intersecção da reta AB com o eixo das abscissas. Calcule a razão $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right)$.



AULA 41

CONDIÇÃO PARA ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

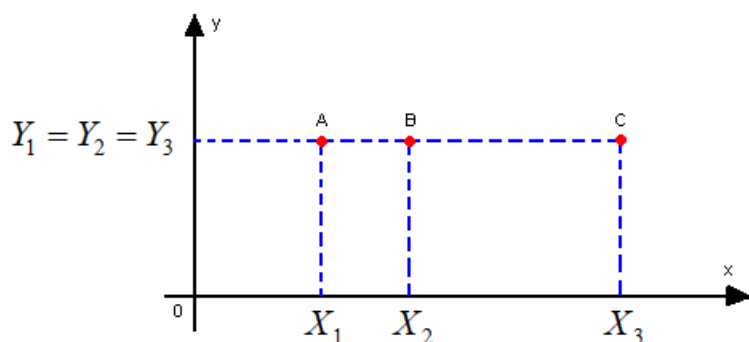


esta aula, estudaremos as condições para alinhamento de três pontos.

Teorema: Sejam três pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$: eles estão alinhados se, e somente se, suas coordenadas verificam a igualdade.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração: Para demonstrar o Teorema acima, devemos considerar três casos:



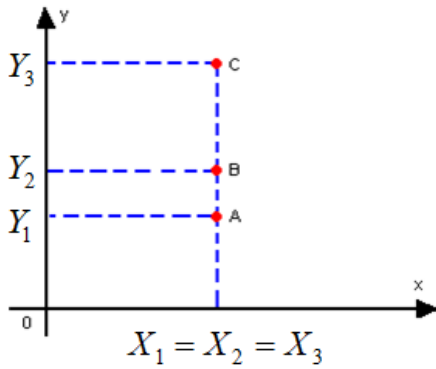
1º Caso: Três pontos alinhados horizontalmente.

Assim, temos que as coordenadas dos três pontos nas ordenadas são iguais, isto é $Y_1 = Y_2 = Y_3$.

Logo, o determinante é nulo, pois a 2ª e a 3ª coluna são proporcionais.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_1) + (x_3 \cdot y_1) - (x_3 \cdot y_1) - (x_1 \cdot y_1) - (x_2 \cdot y_1) = 0$$



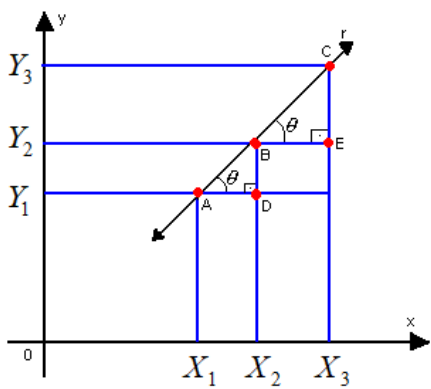
2º Caso: Três pontos alinhados verticalmente.

As coordenadas dos três pontos nas abscissas são iguais, isto é $X_1 = X_2 = X_3$.

Logo, o determinante é nulo, pois a 1ª e a 3ª coluna são proporcionais.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_3) + (x_1 \cdot y_1) - (x_1 \cdot y_2) - (x_1 \cdot y_3) - (x_1 \cdot y_1) = 0$$



3º Caso: Três pontos numa reta não paralela aos eixos.

Pela imagem, podemos perceber que os triângulos ABD e BCE são semelhantes, então temos que:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{DB}{EC} \Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} \Rightarrow \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Desenvolvendo a igualdade, temos que:

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 y_3 - x_1 y_3 - x_2 y_2 + x_1 y_2 - x_3 y_2 + x_3 y_1 + x_2 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 y_2 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

Como,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_1 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1$$

então, temos que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

■ Q.E.D

Observação: A recíproca da afirmação demonstrada é válida, isto é, se $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, então os pontos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão alinhados.

Exemplos:

1. Mostre que $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ e $C(7, 9)$ são colineares.

Resolução: Usando o teorema de condição para alinhamento de três pontos, temos que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 9 + 7 - 21 + 9 - 1 = 0$$

Portanto, A , B , C são colineares.

Para quais valores de x , os pontos $A(x, x)$, $B(1, 3)$ e $C(7, 9)$ são colineares?

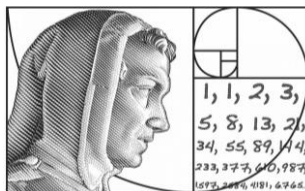
Resolução: Usando o teorema de condição para alinhamento de três pontos, temos que:

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 9 + 7x - 7 + 3x - 3x = 0 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, para $x = 2$ os pontos A , B , C são colineares.

ATIVIDADES

1. Os pontos $A = (2, 7)$, $B = (-3, 0)$ e $C = (16, 5)$ são colineares?
2. Determine y para que os pontos $A = (3, 5)$, $B = (-3, 8)$ e $C = (4, y)$ sejam colineares.
3. Os pontos $(2, -3)$, $(4, 3)$ e $(5, \frac{k}{2})$ estão numa mesma reta. Determine o valor de k .
4. Dados $A = (-3, 4)$, $B = (2, 9)$, $C = (2, 7)$ e $D = (4, 5)$, obtenha a intersecção das retas AB e CD .



AULA 48

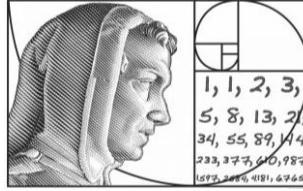
AVALIAÇÃO

1. Calcule o perímetro do triângulo ABC , sendo dados $A = (3, 1)$, $B = (-1, 1)$ e $C = (-1, 4)$.
2. Se $P(x, y)$ equidista de $A = (-3, 7)$ e $B = (4, 3)$ qual é a relação existente entre x e y ?
3. Calcule a razão $\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right)$, sendo dados os pontos $A = (1, 4)$, $B = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $C = (-2, -2)$.
4. Determine y para que os pontos $A = (3, 5)$, $B = (-3, 8)$ e $C = (4, y)$ sejam colineares.
5. Determine a intersecção das retas $x - 5y = 14$ e $3x + 2y = -9$.
6. Qual é a posição relativa entre as retas $3x - y - 7 = 0$ e $6x - 2y + 17 = 0$?
7. Dada a reta da equação

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dê a sua expressão sob a forma reduzida.

8. Dados $A = (3, 1)$ e $B = (-6, -5)$, determine a equação segmentária da reta AB .
9. A reta $y = mx - 5$ é paralela à reta $2y = -3x + 1$. Determine m .
10. Demonstre que $r: \frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1$ e $s: \frac{x}{7} = \frac{y}{3}$ são retas perpendiculares.



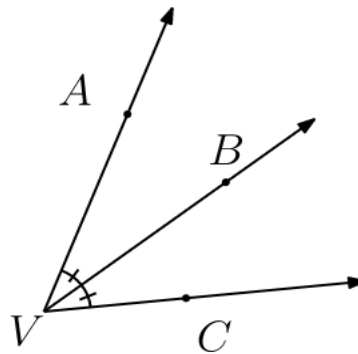
AULA 51

BISSETRIZ



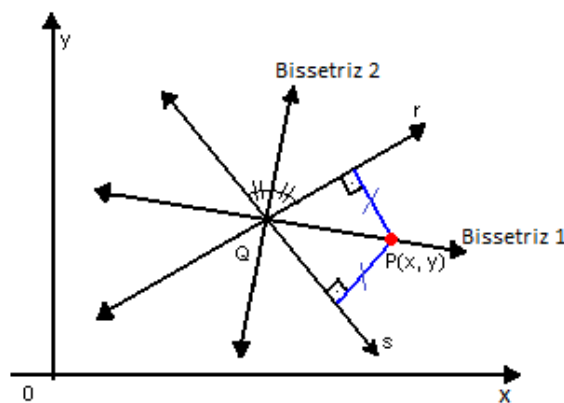
esta aula, estudaremos o conceito de bissetriz com a geometria analítica.

Definição: Bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.



A bissetriz de $\widehat{AVC}$ é $\overrightarrow{VB}$.

Definição: Sejam as retas concorrentes $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ que se interceptam em um ponto Q . Se $P(x, y)$ é um ponto qualquer de uma das bissetrizes, $P \neq Q$, então P é equidistante de r e s .



$$d_{pr} = d_{ps} \Leftrightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Exemplos:

1. Calcule as bissetrizes das retas $r: 3x + 2y - 7 = 0$ e $s: 2x - 3y + 1 = 0$.

Resolução: Pela definição acima, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} &= \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Leftrightarrow \frac{3x + 2y + (-7)}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \pm \frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{3^2 + 2^2}} &= \pm \frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \Leftrightarrow \frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{9 + 4}} = \pm \frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{4 + 9}}\end{aligned}$$

Assim, devemos calcular em dois casos:

1º Caso: Positivo

$$\begin{aligned}\frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{9 + 4}} &= \frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{4 + 9}} \Leftrightarrow 3x + 2y - 7 = 2x - 3y + 1 \\ \Leftrightarrow x + 5y - 8 &= 0\end{aligned}$$

2º Caso: Negativo

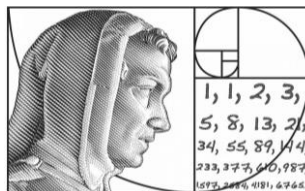
$$\begin{aligned}\frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{9 + 4}} &= -\frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{4 + 9}} \Leftrightarrow 3x + 2y - 7 = -2x + 3y - 1 \\ \Leftrightarrow 5x - y - 6 &= 0\end{aligned}$$

ATIVIDADES

1. Obtenha as equações das bissetrizes dos ângulos formados por $r: 3x + 4y = 0$ e $s: 8x - 6y - 1 = 0$.

2. Determine as equações das bissetrizes dos ângulos formados por $r: 4x - 4y = -3$ e $s: x - y + 1 = 0$.

3. Qual é a equação do lugar geométrico dos pontos $P = (x, y)$ equidistantes das retas $r: 3x + 4y - 12 = 0$ e $s: 5x + 12y - 60 = 0$?



AULA 54

INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

Em relação à teoria apresentada anteriormente sobre ponto e circunferência, temos como principal consequência desta teoria o método de resolver inequações do 2º grau da forma:

$$f(x, y) = 0$$

$$f(x, y) > 0$$

$$f(x, y) < 0$$

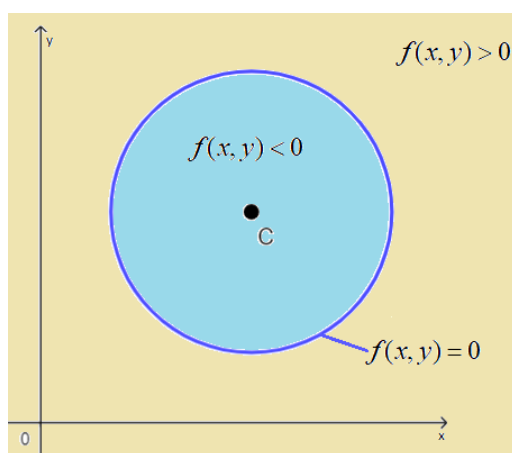
Observação: A equação $f(x, y) = 0$ é a equação de uma circunferência.

Definição: Dada a circunferência λ de equação $f(x, y) = 0$, o plano cartesiano é dividido em três subconjuntos:

Subconjunto dos pontos (x, y) pertencentes à circunferência λ , que é a solução para $f(x, y) = 0$.

Subconjunto dos pontos (x, y) exteriores à circunferência λ , que é a solução para $f(x, y) > 0$.

Subconjunto dos pontos (x, y) interiores à circunferência λ , que é a solução para $f(x, y) < 0$.

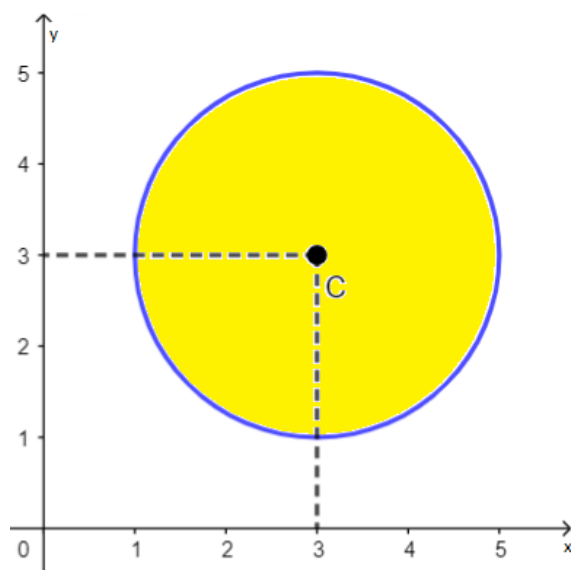


Exemplos:

1. Resolva a inequação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 < 0$.

Resolução: Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14$ e $f(x, y) = 0$, equação da circunferência λ de centro $C(3, 3)$ e raio $r = 2$.

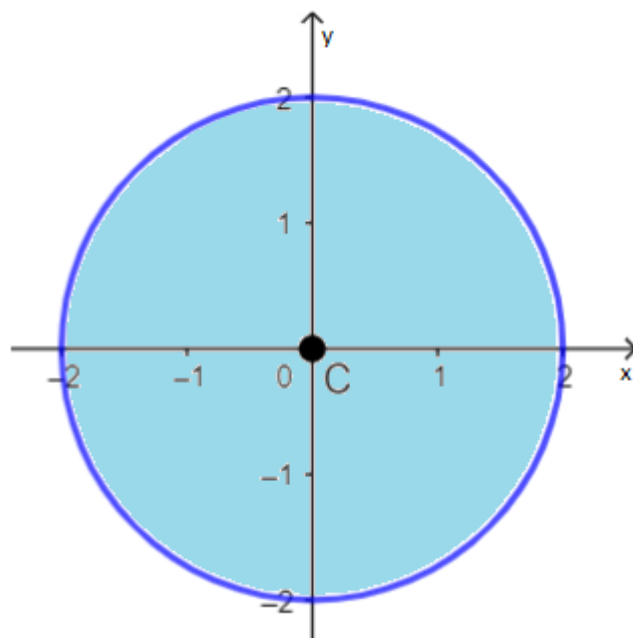
Assim, o conjunto dos pontos que tornam $f(x, y) < 0$ é o conjunto dos pontos interiores a λ .



2. Resolva a inequação $x^2 + y^2 \leq 4$.

Resolução: Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ e $f(x, y) = 0$, equação da circunferência λ de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 2$.

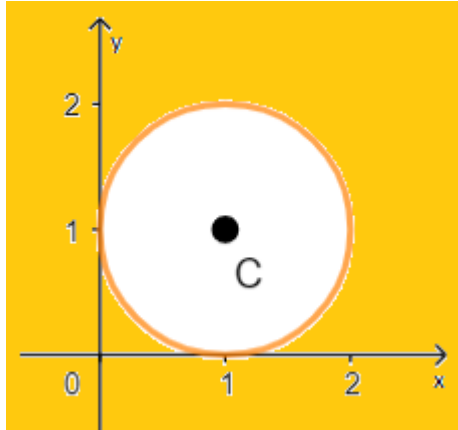
Assim, o conjunto dos pontos que tornam $f(x, y) \leq 0$ é o conjunto dos pontos interiores a λ com os pontos pertencentes a λ .



3. Resolva a inequação $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \geq 0$.

Resolução: Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1$ e $f(x, y) = 0$, equação da circunferência λ de centro $C(1, 1)$ e raio $r = 1$.

Assim, o conjunto dos pontos que tornam $f(x, y) \geq 0$ é o conjunto dos pontos pertencentes a λ e com os pontos exteriores a λ .



ATIVIDADES

1. Resolva as seguintes inequações:

a) $x^2 + y^2 \leq 16$

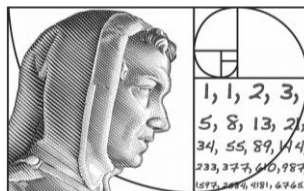
b) $x^2 + y^2 \geq 9$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 < 0$

d) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 > 0$

2. Resolva o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

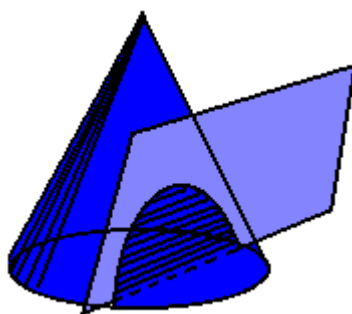


AULA 59

PARÁBOLA

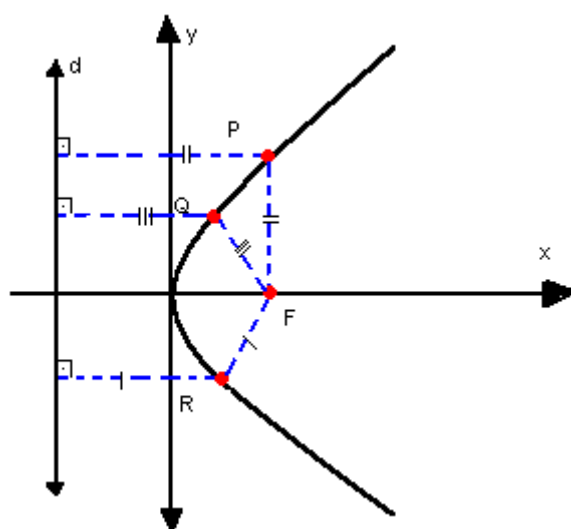


nteriormente, vimos que as parábolas são as curvas planas obtidas como seções de um cone por planos que são paralelos a um geratriz do cone (e que não passam pelo vértice nem contêm a geratriz do cone).



As parábolas são formadas pelos pontos equidistantes de uma reta d (a diretriz) e um ponto F (o foco). Assim, podemos definir a parábola da seguinte forma:

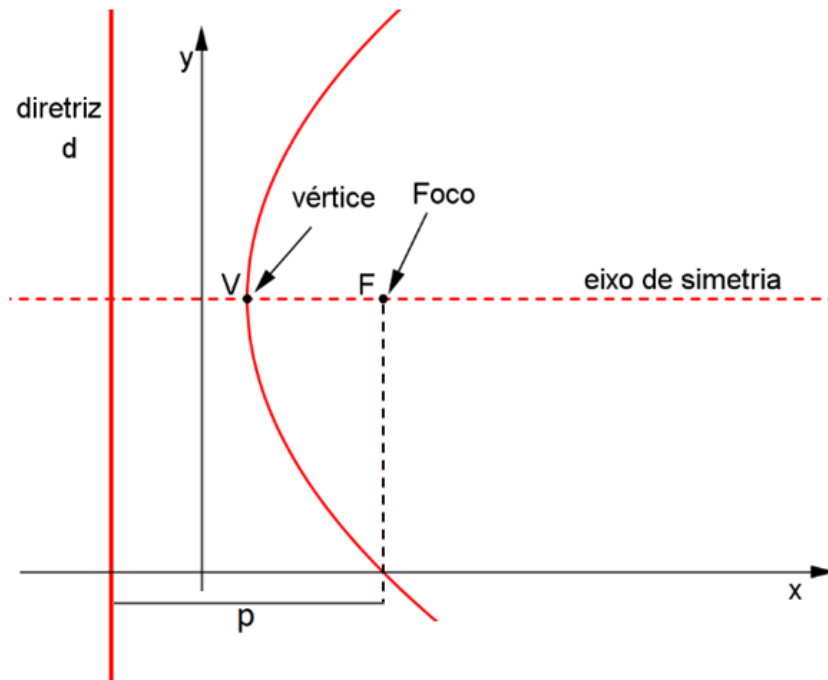
Definição: Dados um ponto F e uma reta d pertencentes a um plano α , com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d . Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de F e de d .



$$Parábola = \{P \in \alpha | PF = Pd\}$$

ELEMENTOS PRINCIPAIS

Os elementos principais de uma parábola são: foco, diretriz, vértice, parâmetro e eixo de simetria.



Foco: o ponto F .

Diretriz: é a reta d .

Vértice: o ponto V .

Parâmetro: é a distância da diretriz ao foco, denotamos por p .

Eixo de simetria: é a reta que contém o vértice V e o foco F .

Relação notável:

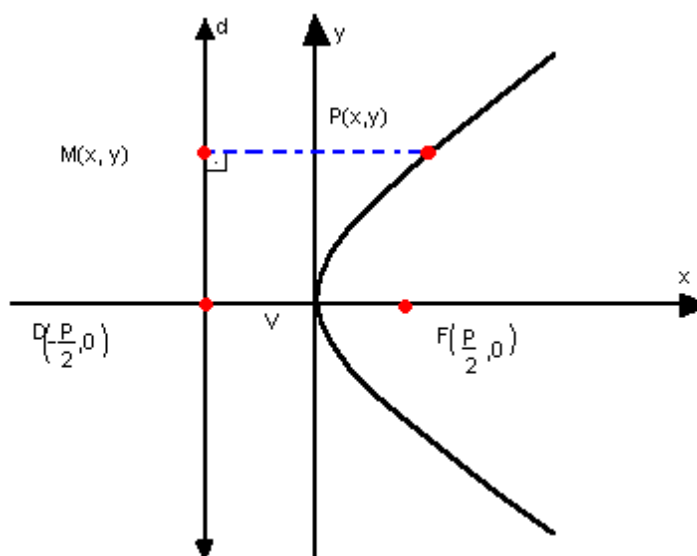
$$VF = \frac{p}{2}$$

EQUAÇÃO REDUZIDA

Dada uma parábola com vértice na origem em um plano cartesiano, iremos deduzir a sua equação reduzida conforme a sua concavidade e o eixo de simetria. Para isso, temos quatro casos que devemos considerar:

PARÁBOLA COM VÉRTICE NA ORIGEM, CONCAVIDADE PARA A DIREITA E EIXO DE SIMETRIA HORIZONTAL

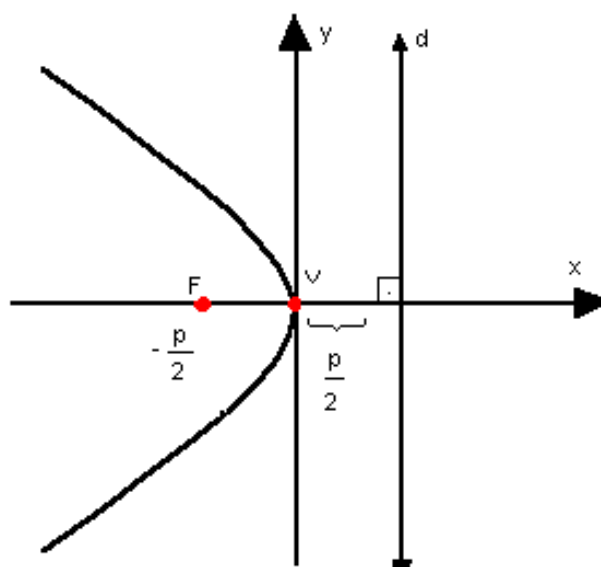
Neste caso, temos a seguinte equação reduzida:



$$y^2 = 2px$$

PARÁBOLA COM VÉRTICE NA ORIGEM, CONCAVIDADE PARA A ESQUERDA E EIXO DE SIMETRIA HORIZONTAL

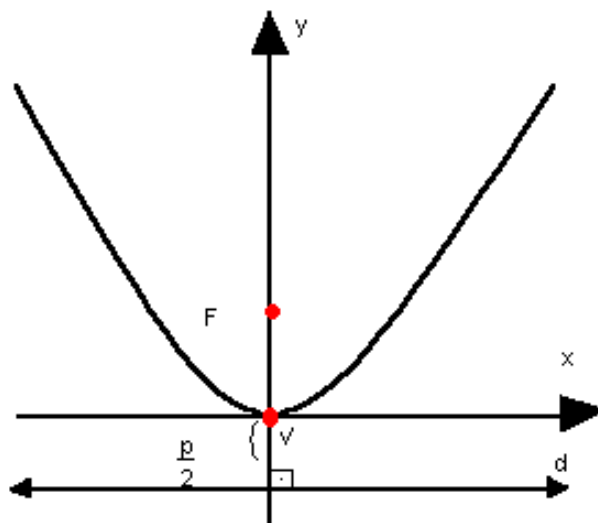
Neste caso, temos a seguinte equação reduzida:



$$y^2 = -2px$$

PARÁBOLA COM VÉRTICE NA ORIGEM, CONCAVIDADE PARA CIMA E EIXO DE SIMETRIA VERTICAL

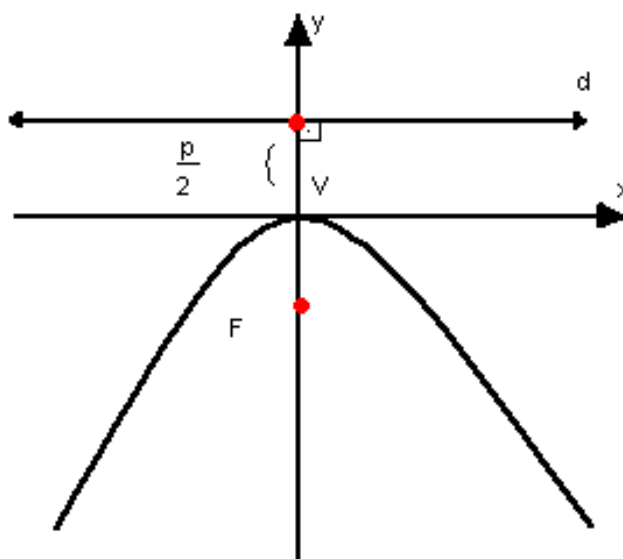
Neste caso, temos a seguinte equação reduzida:



$$x^2 = 2py$$

PARÁBOLA COM VÉRTICE NA ORIGEM, CONCAVIDADE PARA BAIXO E EIXO DE SIMETRIA VERTICAL

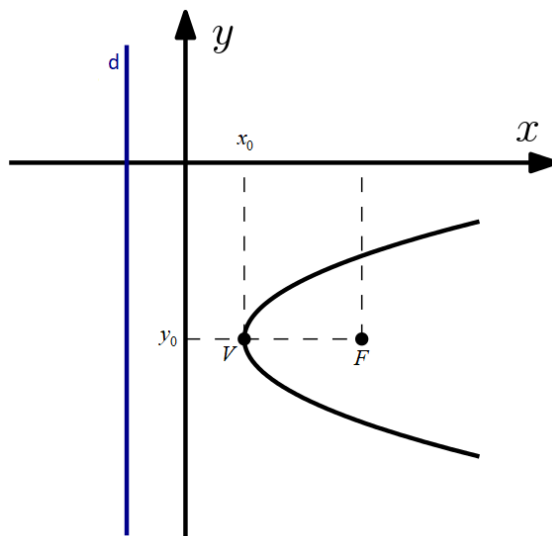
Neste caso, temos a seguinte equação reduzida:



$$x^2 = -2py$$

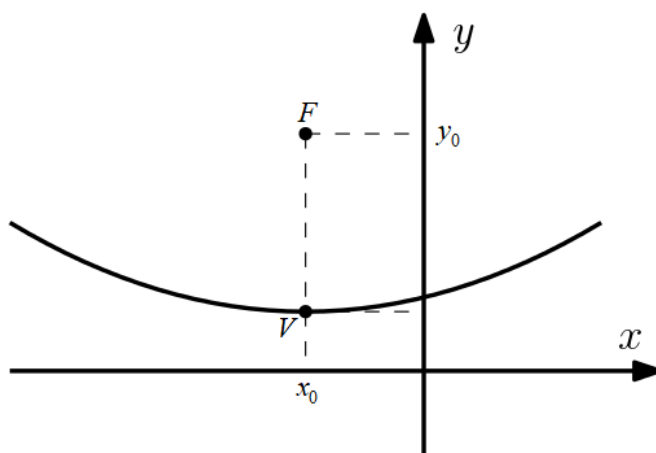
Quando o vértice não está na origem temos duas situações:

Se uma parábola tem centro no ponto $C = (x_0, y_0)$, isto é, o centro não é na origem e $\overline{VF} // \text{eixo } x$ (o segmento $\overline{VF}$ paralelo ao eixo x), como mostra a figura a seguir, temos a seguinte equação reduzida:



$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

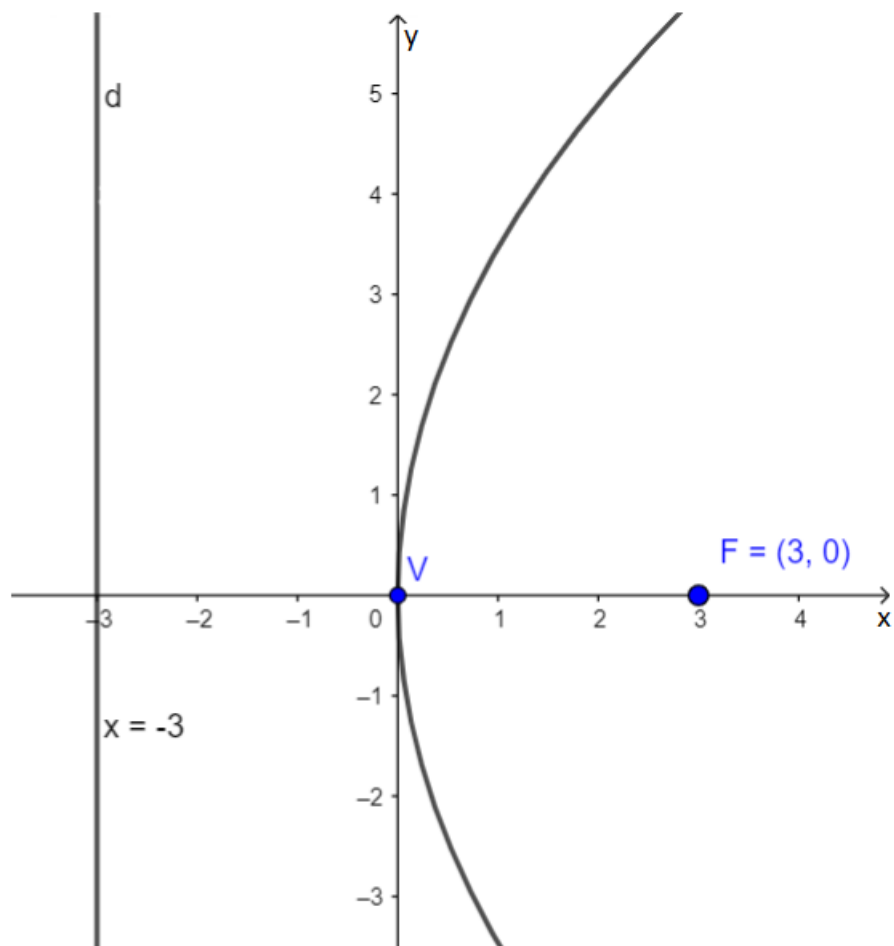
Se uma parábola tem centro no ponto $C = (x_0, y_0)$, isto é, o centro não é na origem e $\overline{VF} // \text{eixo } y$ (o segmento $\overline{VF}$ é paralelo ao eixo y), como mostra a figura a seguir, temos a seguinte equação reduzida:



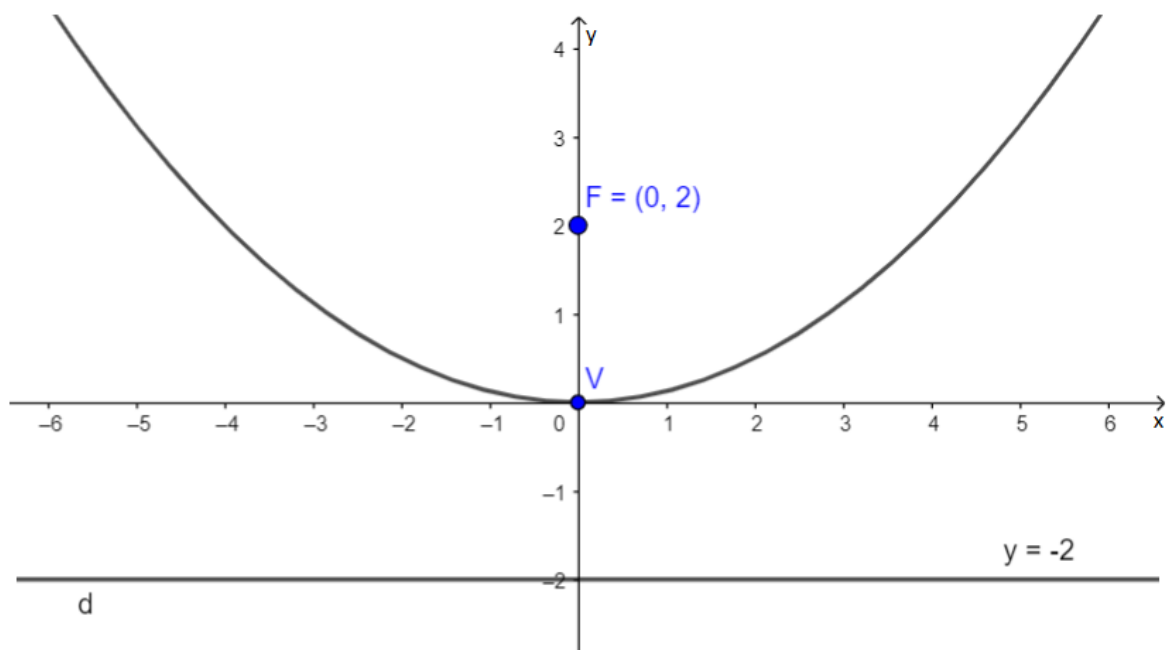
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

ATIVIDADES

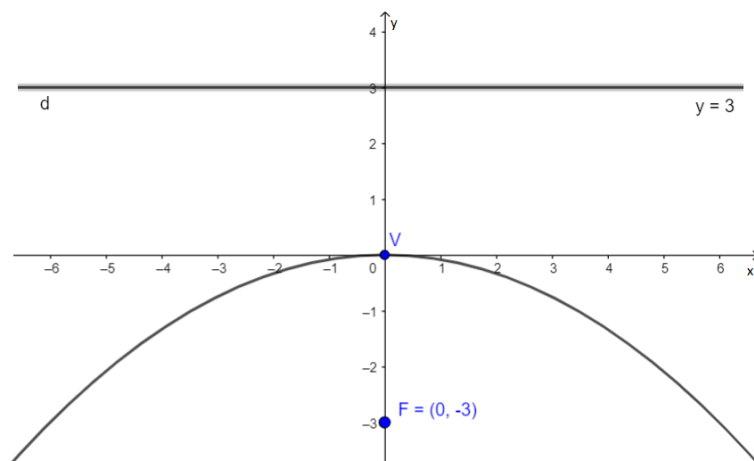
1. Ache as coordenadas do foco F e a equação da diretriz da parábola $y^2 = -16x$.
2. Determine as equações das parábolas seguintes:
 - a)



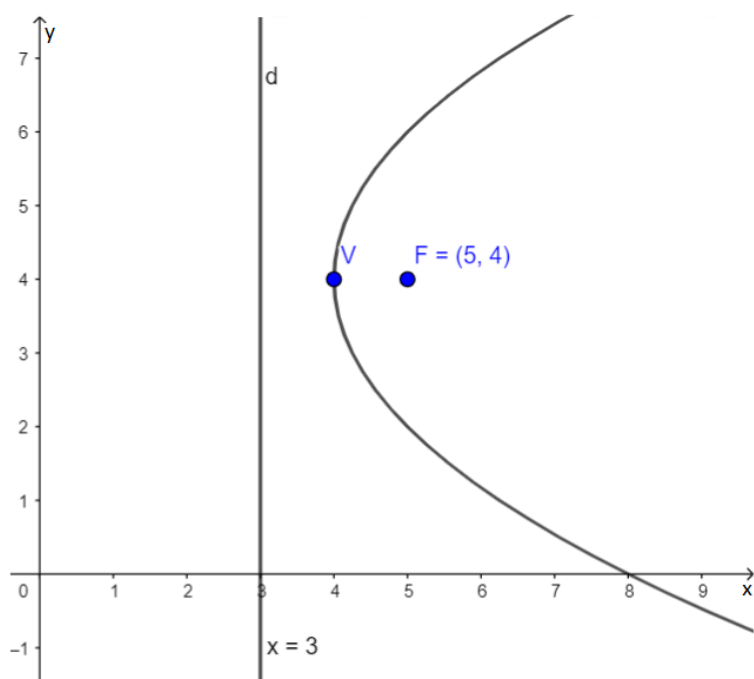
b)



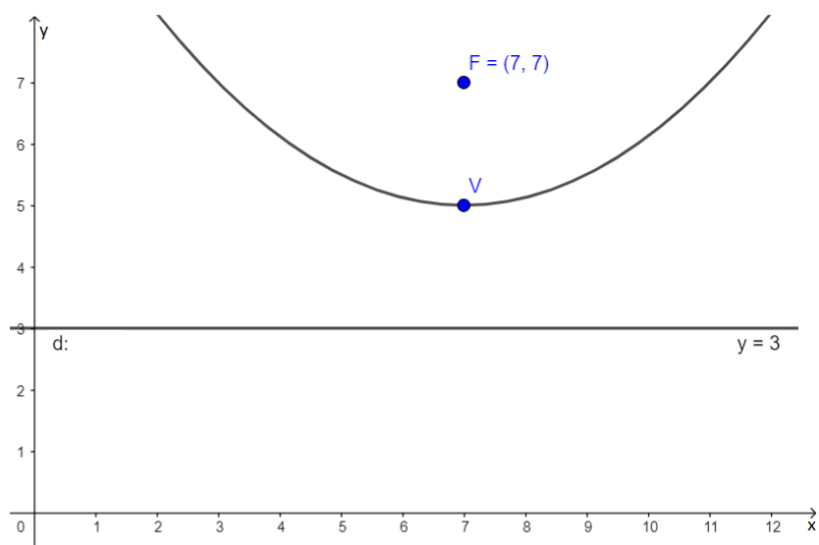
c)



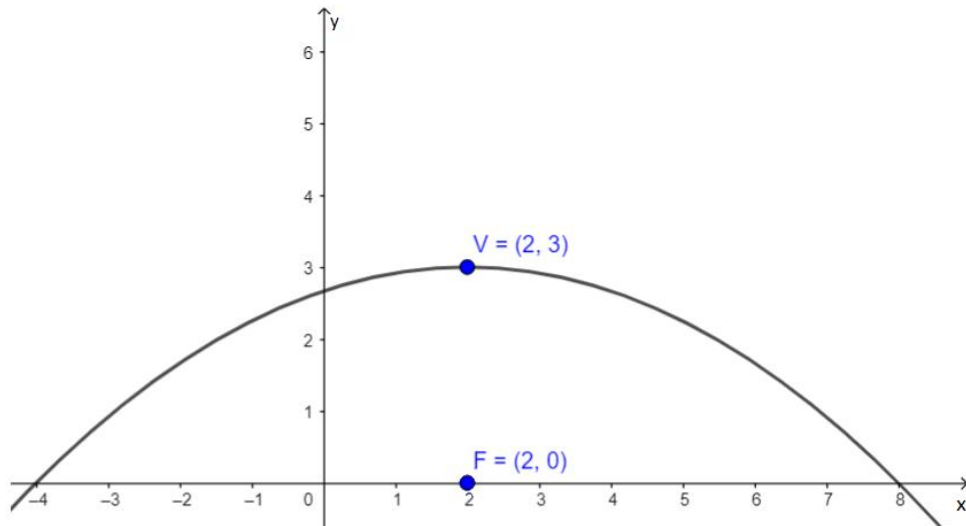
d)



e)



f)



3. Caracterize a cônica representada pela equação $4x^2 + 9y^2 = 36$ e esboce seu gráfico.
4. Caracterize a cônica representada pela equação $4x^2 - 9y^2 = 36$ e esboce seu gráfico.
5. Qual é a cônica representada pela equação $y^2 = 6x$? Esboce seu gráfico.
6. Qual a distância entre os focos da cônica cuja equação é $9x^2 + 4y^2 = 36$?

