
ENSINO MÉDIO

– 3º ANO –

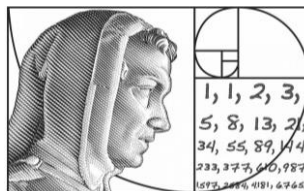
MATEMÁTICA

VOLUME 2

Apostila do 3º ano do Ensino Médio, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



MATEMÁTICA



AULA 62

NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA ALGÉBRICA

Nesta aula, estudaremos os números complexos na forma algébrica.

Definição: Os números complexos na forma algébrica aparecem em resoluções das equações do segundo grau.

Exemplos:

A resolução da equação $x^2 = -49$ resulta em um número complexo.

Na equação $x^2 = -49$ dizíamos que não havia solução no conjunto dos números reais, pois $x = \pm\sqrt{-49}$ e não conseguimos representar o valor de uma raiz negativa, porém, no conjunto dos números complexos, existe solução para as raízes quadradas de um número negativo, ou seja, a raiz $\pm\sqrt{-49}$ tem solução no conjunto dos números complexos, como veremos adiante.

Antes de resolvermos qualquer equação cuja raiz quadrada é um número negativo, iremos definir o número complexo na forma algébrica.

Definição: Todo número complexo z , tal que $x, y \in \mathbb{R}$, pode ser escrito na forma:

$$z = x + yi$$

Essa forma é chamada **forma algébrica do número complexo**.

Para definirmos os números complexos na forma algébrica, foi utilizado a letra i , que é chamada de **unidade imaginária de um número complexo**. Já as letras x e y são duas partes do número complexo, onde a **letra x é parte real**, indicado por $Re(z) = x$, e a **letra y é a parte imaginária**, indicada por $Im(z) = y$.

$$z = \underbrace{x}_{\text{parte Real de } z} + \underbrace{y}_{\text{parte Imaginária de } z} \cdot i$$

Observação: Quando a **parte real é nula**, o **número complexo** é conhecido como **imaginário puro**.

Exemplos:

1. O número $-5i$ é imaginário puro.

2. O número $3i$ é imaginário puro.
3. O número $-i$ é imaginário puro.
4. O número $4 - i$ não é imaginário puro, pois, apresenta a parte real diferente de zero.

Observação: Quando a **parte imaginária é nula**, o **número complexo** é também um **número real**.

Exemplos:

1. O número 2 é um número complexo, pois podemos escrevê-lo na forma algébrica, isto é, $2 = 2 + 0 \cdot i$.

2. O número -48 é um número complexo, pois podemos escrevê-lo na forma algébrica, isto é, $-48 = -48 + 0 \cdot i$.

Agora, iremos definir a unidade imaginária, isto é, vamos definir o valor de i .

Definição: A **unidade imaginária** é definida da seguinte forma:

$$i = \sqrt{-1}$$

Além da definição acima, podemos definir a unidade imaginária como um par ordenado, como podemos ver abaixo.

Definição: Chamamos **unidade imaginária** e indicamos por i , o número complexo $(0, 1)$.²

$$i = (0, 1)$$

Sabendo que $i = \sqrt{-1}$, podemos dar continuidade à resolução da equação $x^2 = -49$. Desenvolvendo a equação, temos que:

$$x^2 = -49$$

$$x = \pm\sqrt{-49}$$

$$x = \pm\sqrt{49 \cdot (-1)}$$

$$x = \pm\sqrt{49} \cdot \sqrt{-1}$$

$$x = \pm\sqrt{49} \cdot i$$

$$x = \pm 7i$$

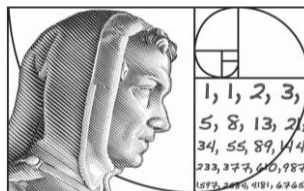
Portanto, no **conjunto dos números complexos** a equação $x^2 = -49$ tem a solução $S = \{-7i; 7i\}$.

² Não se preocupe em compreender a relação de $i = (0, 1)$, pois esta será compreendida quando estudarmos, nesse volume, o Plano de Argand-Gauss.

Observação: No conjunto dos números reais a equação $x^2 = -49$ continua sem solução.

ATIVIDADES

1. Resolva a equação $x^2 = -64$ para $U = \mathbb{C}$.
2. Resolva a equação $x^2 + 196 = 0$ para $U = \mathbb{C}$.
3. Resolva a equação $4x^2 - 4x + 2 = 0$ para $U = \mathbb{C}$.
4. Calcule o valor de x da equação $x^2 - 14x + 50 = 0$ para o conjunto universo dos complexos.



AULA 66

CONJUGADO



esta aula, estudaremos o conjugado do complexo, as propriedades do conjugado e o conjugado da soma e do produto.

O estudo desses assuntos se faz mister para compreendermos a operação de divisão dos números complexos na forma algébrica.

Definição: Chama-se conjugado do complexo $z = x + yi$ ao complexo $\bar{z} = x - yi$, isto é:

$$z = x + yi \Leftrightarrow \bar{z} = x - yi$$

Exemplos:

1. Calcule o conjugado de $z = 3 + 4i$.

Resolução: Usando a definição acima, temos que:

$$\bar{z} = 3 - 4i$$

2. Calcule o conjugado de $z = 2 - 2i$.

Resolução: Usando a definição acima, temos que:

$$\bar{z} = 2 + 2i$$

3. Calcule o conjugado de $z = -7 - 5i$.

Resolução: Usando a definição acima, temos que:

$$\bar{z} = -7 + 5i$$

4. Calcule o conjugado de $z = -3 + 8i$.

Resolução: Usando a definição acima, temos que:

$$\bar{z} = -3 - 8i$$

CONJUGADO DO CONJUGADO

Definição: O conjugado do complexo $\bar{z}$ é z .

$$(\bar{\bar{z}}) = \overline{(x - yi)} = x + yi = z$$

Observação: Pela última definição, podemos dizer que z e $\bar{z}$ são **números complexos conjugados**, isto é, um é conjugado do outro.

PROPRIEDADE DO CONJUGADO

Teorema: Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos que:

1ª Propriedade: $z + \bar{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$

2ª Propriedade: $z - \bar{z} = 2 \cdot \text{Im}(z)$

3ª Propriedade: $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Demonstração: Tomando $z = x + yi$, temos que:

1ª propriedade:

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2 \cdot \text{Re}(z)$$

2ª Propriedade:

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2y = 2 \cdot \text{Im}(z)$$

3ª Propriedade:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow (x + yi) = (x - yi) \Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

■ Q.E.D

CONJUGADOS DA SOMA E DO PRODUTO

Teorema: Seja z_1 e z_2 números complexos quaisquer, então, temos que:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Demonstração: Tomando $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$, temos que:

1)

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{x_1 + y_1i + x_2 + y_2i} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i} \\ &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1i) + (x_2 + y_2i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1 x_2) + (x_1 y_2 i) + (x_2 y_1 i) + (y_1 y_2 i^2)} \\
 &= \overline{(x_1 x_2) + (x_1 y_2 i) + (x_2 y_1 i) + (y_1 y_2 i^2)} = \overline{(x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2) + (x_1 y_2 i + x_2 y_1 i)} \\
 &= \overline{(x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i} = (x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \\
 &= x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2 - x_1 y_2 i - x_2 y_1 i = x_1 x_2 - x_1 y_2 i + y_1 y_2 i^2 - x_2 y_1 i \\
 &= x_1(x_2 - y_2 i) - y_1 i(x_2 - y_2 i) = (x_1 - y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2
 \end{aligned}$$

■ Q.E.D

Observação: Seja $z \in \mathbb{C}$, tal que $z = a + bi$, se multiplicarmos o número z com o seu conjugado, obtemos:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} + b^2 i^2 = a^2 - b^2$$

ATIVIDADES

1. Determine o conjugado de:

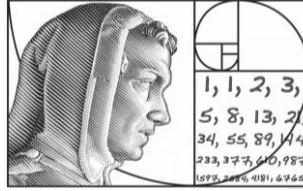
a) $\frac{1+3i}{2-i}$

b) $\frac{1+i}{i}$

2. Determine $z \in \mathbb{C}$, tal que $\bar{z} = -2zi$.

3. Calcule $\overline{(3 - i) + (-2 + 3i)}$.

4. Calcule $\overline{(4 + 2i) \cdot (-1 + i)}$.



AULA 72

AVALIAÇÃO

1. Dados $z_1 = (5, 2)$ e $z_2 = (2, 8)$, calcule:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) z_1^2

2. Resolva a equação $4x^2 - 4x + 2 = 0$ para $U = \mathbb{C}$.

3. Quais os números complexos x e y para os quais $x + yi = i$ e $xi + y = 2i - 1$?

4. Prove que $(1 + i)^2 = 2i$ e coloque na forma algébrica o número

$$z = \frac{(1 + i)^{80} - (1 + i)^{82}}{i^{96}}$$

5. Calcule $\overline{(3 - i) + (-2 + 3i)}$.

6. Dados $z_1 = (3 + i)$ e $z_2 = (2 + 5i)$, calcule $\frac{z_2}{z_1}$.

7. Calcule o módulo dos seguintes números:

a) $3 - 4i$

b) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

c) $12 + 5i$

d) $\cos \theta + i \cdot \sin \theta$

8. Coloque na forma trigonométrica os números:

a) $3 + 3i$

b) $5 - i \cdot 5\sqrt{3}$

c) $-8 - 8i$

d) 11

e) $2i$

9. Represente no plano de Argand-Gauss os seguintes complexos:

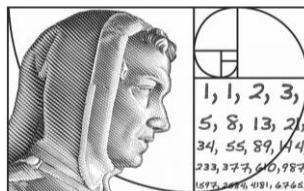
a) $3 + 5i$

b) $-3 + 2i$

10. Calcule:

a) $\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$

b) $\sqrt{-16 + 30i}$



AULA 74

IGUALDADE



esta aula, estudaremos a igualdade entre polinômios, isto é, iremos estabelecer o que são dois polinômios iguais e como se pode constatar a igualdade de dois polinômios examinando apenas seus coeficientes.

Desta forma, iremos iniciar definindo o conceito de polinômio nulo e demonstrando um teorema do coeficiente do polinômio nulo.

POLINÔMIO NULO

Definição: Dizemos que um polinômio é nulo (ou identidade nulo) quando f assume o valor numérico zero para todo x complexo. Em símbolo, indicamos:

$$f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$$

COEFICIENTE DO POLINÔMIO NULO

Teorema: Um polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de f forem nulos.

$$f = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Demonstração:

$(\Leftarrow)$ É imediato que $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ acarreta:

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n$$

$(\Rightarrow)$ Se f é nulo, então existem $n + 1$ números complexos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, distintos dois a dois, que são raízes de f , isto é:

$$f(\alpha_0) = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + \dots + a_n\alpha_0^n = 0$$

$$f(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \dots + a_n\alpha_1^n = 0$$

$$f(\alpha_2) = a_0 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \dots + a_n\alpha_2^n = 0$$

.....

$$f(\alpha_n) = a_0 + a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^2 + \dots + a_n\alpha_n^n = 0$$

Assim, estamos diante de um sistema linear homogêneo do tipo $(n+1) \times (n+1)$ cujas incógnitas são $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Como o determinante deste sistema é

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

Não nulo por tratar-se do determinante de uma matriz de Vandermonde cujos elementos característicos são $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ todos distintos, o sistema tem uma única solução, que é a solução trivial:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

■ Q.E.D

Agora, iremos definir a igualdade entre polinômios, os chamados polinômios idênticos.

POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Definição: Dizemos que dois polinômios f e g são iguais (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para todo x complexo. Em símbolos, indicamos:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{C}$$

COEFICIENTES DE POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Teorema: Dois polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem ordenadamente iguais.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ e}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_ix^i$$

Assim, temos que:

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Demonstração: Para todo $x \in \mathbb{C}$, temos que:

$$\begin{aligned} a_i = b_i &\Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (a_i - b_i)x^i = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_ix^i - \sum_{i=0}^n b_ix^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_ix^i = \sum_{i=0}^n b_ix^i \Leftrightarrow f(x) = g(x) \end{aligned}$$

■ Q.E.D

ATIVIDADES

1. Determine os reais, a, b, c de modo que $f = (a - 2)x^3 + (b + 2)x + (3 - c)$ seja o polinômio nulo.

2. Determine a, b, c de modo que a função $f(x) = (a + b - 5)x^2 + (b + c - 7)x + (a + c)$ seja identicamente nula.

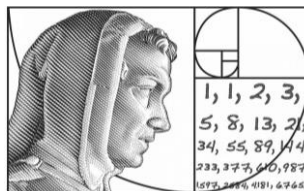
3. Determine a, b, c de modo que se tenha para todo x real:

$$\frac{ax^2 - bx - 5}{3x^2 + 7x + c} = 3$$

4. Qual o valor de $a + b$ para que a expressão abaixo não dependa de x ?

Expressão:

$$\frac{3x^2 + 5x - 8}{ax^2 - 10x + b}$$



AULA 77

DIVISÃO



esta aula, iniciaremos nossos estudos em relação à operação de divisão de polinômios. Começaremos estudando algumas divisões imediatas e depois veremos dois métodos para resolver divisão de polinômios: método de Descartes e o método da Chave.

Definição: Sejam dados dois polinômios quaisquer $f(x)$ e $g(x)$, tal que $g(x) \neq 0$. Dividir f (dividendo) por g (divisor) é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto), de modo que as duas condições sejam confirmadas:

$$a) f = g \cdot q + r$$

$$b) \partial r < \partial g$$

Exemplos:

1. Quando dividimos $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, obtemos $q(x) = x$ e $r(x) = -4x^2 + 8x + 2$ que satisfazem as duas condições:

$$a) f = g \cdot q + r$$

$$3x^4 - 2x^3 + 7x + 2 = (3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) \cdot x - 4x^2 + 8x + 2$$

$$3x^4 - 2x^3 + 7x + 2 = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x - 4x^2 + 8x + 2$$

$$3x^4 - 2x^3 + 7x + 2 = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$$

$$b) \partial r < \partial g$$

$$\partial r = 2, \quad \partial g = 3 \Rightarrow \partial r < \partial g$$

2. Quando dividimos $f(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ por $g(x) = x - 2$, obtemos $q(x) = 5x^2 + 11x + 12$ e $r(x) = 0$ que satisfazem as duas condições:

$$a) f = g \cdot q + r$$

$$5x^3 + x^2 - 10x - 24 = (x - 2) \cdot (5x^2 + 11x + 12) + 0$$

$$5x^3 + x^2 - 10x - 24 = 5x^3 + 11x^2 + 12x - 10x^2 - 22x - 24$$

$$5x^3 + x^2 - 10x - 24 = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$$

$$\text{b) } \partial r < \partial g$$

$$\partial r = 0, \quad \partial g = 1 \Rightarrow \partial r < \partial g$$

Observação: No exemplo 2, temos uma divisão exata, no caso, dizemos que f é divisível por g ou que g é divisor de f .

DIVISÕES IMEDIATAS

Existem dois casos em que a divisão dos polinômios $f(x)$ por $g(x)$ é imediata.

1º Caso: O dividendo $f(x) = 0$ (nulo).

Neste caso, temos que $0 = q \cdot g + r$.

Logo, os polinômios $q(x) = 0$ e $r(x) = 0$ são os únicos polinômios que satisfazem essa igualdade.

Portanto,

$$f = 0 \Rightarrow q = 0 \text{ e } r = 0$$

2º Caso: O dividendo f não é polinômio nulo, mas tem grau menor que o divisor g .

Neste caso, os polinômios $q(x) = 0$ e $r(x) = f$ são os únicos polinômios que satisfazem esse caso, pois

$$q \cdot g + r = f \Rightarrow 0 \cdot g + f = f \Rightarrow f = f$$

MÉTODO DE DESCARTES

Há uma outra maneira de dividir um polinômio $f(x)$ por um $g(x)$ e obter um quociente $q(x)$ e um resto $r(x)$. Este método utiliza a **identidade de polinômios** e se baseia no fato de que o grau do resto deve ser menor do que o do divisor, como poderemos ver a seguir:

O método de Descartes baseia-se nos seguintes fatos:

1º Fato: $\partial q = \partial f - \partial g$.

O primeiro fato é consequência da definição que vimos no início desta aula, pois:

$$g \cdot q + r = f \Rightarrow \partial(g \cdot q + r) = \partial f$$

Então, temos que:

$$\partial q + \partial g = \partial f$$

2º fato: $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$)

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE DESCARTES

O método de Descartes é aplicado seguindo os seguintes passos:

1º Passo: Calcular ∂q e ∂r .

2º Passo: Escrever os polinômios q e r , deixando incógnitos os seus coeficientes.

3º Passo: Determine os coeficientes de q e r impondo a igualdade $qg + r = f$.

Exemplo:

1. Seja $f(x) = x^3 + 4x - 1$ e $g(x) = x^2 - x$, calcule $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Resolução: O dividendo possui grau 3 e o divisor possui grau 2, o quociente $q(x)$ terá grau 1, que é esta diferença entre os graus. Assim, representamos $q(x)$ como um polinômio de grau 1 genérico:

$$q(x) = ax + b$$

O resto $r(x)$ terá grau 1 ou menor, pois o divisor possui grau 2. Portanto, representamos como:

$$r(x) = mx + n$$

É importante não usar as mesmas letras para q e r , pois os coeficientes não são necessariamente iguais.

Agora, lembre-se da seguinte igualdade:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Iremos substituir as expressões que temos até agora e resolver a identidade de polinômios:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x - 1 &= (x^2 - x)(ax + b) + (mx + n) \\ x^3 + 4x - 1 &= ax^3 + bx^2 - ax^2 - bx + mx + n \\ 1x^3 + 4x - 1 &= ax^3 + x^2(b - a)x(-b + m) + n \end{aligned}$$

As equações que extraímos da igualdade de polinômios são:

$$\begin{cases} a = 1 & (1) \\ b - a = 0 & (2) \\ -b + m = 4 & (3) \\ n = -1 & (4) \end{cases}$$

As equações 1 e 4 já trazem resultados imediatos. Levando o resultado de 1 em 2, temos que:

$$b - a = 0 \Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

E levando este resultado em 3:

$$-b + m = 4 \Rightarrow -1 + m = 4 \Rightarrow m = 5$$

Desta forma, o quociente que era $q(x) = ax = b$, passa a ser:

$$q(x) = ax = b = 1x + 1 = x + 1$$

E o resto $r(x) = mx + n$, passa a ser:

$$r(x) = mx + n = 5x - 1$$

MÉTODO DA CHAVE

Um dos métodos mais comuns para a divisão de polinômios é o **método da chave**, semelhante ao método da divisão de números inteiros (sem decimais).

Dividir um polinômio $f(x)$ por um polinômio $g(x)$ significa encontrar um polinômio $q(x)$ e um polinômio $r(x)$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} f(x) & g(x) \\ \hline - \dot{\vdots} & q(x) \\ \hline r(x) & \end{array}$$

Isto é, $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$.

Observação: Note que $f(x)$ é o dividendo, $g(x)$ é o divisor, $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto da divisão.

Observação: O grau de $r(x)$ deve ser menor que o grau de $g(x)$.

Exemplos:

1. Seja $p(x) = 16x^2 + 28x + 17$ e $g(x) = 4x + 1$. Encontre o quociente $p(x):g(x)$.

Resolução: Primeiramente, observe se os polinômios estão todos organizados em ordem decrescente em relação aos graus das variáveis.

$$p(x) = 16x^2 + 28x + 17$$

$$g(x) = 4x + 1$$

Nesse caso, ambos estão certos.

Agora, monte o algoritmo da divisão:

$$16x^2 + 28x + 17 \quad 4x + 1$$

Agora, dividindo o termo de maior grau do dividendo pelo de maior grau do divisor, temos que:

$$\frac{16x^2}{4x} = 4x$$

Multiplicando o quociente encontrado do passo 3 pelo divisor e subtraindo do dividendo o produto encontrado, temos que:

$$\begin{array}{r} 16x^2 + 28x + 17 \quad 4x + 1 \\ -16x^2 - 4x \quad 4x \\ \hline 0 + 24x + 17 \end{array}$$

Repetindo os passos 3 e 4, temos que:

$$\begin{array}{r} 16x^2 + 28x + 17 \quad \left| \begin{array}{l} 4x + 1 \\ 4x + 6 \end{array} \right. \\ -16x^2 - 4x \quad \hline 0 + 24x + 17 \\ -24x - 6 \quad \hline 0 + 11 \end{array}$$

Portanto, a divisão de $16x^2 + 28x + 17$ por $4x + 1$ resulta em um quociente $4x + 6$ e o resto 11.

2. Se $P(x) = 9x^2 + 2x^3 + 1$ e $Q(x) = 2x^2 + x$. Calcule $P(x) : Q(x)$.

Resolução: Notem que o polinômio $P(x)$ não está ordenado. Ordenando esse polinômio, temos que:

$$P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 1$$

Montando o algoritmo da divisão, temos que:

$$2x^3 + 9x^2 + 1 \qquad 2x^2 + x$$

Agora, dividindo o termo de maior grau do dividendo pelo de maior grau do divisor, temos que:

$$\frac{2x^3}{2x^2} = x$$

Multiplicando o quociente encontrado do passo 3 pelo divisor e subtraindo do dividendo o produto encontrado, temos que:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 9x^2 + 1 & 2x^2 + x \\ -2x^3 - x^2 & x \\ \hline 0 + 8x^2 + 1 & \end{array}$$

Repetindo os passos 3 e 4, temos que:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 9x^2 + 1 & 2x^2 + x \\ -2x^3 - x^2 & x + 4 \\ \hline 0 + 8x^2 + 1 & \\ -8x^2 - 4x & \\ \hline 0 - 4x + 1 & \end{array}$$

Portanto, a divisão de $2x^3 + 9x^2 + 1$ por $2x^2 + x$ resulta em um quociente $x + 4$ e o resto $-4x + 1$.

3. Sejam $P(x) = -x^3 + 7x^2 + 12x^4 + 3x + 3$ e $Q(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Calcule $P(x) : Q(x)$.

Resolução: Notem que o $P(x)$ não está ordenado, então, colocando em ordem esse polinômio, temos que:

$$P(x) = 12x^4 - x^3 + 7x^2 + 3x + 3$$

Fazendo a divisão entre os polinômios, temos que:

$$\begin{array}{r}
 12x^4 - x^3 + 7x^2 + 3x + 3 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline 4x^2 - 3x + 3 \end{array} \right. \\
 \underline{-12x^4 - 8x^3 - 4x^2} \\
 0 - 9x^3 + 3x^2 + 3x + 3 \\
 \underline{+9x^3 + 6x^2 + 3x} \\
 0 + 9x^2 + 6x + 3 \\
 \underline{-9x^2 - 6x - 3} \\
 0 + 0 + 0
 \end{array}$$

Portanto, a divisão de $12x^4 - x^3 + 7x^2 + 3x + 3$ por $3x^2 + 2x + 1$ resulta em um quociente $4x^2 - 3x + 3$ e o resto zero.

ATIVIDADES

1. Dividindo o polinômio f por $x^2 - 3x + 5$, obtemos quociente $x^2 + 1$ e resto $3x - 5$. Determine f .

2. Divida f por g aplicando o método de Descartes:

a) $f = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$ e $g = x^3 - 2x + 1$

b) $f = x^4 - 2x + 13$ e $g = x^2 + x + 1$

c) $f = 2x^5 - 3x + 12$ e $g = x^2 + 1$

3. Aplicando o método da chave, determine quociente e resto da divisão de f por g :

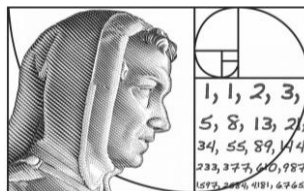
a) $f = x^3 + 5x + 1$ e $g = 2x^2 + 4x - 3$

b) $f = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$ e $g = x^2 + 2$

c) $f = 5x + 1$ e $g = x^3 + 5$

d) $f = 3x^3 + 6x^2 + 9$ e $g = 3x^2 + 1$

e) $f = x^3 + x^2 + x + 1$ e $g = 2x^2 + 3$



AULA 83

RAÍZES CONJUGADAS



esta aula, estudaremos as raízes conjugadas.

Teorema: Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = \alpha - \beta i$ ($\beta \neq 0$), então essa equação também admite como raiz o número $\bar{z} = \alpha - \beta i$, conjugado de z .

Demonstração:

Seja a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes reais que admite a raiz z , isto é, $P(z) = 0$.

Provemos que $\bar{z}$ também é raiz dessa equação, isto é, $P(\bar{z}) = 0$:

$$\begin{aligned} P(\bar{z}) &= a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + a_{n-2} (\bar{z})^{n-2} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = \\ &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1} \overline{z^{n-1}} + a_{n-2} \overline{z^{n-2}} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \overline{a_{n-2} z^{n-2}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

MULTIPLICIDADE DA RAIZ CONJUGADA

Teorema: Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz $z = \alpha - \beta i$ ($\beta \neq 0$) com multiplicidade p , então essa equação admite a raiz $\bar{z} = \alpha - \beta i$ com multiplicidade p .

Observação: Os dois teoremas anteriores só se aplicam a equações polinomiais de coeficientes reais.

Exemplo:

1. A equação $x^2 - ix = 0$ tem como raízes 0 e i , entretanto não admite a raiz $-i$, conjugada de i .

Observação: Como toda raiz complexa $z = \alpha - \beta i$ ($\beta \neq 0$) de uma equação com coeficientes reais $P(x) = 0$ corresponde uma outra raiz $\bar{z} = \alpha + \beta i$, com igual multiplicidade, decorre que o número de raízes complexas não reais de $P(x) = 0$ é necessariamente par.

Exemplos:

1. Determine o menor grau que pode ter uma equação polinomial de coeficientes reais para admitir $1, i$ e $1 + i$ como raízes.

Resolução: Tal equação terá no mínimo 5 raízes: $1, i, -i, 1 + i, 1 - i$ e, portanto, terá no mínimo grau 5.

2. Formar uma equação polinomial de grau mínimo e coeficientes reais que admita 0 como raiz simples, 1 como raiz dupla e $2 - 3i$ como raiz tripla.

Resolução: Tal equação terá também $2 + 3i$ como raiz tripla, portanto a solução é:

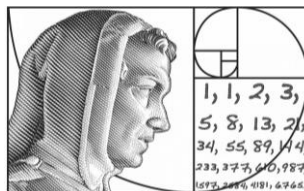
$$k(x - 0)(x - 1)^2(x - 2 + 3i)^3(x - 2 - 3i)^3 = 0, \text{ em que } k \in R \text{ e } k \neq 0.$$

ATIVIDADES

1. Obtenha a equação de menor grau que tem como raízes $i, 2i$ e $3i$ e apresenta coeficientes reais.

2. Forme uma equação algébrica de coeficientes reais, com grau mínimo, de modo que $0, 1 + i$ e i sejam raízes simples.

3. Qual é o grau mínimo de um polinômio de coeficientes reais, sabendo que $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1 + i$ são raízes?



AULA 87

MÉDIA ARITMÉTICA E MÉDIA PONDERADA



esta aula, iniciaremos o estudo das medidas de tendência central da estatística descritiva.

Definição: Entre todas as informações que podemos obter, existem valores que representam, de algum modo, o conjunto. Esses valores que representam de algum modo o conjunto são chamados medidas de tendência central.

Definição: As medidas de tendência central são: média, mediana e moda.

A medida de tendência central média pode ser dividida em três partes: média aritmética, média ponderada e média geométrica.

Nesta aula, estudaremos as médias aritmética e média geométrica.

MÉDIA ARITMÉTICA

Considere uma amostra com n elementos.

Definição: A média aritmética é o quociente entre a soma de todos os valores coletados e a quantidade de observações envolvidas nesta soma.

$$\text{Média} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Exemplos

1. O time Ipatinga realizou 8 jogos em um campeonato de futebol. A seguir temos uma tabela contendo a quantidade de gols realizado pelo time Ipatinga durante esse campeonato. Qual foi a média aritmética de gols do time Ipatinga nesse campeonato?

	1° jogo	2° jogo	3° jogo	4° jogo	5° jogo	6° jogo	7° jogo	8° jogo
Gols	1	1	0	2	1	4	0	3

Resolução:

$$\text{Média}_{\text{aritmética}} = \frac{1 + 1 + 0 + 2 + 1 + 4 + 0 + 3}{8} = \frac{12}{8} = 1,5$$

Portanto, a média de gols por jogo foi de 1,5, mesmo que em alguns jogos o time Ipatinga não tenha feito nenhum gol e em outros tenha marcado dois ou mais gols.

2. Um estudante tirou 7, 9 e 10 nas avaliações. Qual é a média do seu desempenho?

Resolução: Como foram 3 notas, precisamos somar os três valores e dividi-los por 3:

$$Média_{aritmética} = \frac{7 + 9 + 10}{3} = \frac{26}{3} \cong 8,7$$

MÉDIA PONDERADA

A média ponderada é diferente da média aritmética que acabamos de estudar, ela possui um peso para cada valor.

Definição: a média ponderada de um conjunto de valores é, assim, calculada: a soma dos produtos desses valores por seus respectivos pesos, dividida pela soma desses pesos.

$$M_p = \frac{p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + p_3 \cdot a_3 + \dots + p_n \cdot a_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$$

Onde:

M_p : Média ponderada.

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$: pesos.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$: valores dos dados.

Exemplos:

1. Considerando as notas e os respectivos pesos de cada uma delas, indique qual a média que o aluno obteve no curso.

Disciplina	Nota	Peso
Biologia	8,2	3
Filosofia	10,0	2
Física	9,5	4
Geografia	7,8	2
História	10,0	2
Língua Portuguesa	9,5	3
Matemática	6,7	4

Resolução: Montando a média ponderada, temos que:

$$M_p = \frac{3 \cdot 8,2 + 2 \cdot 10,0 + 4 \cdot 9,5 + 2 \cdot 7,8 + 2 \cdot 10,0 + 3 \cdot 9,5 + 4 \cdot 6,7}{3 + 2 + 4 + 2 + 2 + 3 + 4}$$

$$M_p = \frac{24,6 + 20 + 38 + 15,6 + 20 + 28,5 + 26,8}{20} = \frac{173,5}{20} = 8,675$$

Portanto, a média que o aluno obteve no curso foi de 8,675.

2. André tirou as seguintes notas em Matemática: 7,5; 5,0 e 6,2. O peso de cada avaliação de Matemática era diferente: 1, 2 e 4, respectivamente. Qual foi a média de Matemática de André?

Resolução: Montando a média ponderada, temos que:

$$M_p = \frac{1 \cdot 7,5 + 2 \cdot 5,0 + 4 \cdot 6,2}{1 + 2 + 4} = \frac{7,5 + 10 + 24,8}{7} = \frac{42,3}{7} \cong 6,04$$

ATIVIDADES

1. Maria Clara fez três provas de matemática no primeiro bimestre. Suas notas foram 6, 8 e 9,5. Determine sua média em matemática nesse bimestre.

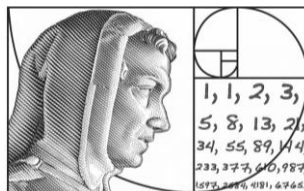
2. Um atleta, em treinamento para as Olimpíadas, corre quatro vezes por semana, sendo que nas segundas-feiras ele percorre 5 km; nas terças 7 km; nas quintas 8 km; e, por fim, nos sábados 8 km. Determine:

- a) a distância média por dia de treino que esse atleta percorre;
- b) a distância média por dia da semana que esse atleta percorre;
- c) a distância percorrida para que sua média por dia da semana seja 6 km, se ele decide correr também aos domingos.

3. Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras o mais próximas possível da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm. Determine a espessura média dessas medidas.

4. Em 2015, um vendedor recebeu três valores de salário diferentes: R\$ 2.000,00, por mês, de janeiro a maio; R\$ 2.500,00, por mês, de junho a agosto; R\$ 3.100,00, por mês, de setembro a dezembro. Qual foi o salário médio desse vendedor em 2015?

5. Uma equipe de basquete é formada por 12 jogadores. Três desses jogadores têm 20 anos, dois jogadores têm 26 anos, quatro jogadores têm 23 anos, e os demais têm 21 anos, 25 anos e 27 anos. Qual é a idade média aproximada dessa equipe?



AULA 92

GRÁFICO DE BARRAS

Nesta aula iniciaremos nossos estudos em relação à operação de divisão de polinômios. Começaremos estudando algumas divisões imediatas e, depois, veremos dois métodos para resolver divisão de polinômios: método de Descartes e o método da Chave.

Definição: Sejam dados dois polinômios quaisquer $f(x)$ e $g(x)$, tal que $g(x) \neq 0$. Dividir f (dividendo) por g (divisor) é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto) de modo que as duas condições sejam confirmadas:



esta aula, iniciaremos o estudo de gráficos apresentando o gráfico de barras.

Os gráficos constituem um importante instrumento de análise e interpretação de um conjunto de dados.

Diariamente, é possível encontrar representações gráficas nos mais variados veículos de comunicação (jornais, revistas, televisão, internet), associadas a assuntos diversos do nosso dia a dia, como resultados de pesquisas de opinião, saúde e desenvolvimento humano, economia, esportes, cidadania, etc.

A importância dos gráficos está ligada sobretudo à facilidade e rapidez na absorção e interpretação das informações por parte do leitor e, também, às inúmeras possibilidades de ilustração e resumo dos dados apresentados.

Estudaremos, neste volume, quatro tipos de representações gráficas: o gráfico de barras (verticais ou horizontais), o gráfico de setores (ou “pizza”), o histograma e o gráfico de linhas.

GRÁFICO DE BARRAS

Os gráficos de barras são amplamente utilizados para representar comparações de forma visual, seja com barras verticais (também chamadas de gráficos de colunas) ou horizontais.

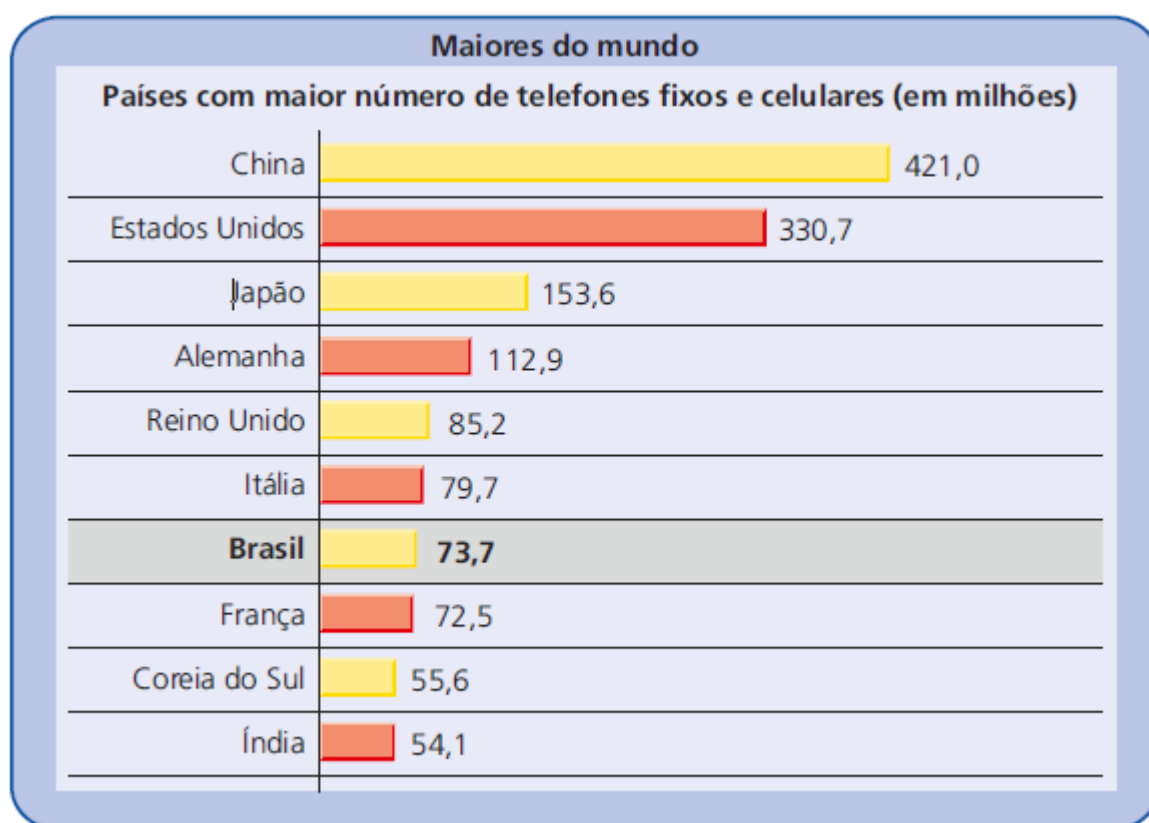
Em um dos eixos do gráfico, são mostradas as categorias que estão sendo comparadas, enquanto o outro eixo indica os valores ou quantidades correspondentes.

Neste tipo de gráfico, as frequências absolutas são representadas por barras que têm a mesma largura e são separadas por espaços iguais. O que varia é o comprimento ou a altura dessas barras, que é proporcional aos valores das frequências associadas a cada categoria.

Os gráficos de barras são excelentes para visualizar e comparar rapidamente as frequências entre diferentes categorias. No entanto, eles não são a escolha ideal quando o objetivo é comparar cada valor de uma variável com o total da amostra. Para esse tipo de análise, onde a relação entre as partes e o todo é importante, gráficos de setores (como o gráfico de pizza) ou histogramas, podem ser mais apropriados, pois permitem uma comparação mais clara das proporções relativas.

Exemplos

1. O gráfico abaixo relaciona os países onde há maior número de telefones (fixos e celulares, somados) e as quantidades correspondentes a cada um.

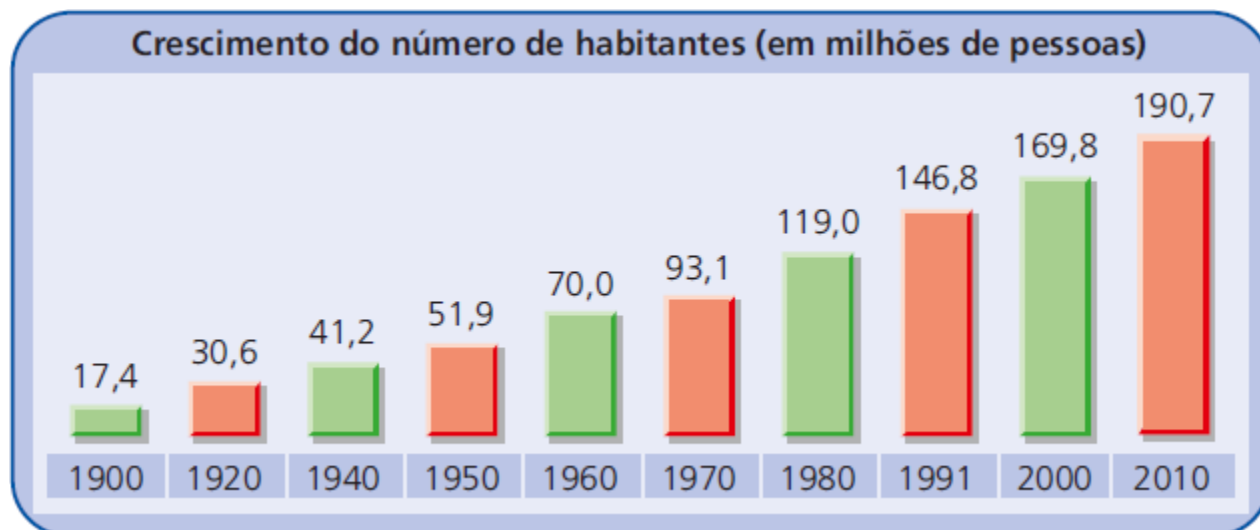


Fonte: O Estado de S. Paulo, 6 jul. 2003.

Ao lado do nome de cada país há uma barra cujo comprimento é proporcional ao número de telefones. Nessa escala, cada centímetro equivale a aproximadamente 70 milhões de telefones.

Esse tipo de gráfico recebe o nome de gráfico de barras horizontais. Para construí-lo, basta estabelecer uma escala conveniente para definir o tamanho da barra a ser usada para representar a frequência de cada ocorrência da variável em estudo.

2. No gráfico a seguir, está representado o aumento da população brasileira em um século.

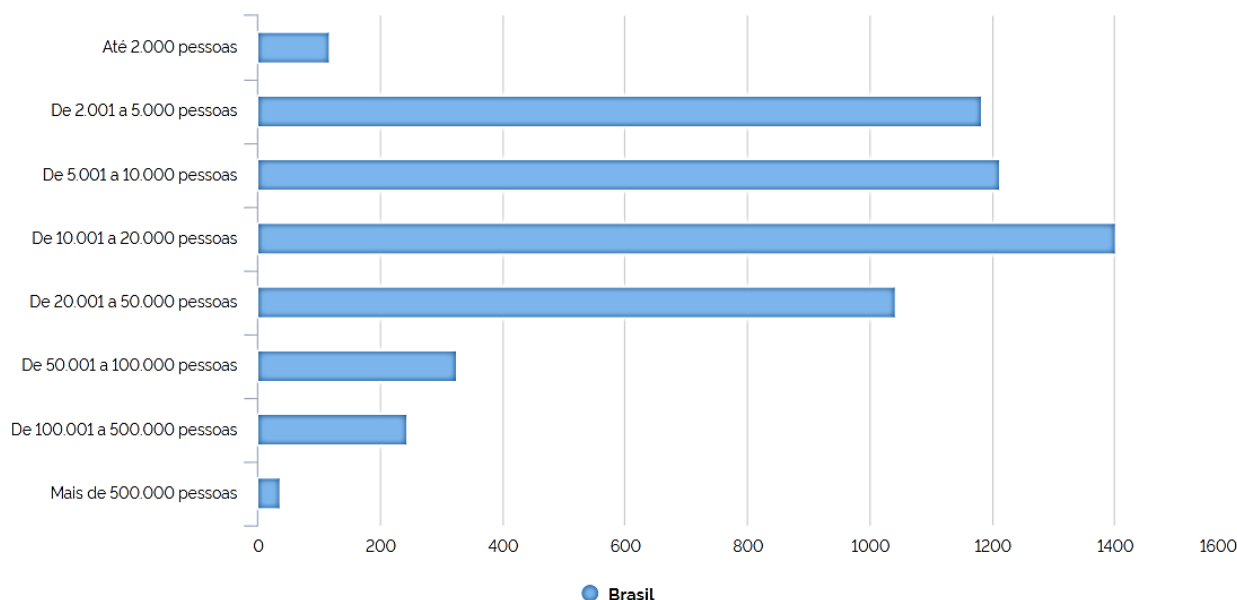


Fonte: IBGE

A cada ano corresponde uma coluna cujo comprimento é proporcional ao número de habitantes. Na escala utilizada, cada meio centímetro equivale a aproximadamente 35 milhões de habitantes. Esse tipo de gráfico é chamado de gráfico de barras verticais.

ATIVIDADES

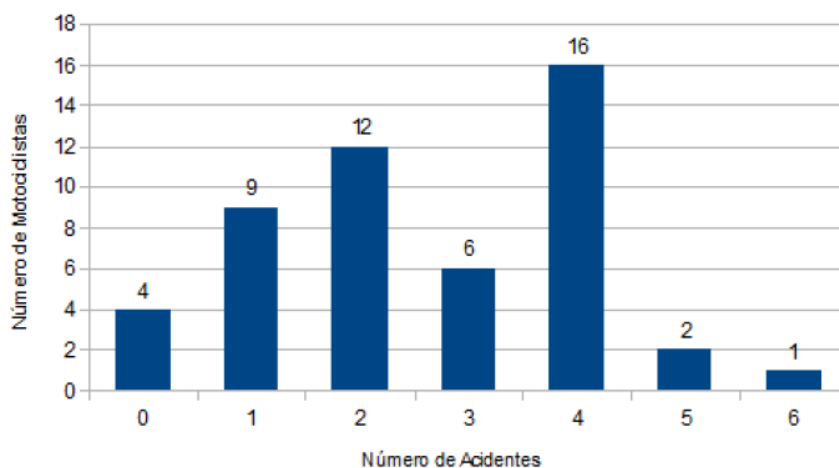
1. O censo do Brasil, realizado em 2010, buscou classificar o número de municípios por tamanho da população.



De acordo com os dados fornecidos pelo gráfico, responda:

- Qual é a moda da pesquisa?
- Pesquise a população da sua cidade. Em qual das barras sua cidade se classifica?

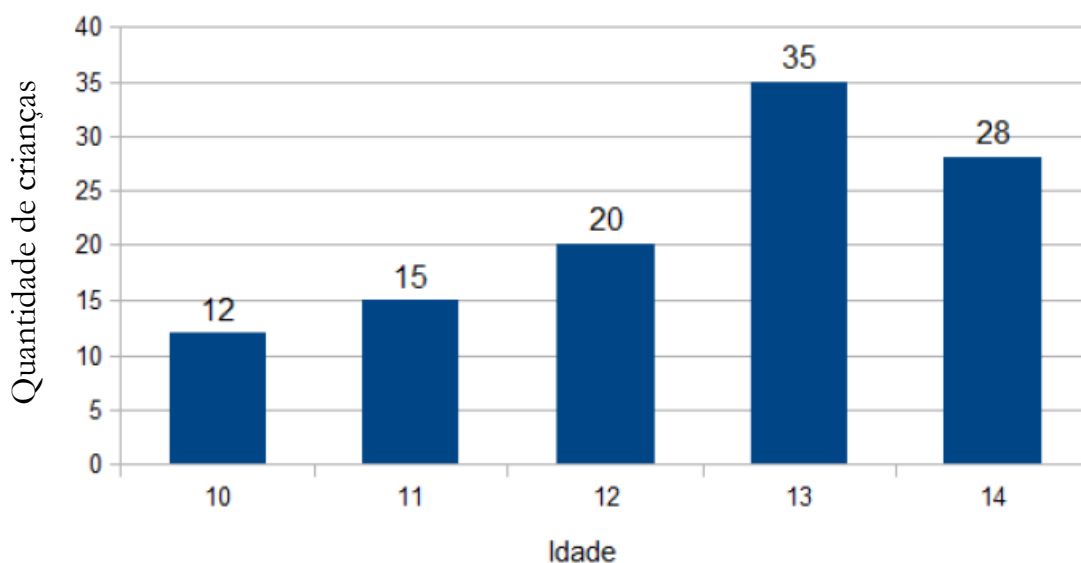
2. O gráfico a seguir, mostra o resultado de uma pesquisa sobre o número de acidentes ocorridos com 50 motociclistas de determinada empresa, no período de 1 ano.



Determine:

- a) a média de acidentes por motocicleta;
- b) a média mensal de acidentes.

3. Um grupo de famílias *homeschoolers* fez um levantamento das idades das crianças de seu grupo. O gráfico abaixo mostra os dados que foram levantados.

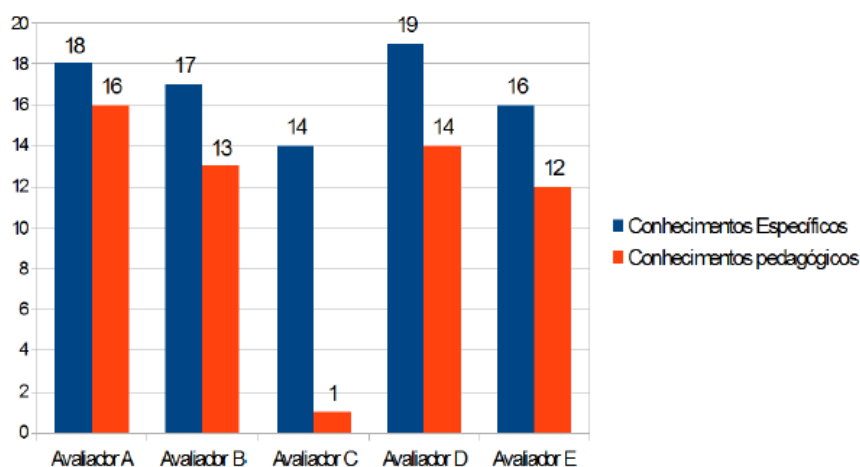


Determine:

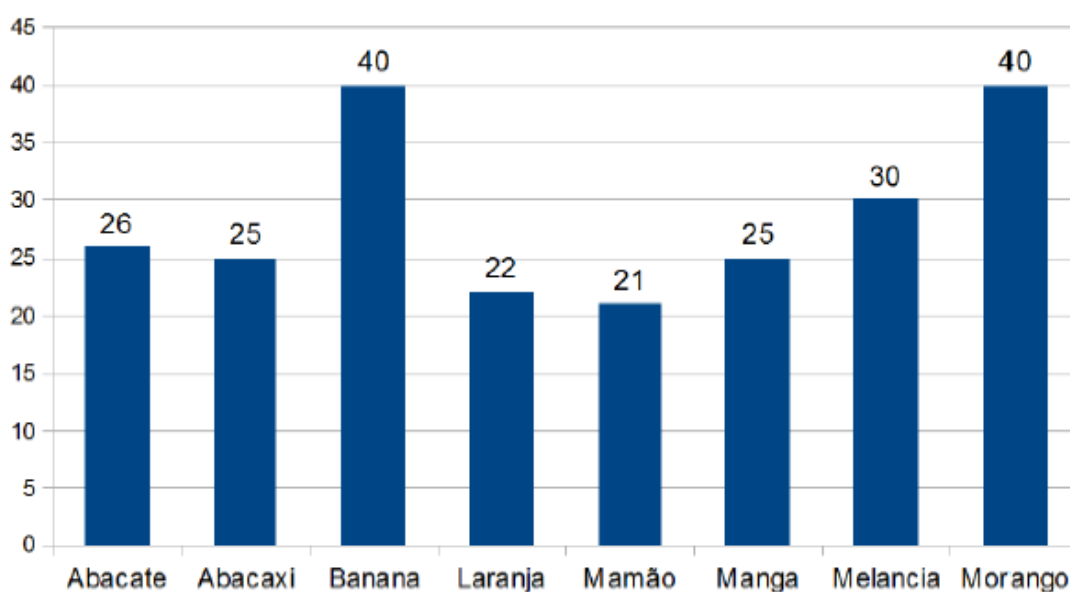
- a) a idade mediana;
- b) a idade média;
- c) a moda.

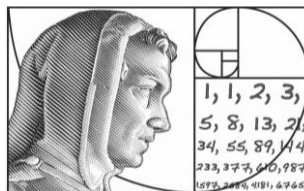
4. As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por 5 membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos de área de atuação, e outra aos conhecimentos pedagógicos. A média final do professor foi

dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora. Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor. Determine a nova média utilizando este critério.



5. O Brasil é o quarto maior produtor mundial de alimentos, produzindo mais que o necessário para alimentar sua população. Entretanto, grande parte da produção é desperdiçada. O gráfico mostra o percentual do desperdício de frutas nas feiras do estado de São Paulo. Considerando os dados do gráfico, determine a média aritmética, a moda e a mediana destes dados.





AULA 93

GRÁFICO DE SETORES



esta aula, estudaremos o gráfico de setor.

Um gráfico de setores circulares, também chamado de gráfico de pizza, é bastante utilizado para representar a frequência relativa dos dados em formato percentual. Nesse gráfico, o círculo é dividido em partes, onde cada setor corresponde a uma categoria, com seu tamanho sendo proporcional à frequência dessa categoria em relação ao total. Ele é especialmente útil para comparar visualmente as proporções de cada categoria dentro do conjunto geral, além de facilitar a comparação entre os diferentes setores e sua relação com o total dos dados.

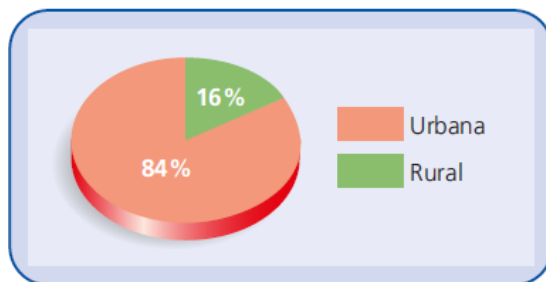
Na criação de gráficos de setores circulares, é fundamental que:

- A soma dos percentuais de todos os setores seja sempre exatamente 100%, garantindo que o gráfico represente o conjunto total dos dados.
- As aberturas dos ângulos centrais de cada setor sejam proporcionais aos percentuais que eles representam, de modo que a área de cada setor reflita corretamente a frequência relativa dos dados.

Esses princípios garantem a precisão na visualização das proporções e permitem comparações adequadas entre os segmentos.

Exemplos:

1. O gráfico seguinte informa a distribuição da população brasileira que vive no campo (zona rural) e nas cidades (zona urbana).



Fonte: Almanaque Abril, 2012

Para representar essa distribuição, dividimos um círculo em duas partes (setores circulares), uma com ângulo de medida proporcional à porcentagem da população rural e outra com ângulo de medida proporcional à porcentagem da população urbana.

Temos, então, a seguinte proporção:

• **População rural:**

$$100\% \text{ ————— } 360^\circ$$

$$16\% \text{ ————— } x$$

$$x = 57,6^\circ = 57^\circ 36'$$

• **População urbana:**

$$100\% \text{ ————— } 360^\circ$$

$$84\% \text{ ————— } x$$

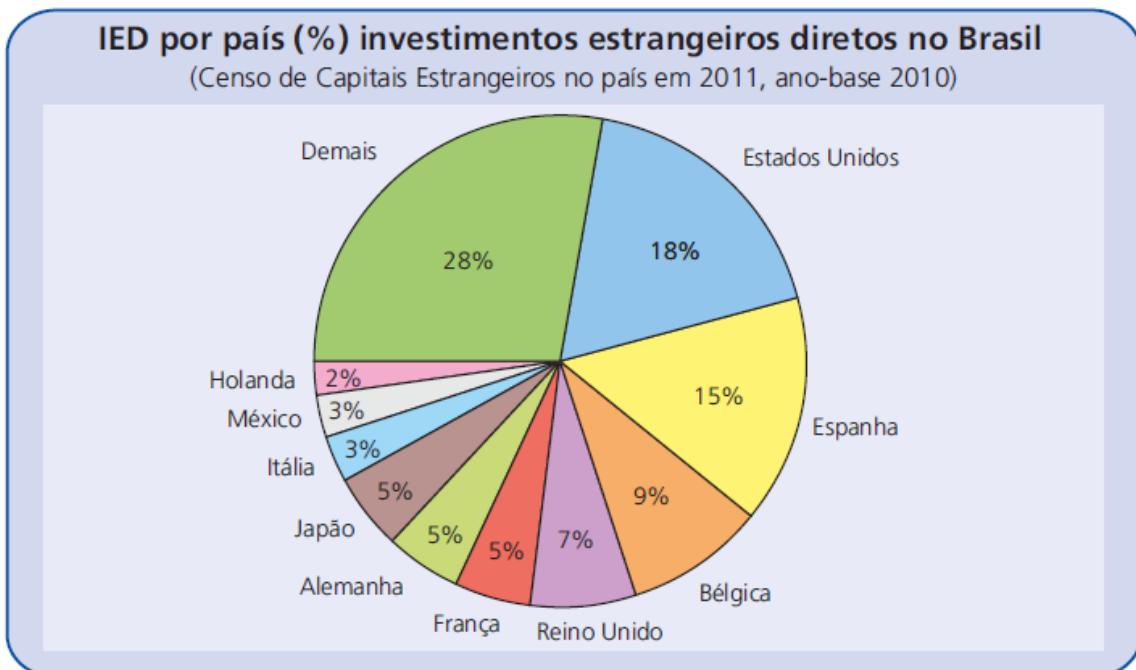
$$y = 302,4^\circ = 302^\circ 24'$$

(Poderíamos simplesmente fazer também: $360^\circ - 57,6^\circ = 302,4^\circ$.)

Com o auxílio de um transferidor, construímos o gráfico de setores ou de “pizza”.

De modo geral, quando uma variável assume k valores distintos, dividimos um círculo em k setores circulares cujas medidas dos ângulos são proporcionais às frequências correspondentes a cada um desses valores.

2. Censo de Capitais Estrangeiros no Brasil em 2011, cujo ano-base é 2010.



ATIVIDADES

1. Numa sessão de cinema, os espectadores responderam a uma pesquisa sobre as preferências de gêneros, escolhendo apenas um como preferido. Observe a tabela de frequências:

Quantidade de votos por gênero	
Gênero	Quantidade
Comédia	12
Aventura	20
Ficção científica	4
Desenho animado	12
Suspense	14
Drama	8
Musical	4
Documentário	6

a) Qual é a porcentagem de cada gênero preferido?

b) Construa um gráfico de setores que represente os gêneros preferidos e suas respectivas porcentagens.

2. Foi feita uma pesquisa acerca do nível de instrução do povo brasileiro, e os dados foram divulgados em 2019.



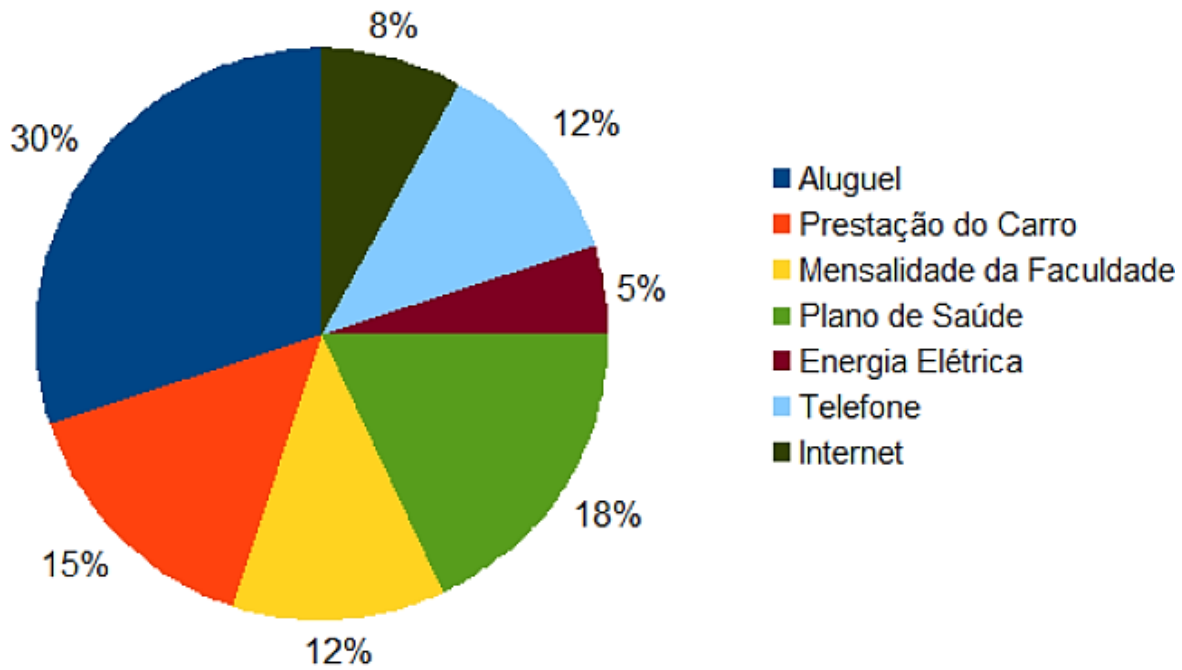
Segundo os dados fornecidos pela pesquisa, faça o que se pede:

a) Construa um gráfico de setores com essas informações.

b) Qual é a moda dessa pesquisa?

c) A variável desta pesquisa é qualitativa ou quantitativa?

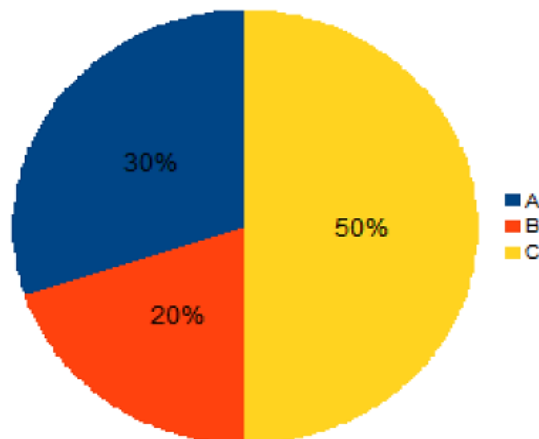
3. Jorge tem um gasto fixo mensal de R\$ 2 500,00. O gráfico detalha este gasto.



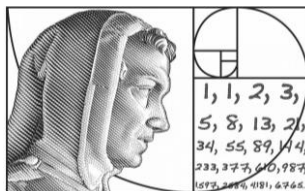
Determine:

- o valor gasto com plano de saúde;
- o percentual do telefone, caso o aluguel sofra um reajuste (aumento) de R\$ 200,00.

4. Em uma eleição, estão concorrendo os candidatos *A*, *B* e *C*. Realizada uma pesquisa de intenção de voto com 1000 eleitores, obteve-se o resultado ilustrado no gráfico de setores.



Qual é o valor do ângulo utilizado para construir o setor circular referente ao candidato *B*?



AULA 97

RAZÃO E PROPORÇÃO

Nesta aula, estudaremos o conceito de razão e proporção.

Primeiramente, iremos estudar o conceito de razão e posteriormente o conceito de proporção.

RAZÃO



palavra razão deriva do latim *ratio* e pode significar “cálculo, medida, divisão”.

O conceito de razão é um conceito primitivo. Como exemplo podemos encontrar esse conceito em uma passagem do livro do Êxodo.

“Para o segundo lado do tabernáculo, ao norte, farás vinte tábuas, com quarenta suportes de prata, à razão de dois por tábua.” Ex 26, 20-21

A razão de dois por tábua nessa passagem, significa que deveriam colocar dois suportes de prata para cada tábua. Desta forma, temos a razão de dois para um e podemos representar da seguinte forma:

$$\frac{\text{Suportes de Prata}}{\text{Tábua}} = \frac{2}{1}$$

Veremos que na matemática, o conceito de razão está totalmente ligado à divisão. Desta forma, ao dividirmos um valor por outro, acabamos realizando uma comparação entre o primeiro valor e o segundo, como veremos ao longo do nosso estudo.

Definição: a razão de dois números é o quociente do primeiro pelo segundo.

Exemplos:

1. A razão de 5 para 10 é $\frac{5}{10}$, que é igual a $\frac{1}{2}$.
2. A razão de 10 para 5 é $\frac{10}{5}$, que é igual a 2.
3. A razão de 8 para 12 é $\frac{8}{12}$, que é igual a $\frac{2}{3}$.
4. A razão de 7 para 15 é $\frac{7}{15}$.

Observação: Lê-se: “7 está para 15”.

Observação: A razão $\frac{7}{15}$ pode ser indicada por $7 : 15$.

Os termos de uma razão recebem nomes especiais: o numerador é chamado de antecedente e o denominador de conseqüente.

Exemplos:

1. Na razão $\frac{2}{9}$ temos que o número 2 é chamado de antecedente e o número 9 é chamado de conseqüente.

2. Na razão $\frac{12}{23}$ temos que o número 12 é chamado de antecedente e o número 23 é chamado de conseqüente.

3. Na razão $\frac{1}{5}$ temos que o número 1 é chamado de antecedente e o número 5 é chamado de conseqüente.

Como estudamos álgebra no volume anterior, agora podemos representar a notação de razão de uma forma generalizada.

$$\frac{a}{b} = k \quad \text{ou} \quad a : b = k$$

Lê-se: razão de “a” para “b”. Nesse caso, k é o quociente entre a e b .

PROPORÇÃO

A palavra proporção deriva do latim *proportio* e significa “relação”, ou ainda uma “justa relação entre coisas”, ou uma “relação de igualdade entre coisas”.

O conceito de proporção é um conceito primitivo. Como exemplo, podemos encontrar esse conceito em algumas passagens bíblicas.

*“Cada um dará segundo o que tiver, em **proporção** das bênçãos que o Senhor, teu Deus, lhe tiver dado.” Dt 16, 17*

*“Todo o resto de sua vida se passou na alegria; e a paz de que gozou foi em **proporção** aos seus progressos no temor a Deus.” Tb 14, 4*

*“Não nos trata segundo os nossos pecados, nem nos castiga em **proporção** de nossas faltas.” Sl 102, 10*

*“Tenho para mim que os sofrimentos da presente vida não têm **proporção** alguma com a glória futura que nos deve ser manifestada.” Rm 8, 18*

Na matemática, veremos que o conceito de proporção está totalmente relacionado com igualdade e comparação. Desta forma, definimos proporção da seguinte forma:

Definição: Chama-se proporção a igualdade entre duas razões.

Exemplos:

1. As razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{15}{20}$ são proporcionais, pois

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

Observação: Lê-se: “3 está para 4, assim como 15 está para 20”.

Observação: Esta proporção pode ser indicada por $3 : 4 = 15 : 20$

2. As razões $\frac{1}{3}$ e $\frac{9}{27}$ são proporcionais, pois

$$\frac{1}{3} = \frac{9}{27}$$

3. As razões $\frac{8}{20}$ e $\frac{40}{100}$ são proporcionais, pois

$$\frac{8}{20} = \frac{40}{100}$$

Definição: O símbolo matemático para representar uma proporção entre dois números é $\propto$.

Exemplos:

1. As razões $\frac{3}{4}$ e $\frac{15}{20}$ são proporcionais, então podemos representá-las da seguinte forma:

$$\frac{3}{4} \propto \frac{15}{20}$$

2. As razões $\frac{1}{3}$ e $\frac{9}{27}$ são proporcionais, então podemos representá-las da seguinte forma:

$$\frac{1}{3} \propto \frac{9}{27}$$

3. As razões $\frac{8}{20}$ e $\frac{40}{100}$ são proporcionais, então podemos representá-las da seguinte forma:

$$\frac{8}{20} \propto \frac{40}{100}$$

Os termos de uma proporção recebem nomes especiais: o primeiro e o quarto termos chamam-se **extremos**, o segundo e o terceiro chamam-se **meios**.

Exemplos:

1. Na proporção $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, os extremos são 3 e 20 e os meios são 4 e 15.

2. Na proporção $\frac{9}{11} = \frac{117}{143}$, os extremos são 9 e 143 e os meios são 11 e 117.

3. Na proporção $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, os extremos são 3 e 20 e os meios são 4 e 15.

Observação: O numerador da primeira razão e o denominador da segunda razão recebem o nome de extremos, pois se encontram nas extremidades da proporção, quando a escrevemos na forma deitada; e o denominador da primeira razão e o numerador da segunda

razão são chamados de meios, pois se encontram no meio da proporção, quando a escrevemos na forma deitada.

$$\underbrace{3}_{\text{extremo}} : \underbrace{4}_{\text{meio}} = \underbrace{15}_{\text{meio}} : \underbrace{20}_{\text{extremo}}$$

Podemos encontrar os meios e extremos cruzando uma seta na diagonal da proporção, conforme a imagem abaixo:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Diagrama de setas diagonais para a proporção $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$:

- Seta de cima esquerda para baixo direita: 3 → 6 (meios)
- Seta de cima direita para baixo esquerda: 4 → 8 (extremos)

$$3 : 4 = 6 : 8$$

Diagrama de setas diagonais para a proporção $3 : 4 = 6 : 8$:

- Seta de cima esquerda para baixo direita: 3 → 6 (meios)
- Seta de cima direita para baixo esquerda: 4 → 8 (extremos)

Observação: Notem que em uma proporção temos quatro termos a, b, c, d relacionados. Dessa forma, podemos encontrar uma proporção escrita como quádrupla, que seria da forma (a, b, c, d) .

Observação: Encontramos proporção nos desenhos de arquitetos e engenheiros, nos desenhos de mapas do Atlas Geográfico, pois todos esses desenhos são feitos em uma escala menor, porém, mantendo a mesma proporção.

Exemplos:



Imagem do mapa do Brasil numa escala de $1 \text{ cm} : 25.000.000 \text{ cm}$, que significa que cada 1 cm do desenho representa 25 000 000 cm no tamanho real. Na imagem é destacado o mapa do Rio de Janeiro pintado em verde. Notem que quanto menor o denominador maior são os detalhes do mapa.

ATIVIDADES

1. Qual é a definição de razão na matemática?

2. Calcule a razão:

a) De 3 para 9.

b) De 18 para 6.

c) De 2 para $\frac{1}{3}$.

d) De $\frac{1}{2}$ para $\frac{1}{4}$.

e) 1,25 e 0,25.

f) 4 e 2,5.

g) 1,4 e - 2,1.

3. Substitua o valor de x , de tal forma que a razão entre a e b esteja correta:

a	6	8	- 1,2	x	x	x
b	3	x	x	- 5	- 9	8
$\frac{a}{b}$	x	4	0,5	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

4. A razão entre dois números é $\frac{7}{3}$, e o menor deles é 9. Qual é o maior?

5. A razão de um número x para um número y é 2. Qual é a razão de y para x ?

6. Os números a e b são racionais positivos e $6a = 10b$. Determine a razão de a para b .

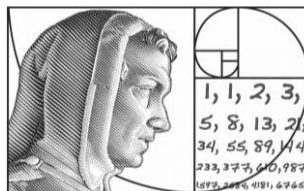
7. Certo refrigerante é vendido por R\$ 1,40, em latas de 350 ml, e por R\$ 3,50, em garrafas de 1500 ml. Qual das duas embalagens é mais econômica para o consumidor?

8. Qual é o significado da palavra proporção? Explique de maneira breve o que é uma proporção.

9. Faça um teste com sua mãe: peça-lhe que lhe mostre uma receita que ela costuma fazer, anote essa receita em seu caderno, e pergunte-lhe para quantas pessoas, mais ou menos, aquela receita é suficiente. Depois pergunte-lhe quantos ingredientes ela utilizaria se fosse fazer a mesma receita para o dobro de pessoas. Você verá quanto o conceito de proporção é utilizado por todos, todos os dias.

10. Qual é o símbolo matemático para expressar uma proporção? Como se lê uma proporção?

11. A constante de proporcionalidade de uma razão é o valor que se obtém...?



AULA 101

JUROS SIMPLES

Nesta aula, iniciaremos um estudo dos juros, estudando os juros simples.



esta forma, iniciaremos estudando a etimologia dessa palavra.

A palavra juros deriva do latim *jus*, que quer dizer equidade, justiça, direito.

Na matemática podemos definir o juro da seguinte forma:

Definição: O juro é o preço pago por um devedor ao credor pelo uso do dinheiro emprestado.

Ao longo da História, a legitimidade do juro sempre foi questionada. Na Grécia Antiga, Aristóteles ensinava que o dinheiro havia sido instituído para facilitar as trocas, esse seria o seu fim. Segundo Aristóteles, homens justos, são homens que não visam nenhuma vantagem pessoal nas trocas, mas apenas o bem da comunidade, pois como dizia ele, a virtude da justiça é um bem em vista dos outros, e não um bem em vista de quem a pratica; e que gerar dinheiro a partir de algo “estéril”, como o dinheiro, era uma atividade absolutamente antinatural e condenável.

Já na Idade Média, o juro era considerado como usura⁴. Os usurários eram homens que emprestavam uma quantia de dinheiro e pediam como pagamento, um valor a mais do que emprestavam. A usura foi condenada pela Igreja e tornada ilegal.

Santo Tomás de Aquino pergunta – a saber, a usura é pecado? – na Suma Teológica (II-II, q. 78, art. 1) e responde, *é ilícito em essência receber pagamento pelo uso do dinheiro emprestado, cujo pagamento é conhecido como usura: e, assim como um homem está obrigado a devolver bens adquiridos ilicitamente, também está obrigado a devolver o dinheiro que recebeu a título de usura.*

Hoje em dia, a usura é o que movimenta a sociedade capitalista moderna ao longo do seu caminho destrutivo do materialismo. A usura é responsável por depressões e guerras mundiais. O Pe. Walter Farrell, O.P., escreve em *A Companion to the Summa* (III, 239) que mesmo a usura sendo um pecado grave, isso não significa que não pode haver um juro justo, desde que ele não seja cobrado pelo valor do dinheiro em si, pois este é um mero meio de

⁴ Usura é a cobrança de juros pelo uso de dinheiro como se ele tivesse algum tipo de poder produtivo por si próprio.

troca e não tem nenhum poder produtivo em si mesmo, como o trabalho ou um bem imóvel tem.

É nítido que a maioria dos juros aplicados em nossa sociedade, especialmente por bancos e financiadoras, não se adequam aos juros justos.

Agora, iremos estudar os juros simples.

Definição: O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor principal (capital). E a fórmula dos juros simples é a seguinte:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

Vamos definir os termos que aparecem na fórmula dos juros simples:

j: juro

c: capital

i: taxa de juro

t: tempo

O **valor principal** ou **capital** é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros. A **taxa de juro** é sempre dada em percentagem e é o valor que se cobra por unidade de tempo, podendo ser por dia, mês e ano. O **tempo** é o período em que se investiu um capital ou que se demorou para um empréstimo, podendo ser em dias, meses, anos, etc.

Observação: a taxa de juro e o tempo precisam estar sempre na mesma unidade de tempo, ou seja, se o tempo for medido ao mês, a taxa de juro também deve ser ao mês. Se o tempo for medido em anos, a taxa de juro deve ser ao ano. Se não estiverem na mesma unidade, devemos transformar o tempo na unidade da taxa de juro. As conversões das unidades de tempo são:

1 dia – 24 horas

1 semana – 7 dias

1 mês – 30 dias

1 ano – 12 meses – 360 dias

O mês e o ano possuem, respectivamente, 30 e 360 dias, pois consideramos o mês e o ano comercial. Não consideramos o mês e o ano civil, pois os dois variam.

Exemplos:

1. Davi fez um empréstimo de **R\$ 3 500,00** do banco com taxa de **5%** ao mês para pagar em **3 meses**. Qual será o custo do empréstimo para Davi?

Resolução:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

$$j = 3500 \cdot 0,05 \cdot 3 = 525$$

Portanto, o custo do empréstimo para Davi será de R\$ 525,00.

2. Qual é a taxa mensal de juros simples que faz um capital de R\$ 8 500,00 produzir um juro de R\$ 6 120,00 ao final de 1 ano de aplicação?

Resolução:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

$$6120 = 8500 \cdot i \cdot 12$$

$$6120 = 102\,000 \cdot i$$

$$i = \frac{6120}{102\,000}$$

$$i = 0,06$$

$$i = 6\%$$

Portanto, a taxa de juros é de 6% *a.m.*

3. Heloisa aplicou um valor de capital durante 2 anos, à taxa de 1,25% ao mês, e obteve um juro de R\$ 5 400,00. Qual foi o capital aplicado?

Resolução:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

$$5400 = c \cdot \frac{1,25}{100} \cdot 24$$

$$5400 = 0,3 \cdot c$$

$$c = \frac{5400}{0,3}$$

$$c = 18\,000$$

Portanto, o capital aplicado por Heloisa foi de R\$ 18 000,00.

4. Pedro aplicou um capital de R\$ 4500,00, à taxa de 3,5% *a.m.* e, após certo tempo, obteve R\$ 1260,00 de juros. De quanto tempo foi esta aplicação?

Resolução:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

$$1260 = 4500 \cdot 0,035 \cdot t$$

$$1260 = 157,5 \cdot t$$

$$t = \frac{1260}{157,5}$$

$$t = 8$$

Portanto, o tempo de aplicação do Pedro foi de 8 meses.

Observação: Nos juros simples não há cobrança de juros sobre juros acumulados no período anterior, isto é, o valor acrescentado no decorrer do tempo é fixo.

Exemplos:

1. Em um empréstimo de R\$ 1000,00, com taxa de juros simples de 8% *a. a.*, com duração de 2 anos, o total de juros será R\$ 80,00 no primeiro ano e R\$ 80,00 no segundo ano.

$$j = c \cdot i \cdot t$$

$$j = 1000 \cdot 0,08 \cdot 1$$

$$j = 80$$

Ao final do contrato, os juros serão de R\$ 160,00.

Podemos calcular diretamente, utilizando na fórmula o período de dois anos e encontraremos o mesmo resultado, pois nos juros simples não há cobrança de juros sobre juros.

$$j = c \cdot i \cdot t$$

$$j = 1000 \cdot 0,08 \cdot 2$$

$$j = 160$$

Definição: Ao somarmos os juros ao capital, temos o **montante**, ou seja, o montante é o capital final após a aplicação do juro e é representado por *M*.

$$M = j + c$$

Exemplos:

1. Calcule o montante resultante da aplicação de R\$ 70.000,00 à taxa de 10,5% *a. a.* durante 145 dias.

Resolução: Primeiramente iremos calcular o juro dessa aplicação.

$$j = c \cdot i \cdot t$$

$$j = 70\,000 \cdot \frac{10,5}{100} \cdot \frac{145}{360}$$

$$j = 7\,350 \cdot \frac{145}{360}$$

$$j = \frac{1\,065\,750}{360}$$

$$j = 2\,960,416\dots$$

$$j \cong 2\,960,42$$

Agora, iremos calcular o montante.

$$M = j + c$$

$$M = 2\,960,42 + 70\,000$$

$$M = 72\,960,42$$

2. Pietra aplicou R\$ 25 000,00 em uma poupança, a juro simples, à taxa de 7,5% ao ano. Se Pietra deixou este dinheiro por três anos, quanto seu dinheiro terá rendido? Qual será o montante?

Resolução: Primeiramente iremos calcular o juro dessa aplicação na poupança.

$$j = c \cdot i \cdot t$$

$$j = 25\,000 \cdot 0,075 \cdot 3$$

$$j = 5\,625$$

Agora, iremos calcular o montante.

$$M = j + c$$

$$M = 5\,625 + 25\,000$$

$$M = 30\,625$$

Portanto, o dinheiro de Pietra renderá R\$ 5 625,00 e o seu montante será de R\$ 30 625 ao final dos três anos.

ATIVIDADES

1. O que significam os termos capital, taxa de juro, tempo e montante na Matemática?
2. Um investidor quer aplicar a quantia de R\$ 12 000,00 por 6 meses, a uma taxa de 8% ao mês (*a. m.*) em juros simples, para retirar no final desse período. Quanto ele irá retirar?
3. Gabriel emprestou R\$ 2500,00 a um amigo a uma taxa de juros simples de 8% ao ano. Quanto de juros Gabriel ganhará após 3 anos?
4. Um investidor colocou R\$ 10 000,00 em uma conta de investimento que paga juros simples de 6% ao ano. Quanto dinheiro ele terá após 5 anos?
5. Maria emprestou R\$ 3000,00 a uma taxa de juros simples de 0,2% *a. m.* para seu irmão. Quanto de juros seu irmão terá que pagar após 2 anos?
6. Você depositou R\$ 1200,00 em uma conta de poupança que paga juros simples de 3,5% ao ano. Qual será o montante após 4 anos?

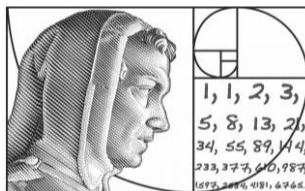
7. Raul aplicou certo capital pelo prazo fixo de 2 anos, à taxa de 0,85% *a. m.*, e obteve um juro de R\$ 2856,00. Qual foi o capital aplicado?

8. Carlos pegou um empréstimo de R\$ 5.000,00 a uma taxa de juros simples de 9% ao ano. Ele pagou o empréstimo após 2 anos. Quanto ele pagou de juros?

9. João investiu R\$ 8.000,00 a uma taxa de juros simples de 7% ao ano. Após quanto tempo ele terá R\$ 10.000,00?

10. Uma bicicleta custa R\$ 450,00. Se você quiser comprá-la em 6 meses, quanto você precisa economizar a cada mês se uma loja oferecer juros simples de 2% ao mês?

11. Um estudante pegou emprestado R\$ 1.500,00 de um amigo a uma taxa de juros simples de 12% ao ano. Ele concordou em pagar o empréstimo em 9 meses. Quanto ele terá que pagar ao amigo ao final do prazo?



AULA 108

AVALIAÇÃO GERAL – PARTE II

Nesta aula, daremos continuidade à Avaliação Geral contemplando todos os assuntos estudados ao longo dos volumes 5, 6, 7, 8 e 9.

1. Calcule a distância da origem à reta $r: ax + by + \sqrt{a^2 + b^2} = 0$.

2. Calcule a distância entre as retas

$$r: 3x + 4y - 13 = 0 \text{ e } s: 3x + 4y + 7 = 0$$

3. Qual é a posição da reta $r: 4x + 3y = 0$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 + 5x - 7y - 1 = 0$?

4. Qual é a posição relativa das circunferências

$$x^2 + y^2 = 49 \text{ e } x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

5. Calcule $\overline{(3 - i) + (-2 + 3i)}$.

6. Calcule:

a) $\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$

b) $\sqrt{-16 + 30i}$

7. Dado o polinômio $P(x) = x^2 - 2x$, calcule o valor de $P(1 + i)$.

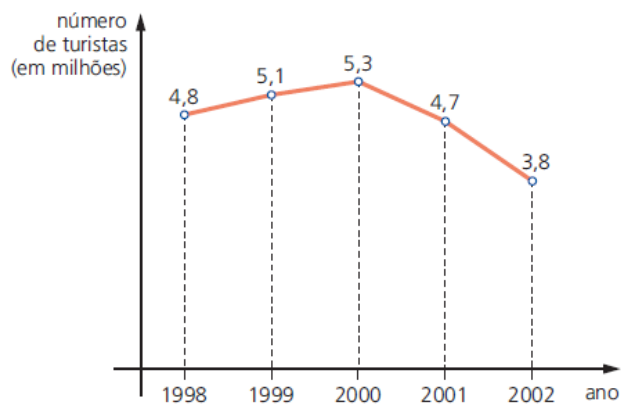
8. Determine quociente e resto da divisão de f por g :

a) $f = x^3 + 5x + 1$ e $g = 2x^2 + 4x - 3$

b) $f = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$ e $g = x^2 + 2$

9. Em 2015, um vendedor recebeu três valores de salário diferentes: R\$ 2.000,00, por mês, de janeiro a maio; R\$ 2.500,00, por mês, de junho a agosto; R\$ 3.100,00, por mês, de setembro a dezembro. Qual foi o salário médio desse vendedor em 2015?

10. O gráfico mostra os números relativos aos turistas estrangeiros que estiveram no Brasil no período de 1998 a 2002. Qual é o desvio padrão dos dados apresentados?



Veja, 16/4/2003.



Nossa Senhora Auxiliadora, rogai por nós!

Santíssima Virgem Maria a quem Deus constituiu
Auxiliadora dos Cristãos,
nós vos escolhemos como Senhora e
Protetora desta casa.

Dignai-vos mostrar aqui Vosso auxílio poderoso.
Preservai esta casa de todo perigo: do incêndio, da
inundação, do raio, das tempestades,
dos ladrões, dos malfeitores, da guerra e de todas as
outras calamidades que conheceis.

Abençoai, protegei, defendei, guardai como coisa vossa
as pessoas que vivem nesta casa.

Sobretudo concedei-lhes a graça mais importante,
a de viverem sempre na amizade de Deus,
evitando o pecado.

Dai-lhes a fé que tivestes na Palavra de Deus,
e o amor que nutristes para com Vosso Filho Jesus e
para com todos aqueles pelos quais
Ele morreu na Cruz.

Maria, Auxílio dos Cristãos, rogai por todos que
moram nesta casa que Vos foi consagrada.

Amém.