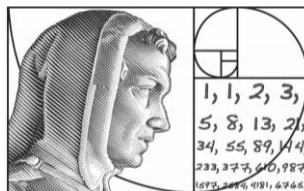

ENSINO FUNDAMENTAL – 7º ANO – MATEMÁTICA VOLUME 1

Apostila do 7º ano do Ensino Fundamental, escrita pelo Instituto São Carlos Borromeu. O conteúdo é indicado para estudo individual domiciliar, apoio escolar ou como material didático escolar.



MATEMÁTICA



AULA 04

DIVISORES E MÚLTIPLOS

Nesta aula iremos lembrar o conceito de divisores e múltiplos.

DIVISORES

Definição: Um número natural não nulo **a** é **divisor** de outro número natural **b** quando a divisão de **b** por **a** é exata.

A definição de divisores nos diz que um número **a** é divisor de **b**, se, e somente se o número **a** divide o número **b** e o resto da divisão é zero.

$$\begin{array}{r} b \overline{) a} \\ 0 \text{ quociente} \end{array}$$

Exemplos:

1. Sara comprou um pacote com 148 balas para montar as sacolinhas surpresas para o aniversário de sua filha. Ela distribuiu igualmente nas sacolinhas surpresas 8 balas em cada uma, sobrando 4 balas ao final. Não satisfeita, Sara tirou todas as balas e resolveu distribuir novamente, agora colocando somente 4 balas em cada sacolinha. Assim, ela preencheu 37 sacolinhas com 4 balas em cada e não sobrou nenhuma bala.

Sara só conseguiu colocar 4 balas em cada sacolinha e não sobrar nenhuma, pois a divisão $148 : 4$ é exata, isto é, 4 é divisor de 148 e quando colocou 8 balas em cada sacolinha sobraram balas, pois 8 não é divisor de 148, ou seja, $148 : 8$ não dá um resultado exato, pois tem quociente 18 e resto 4.

2. 7 é divisor de 63, pois $63 : 7 = 9$ e o resto é zero.

3. 14 não é divisor de 40, pois $40 : 14$ tem quociente 2 e resto é 12.

Definição: Se **a** é divisor de **b**, podemos dizer que **b** é **divisível** por **a**.

MÚLTIPLOS

Definição: Um número natural **a** será **múltiplo** de um número natural **b** diferente de zero, se existir um número natural **m**, de forma que:

$$a = b \cdot m$$

A definição de múltiplos quer dizer que um número **a** é múltiplo de **b** quando o número **a** aparecer na tabuada do número **b**.

Exemplos:

1. 60 é múltiplo de 4, pois $60 = 4 \cdot 15$.
2. 30 não é múltiplo de 4, pois não existe nenhum número natural que multiplicado por 4 resulta em 30.
3. Os 12 primeiros múltiplos de 8 são:

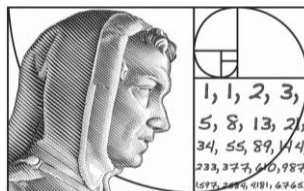
$$M(8) = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96\}$$

ATIVIDADES

1. Verifique quais dos números a seguir são divisores de 108.

a) 4	d) 7
b) 5	e) 8
c) 6	
2. Quais dos números a seguir são múltiplos de 8?

a) 15	d) 24
b) 16	e) 344
c) 22	
3. Qual é o maior divisor de 384 que é menor que 30?
4. Qual é o menor múltiplo de 18 que é maior que 200?
5. Qual é o menor múltiplo de 7 maior que 500?
6. Determine um múltiplo de 4 e 9, que seja maior que 320 e menor que 350?
7. Qual é o maior resto possível de uma divisão por 51?



AULA 07

MÁXIMO DIVISOR COMUM



esta aula revisaremos o conteúdo de Máximo Divisor Comum (MDC).

Definição: O Máximo Divisor Comum (MDC) é o maior número que divide dois ou mais números ao mesmo tempo.

Para encontrarmos o MDC de dois ou mais números, devemos decompô-los em fatores primos ao mesmo tempo e, por fim, calcular o produto dos primos que dividem esses números ao mesmo tempo.

Exemplos:

1. Encontre o MDC entre 140 e 240.

Resolução: Para encontrar o $\text{MDC}(140, 240)$, iremos fatorar esses números juntos:

	Números Primos
140, 240	2
70, 120	2
35, 60	2
35, 30	2
35, 15	5
7, 3	3
7, 1	7
1, 1	

Logo, temos que $\text{MDC}(140, 240) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$, isto é, o número 20 é o maior divisor de 140 e 240.

1. Encontre o $\text{MDC}(8, 9)$.

Resolução:

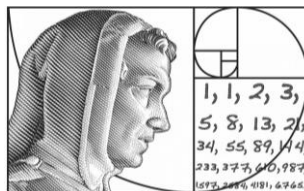
	Números Primos
4, 9	2
2, 9	2
1, 9	3
1, 3	3
1, 1	

Logo, temos que $\text{MDC}(4, 9) = 1$, isto é, o número 1 é o maior divisor de 4 e 9.

Observação: Quando encontramos que o MDC de dois ou mais números não possui nenhum divisor primo, dizemos que os números são primos entre si e que o MDC é 1, pois, o número 1 é divisor de qualquer número.

ATIVIDADES

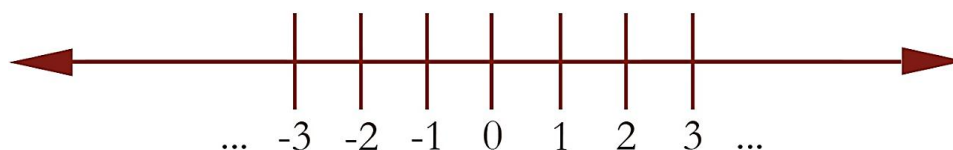
1. Escreva todos os divisores comuns de 40 e de 60 e depois diga de o $MDC(40,60)$.
2. Determine:
 - a) $MDC(38, 45)$
 - b) $MDC(49, 63)$
 - c) $MDC(40, 60, 120)$
 - d) $MDC(300, 450, 900)$
 - e) $MDC(50, 75, 500)$
 - f) $MDC(1000, 400, 700)$
 - g) $MDC(360, 640, 480)$
 - h) $MDC(216, 918)$
3. Quando dois números são considerados primos entre si?
4. Maria vai cortar duas peças de tecido de algodão para fazer toalhas de mesa. Uma das peças tem 90 metros, a outra tem 78 metros. Ela precisa do maior número possível de toalhas, com o maior tamanho possível, de tal forma que todas tenham o mesmo tamanho e não sobre nenhum pedaço de tecido. De que tamanho Maria deve cortar cada pedaço? Quantas toalhas Maria conseguirá fazer?
5. Uma sala de aula tem 133 alunos. Ela deve ser dividida em grupos de mesma quantidade de alunos. Qual a maior quantidade de grupos possível?



AULA 12

COMPARAÇÃO DE INTEIROS

Observe a representação gráfica dos números inteiros na reta.



Dados dois números quaisquer, o que está **à direita é o maior deles**, e o que está **à esquerda, o menor deles**.

Exemplos

1. $-4 < -2$, pois -4 está à esquerda de -2 .
2. $-2 < +1$, pois -2 está à esquerda de $+1$.
3. $-1 > -5$, pois -1 está à direita de -5 .
4. $6 > -10$, pois 6 está à direita de -10 .

A comparação entre números inteiros ocorre devido à Lei da Tricotomia dos inteiros, isto é, dois números inteiros podem ser relacionados de três formas.

Lei da Tricotomia dos Inteiros: Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$, temos que uma, e somente uma, das relações seguintes ocorre:

- 1ª. $m > n$
- 2ª. $m < n$
- 3ª. $m = n$

A leitura das relações entre números inteiros sempre deve ocorrer da esquerda para a direita.

Exemplos

1. $12 > 7$ lê-se “Doze é maior que sete.”
2. $-15 < -2$ lê-se “Menos quinze é menor que -2 .”
3. $8 = 8$ lê-se “Oito é igual a oito.”

Observação 1: Qualquer número positivo é sempre maior que zero.

Observação 2: Qualquer número negativo é sempre menor que zero.

Observação 3: Entre dois números negativos o maior sempre será o que tiver menor módulo, em outras palavras, podemos dizer que entre dois números negativos, o maior sempre será o número que estiver mais próximo do zero (menor módulo).

Exemplos:

1. Qual dos dois números é maior: -15 ou -29?

Resolução: Vamos calcular os módulos de -15 e -29.

$$|-15| = 15$$

$$|-29| = 29$$

Como o módulo -15 é menor que o módulo -29, temos que $-15 > -29$.

1. Qual dos dois números é maior: -48 ou -36?

Resolução: Vamos calcular os módulos de -48 e -36.

$$|-48| = 48$$

$$|-36| = 36$$

Como o módulo -36 é menor que o módulo -48, temos que $-36 > -48$.

ATIVIDADES

1. Agora pense e complete o espaço:

a. “Na comparação entre um número positivo e um negativo, o positivo sempre é _____ que o negativo”.

b. “Na comparação entre dois números negativos, o maior sempre será o que tiver _____”.

c. “Na comparação entre um número positivo e um negativo, o negativo sempre é _____ que o positivo”.

2. Qual é o número maior?

a) +1 ou -10

d) +10 ou -10

g) $|-50|$ ou 40

b) +30 ou 0

e) -20 ou -10

h) -30 ou -15

c) -20 ou 0

f) +20 ou -30

3. Seja o Conjunto $A = \{-20, -5, 0, 5, 12, -1, 8, 15\}$:

a. Qual é o menor número do conjunto A?

b. Qual é o maior número do conjunto A?

4. Compare os seguintes pares de números, utilizando os símbolos $<$, $>$ ou $=$.

a) +2 e +3

d) +1 e -1

g) -8 e -2

b) +5 e -5

e) -3 e -6

h) 0 e -5

c) -3 e +4

f) -3 e -2

i) -2 e 0

j) -2 e -4

m) 40 e $+40$

p) 100 e -200

k) -4 e -3

n) -30 e -10

q) -450 e 300

l) 5 e -5

o) -85 e 85

r) -500 e 400

5. Coloque os números em ordem crescente (usando o sinal $<$):

a) $-9, -3, -7, +1, 0$

b) $-2, -6, -5, -3, -8$

c) $5, -3, 1, 0, -1, 20$

d) $+25, -3, -18, +15, +8, -9$

e) $+60, -21, -34, -105, -90$

f) $-400, +620, -840, +1000, -100$

6. Coloque os números em ordem decrescente (usando o sinal $>$):

a) $+3, -1, -6, +5, 0$

d) $+10, +6, -3, -4, -9, +1$

b) $-4, 0, +4, +6, -2$

e) $-18, +83, 0, -172, -64$

c) $-5, 1, -3, 4, 8$

f) $-286, -740, +827, 0, +904$

7. Responda:

a) Existe o menor número inteiro negativo?

b) Existe o maior número inteiro positivo?

c) Existe o menor número inteiro positivo?

d) Existe o maior número inteiro negativo?

8. Escreva entre chaves os elementos dos conjuntos (desenhe uma reta para cada caso):

a) $x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 5$

e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 4\}$

f) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x \leq 5\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 3\}$

g) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 7 \leq x < 8\}$

d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 2\}$

h) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 8 < x < 9\}$

9. Escreva cada conjunto nomeando os seus elementos entre chaves (desenhe uma reta para cada caso):

a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > -2\}$

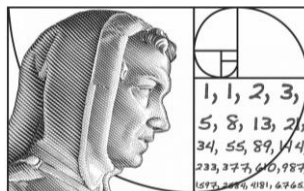
d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq +2\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > +3\}$

e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < -3\}$

f) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = -5\}$



AULA 14

SUBTRAÇÃO

A operação de **subtração** é uma operação inversa à da adição.

Exemplos:

- a. $(+8) - (+4) = (+8) + (-4) = +4$
- b. $(-6) - (+9) = (-6) + (-9) = -15$
- c. $(+5) - (-2) = (+5) + (+2) = +7$

Definição: Para subtrairmos dois números inteiros, basta que adicionemos ao primeiro o oposto do segundo.

Observação: A subtração no conjunto $\mathbb{Z}$ goza apenas da propriedade do fechamento (a subtração é sempre possível).

ELIMINAÇÃO DE PARÊNTESES PRECEDIDOS DE SINAL NEGATIVO

Para facilitar o cálculo, eliminamos os parênteses usando o significado do oposto.

Exemplos:

- 1. $-(+5) = -5$ (significa: o oposto de +5 é -5)
- 2. $-(-2) = +2$ (significa: o oposto de -2 é +2)
- 3. $-(+8) - (-3) = -8 + 3 = -5$
- 4. $-(+2) - (+4) = -2 - 4 = -6$
- 5. $(+10) - (-3) - (+3) = 10 + 3 - 3 = 10$

Podemos **eliminar parênteses precedidos de sinal negativo, trocando-se o sinal do número que está dentro dos parênteses.**

ELIMINAÇÃO DOS PARÊNTESES COM DOIS OU MAIS NÚMEROS

Para eliminarmos os parênteses das operações, devemos proceder de duas formas:

1. Parênteses precedidos pelo sinal +

Ao eliminarmos os parênteses e o sinal + que os precede, devemos conservar os sinais dos números contidos nesses parênteses.

Exemplos:

$$1. + (-4 + 5) = -4 + 5$$

$$2. + (3 + 2 - 7) = 3 + 2 - 7$$

PARÊNTESES PRECEDIDOS PELO SINAL -

Ao eliminarmos os parênteses e o sinal - que os precede, devemos trocar os sinais dos números contidos nesses parênteses.

Exemplos:

$$1. - (4 - 5 + 3) = -4 + 5 - 3$$

$$2. - (-6 + 8 - 1) = +6 - 8 + 1$$

Observação: A subtração não é fechada no conjunto dos naturais, pois não é possível efetuar a subtração quando o primeiro número (minuendo) é menor que o segundo número (subtraendo), porém no **conjunto dos inteiros a subtração é fechada**.

ATIVIDADES

1. Elimine os parênteses:

a) $- (+5)$

c) $- (-7)$

e) $- (-42)$

b) $- (-2)$

d) $- (+12)$

f) $- (+56)$

2. Calcule:

a) $(+7) - (+3)$

f) $(-8) - (+5)$

k) $7 - (+2)$

b) $(+5) - (-2)$

g) $(+5) - (-6)$

l) $2 - (-9)$

c) $(-3) - (+8)$

h) $(-2) - (-4)$

m) $-5 - (-1)$

d) $(-1) - (-4)$

i) $(-7) - (-8)$

n) $-5 - (+1)$

e) $(+9) - (+9)$

j) $7 - (-2)$

o) $7 - (+4)$

3. Calcule:

a) $(-4) - (-2) + (-6)$

b) $(-7) - (-5) + (-8)$

c) $(-8) + (-6) - (+3)$

d) $(-4) + (-3) - (+6)$

g) $-10 - (-3) - (-4)$

j) $-(+7) - 4 - 12$

e) $20 - (-6) - (-8)$

h) $9 - (-7) - 11$

k) $-25 - (-5) - 30$

f) $5 - 6 - (+7) + 1$

i) $-2 + (-1) - 6$

l) $-50 - (+7) - 43$

4. Calcule:

a) $(-5) + (+2) - (-1) + (-7)$

f) $18 - (-3) - 13 - 1 - (-4)$

b) $(+2) - (-3) + (-5) - (-9)$

g) $5 - (-5) + 3 - (-3) + 0 - 6$

c) $(-2) + (-1) - (-7) + (-4)$

h) $-28 + 7 + (-12) + (-1) - 4 - 2$

d) $(-5) + (-6) - (-2) + (-3)$

i) $-21 - 7 - 6 - (-15) - 2 - (-10)$

e) $(+9) - (-2) + (-1) - (-3)$

j) $10 - (-8) + (-9) - (-12) - 6 + 5$

5. Elimine os parênteses

a) $+(-3 + 8)$

d) $-(-6 + 4 - 1)$

g) $+(2 + 5 - 1)$

b) $-(-3 + 8)$

e) $+(-3 - 2 - 1)$

c) $-(-3 - 1)$

f) $-(4 - 6 + 8)$

6. Elimine os parênteses e calcule:

a) $+5 + (7 - 3)$

f) $4 + (-5 + 0 + 8 - 4)$

b) $8 - (-2 - 1)$

g) $4 + (3 - 5) + (-2 - 6)$

c) $-6 - (-3 + 2)$

h) $8 - (3 + 5 - 20) + (3 - 10)$

d) $18 - (-5 - 2 - 3)$

i) $20 - (-6 + 8) - (-1 + 3)$

e) $30 - (6 - 1 + 7)$

j) $35 - (4 - 1) - (-2 + 7)$

7. Calcule:

a. $10 - (15 + 25)$

f. $-15 - (3 + 25) + 4$

b. $1 - (25 - 18)$

g. $-32 - 1 - (-12 + 14)$

c. $40 - 18 - (10 + 12)$

h. $7 + (-5 - 6) - (-9 + 3)$

d. $(2 - 7) - (8 - 13)$

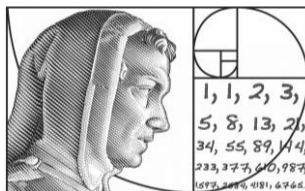
i. $-(+4 - 6) + (2 - 3)$

e. $7 - (3 + 2 + 1) - 6$

j. $-6 - (2 - 7 + 1 - 5) + 1$

8. A maior variação de temperatura registrada no período de um dia ocorreu em Browning, Montana, nos Estados Unidos, entre os dias 23 e 24 de janeiro de 1916, quando a temperatura mínima foi de -49°C e a máxima, 7°C . Quanto foi a queda de temperatura em Browning neste dia?

9. Mostre que $[(-15) - (+9)] - (-21) \neq (-15) - [(+9) - (-21)]$.



AULA 20

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO – PARTE II

Nesta aula estudaremos as outras duas propriedades da multiplicação dos inteiros. São elas: elemento neutro e distributiva.

4ª PROPRIEDADE: ELEMENTO NEUTRO

A quarta propriedade da multiplicação de inteiros que estudaremos, é a propriedade do elemento neutro. Essa propriedade consiste na multiplicação entre um número inteiro qualquer por 1 e o resultado será o próprio número.

Definição: Seja $a \in \mathbb{Z}$ o produto de a por 1 resulta em a , pois o número 1 é o elemento neutro da multiplicação.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Exemplos:

1. $(+3) \cdot (1) = (1) \cdot (+3) = (+3)$
2. $(-7) \cdot (1) = (1) \cdot (-7) = (-7)$
3. $(1) \cdot (+22) = (+22) \cdot (1) = (+22)$
4. $(1) \cdot (-54) = (-54) \cdot (1) = (-54)$

5ª PROPRIEDADE: DISTRIBUTIVA

A quinta propriedade da multiplicação de inteiros que estudaremos, é a propriedade distributiva. Essa propriedade consiste na multiplicação entre um número por uma soma. Vejamos a definição da propriedade distributiva.

Definição: O produto de um número por uma soma é igual à soma das multiplicações desse número por cada uma das parcelas.

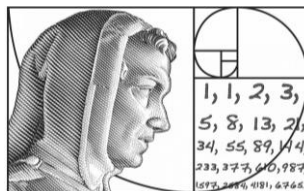
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = ab + ac$$

Exemplos:

1. $(-2) \cdot [(-5) + (+4)] = (-2) \cdot (-5) + (-2) \cdot (+4)$
2. $3 \cdot [(-2) + (-6)] = 3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-6)$
3. $[(-10) + (-8)] \cdot (-7) = (-10) \cdot (-7) + (-8) \cdot (-7)$
4. $(-a) \cdot [2 + b] = (-a) \cdot 2 + (-a) \cdot b$
5. $a \cdot [b + c] = a \cdot b + a \cdot c$
6. $2 \cdot [3 + (-4) + 5] = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 5$

ATIVIDADES

1. Qual é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{Z}$?
2. Defina a propriedade do elemento neutro da multiplicação nos inteiros e dê três exemplos.
3. Defina a propriedade distributiva e dê três exemplos envolvendo números inteiros.
4. Aplique a propriedade distributiva e efetue os cálculos:
 - a) $2 \cdot (-4 + 7)$
 - b) $-3 \cdot (+9 - 1)$
 - c) $-4 \cdot (+8 - 3)$
 - d) $+5 \cdot (-8 + 2)$
 - e) $-12 \cdot (4 - 7)$
 - f) $(16 - 9) \cdot (+8)$
 - g) $(-7 + 9) \cdot (-1)$
 - h) $(-6 - 3) \cdot (-9)$
 - i) $(-26 + 21) \cdot (-7)$
5. Resolva:
 - a) $(-3) \cdot (+1)$
 - b) $(-9) \cdot [(+8) + (-7)]$
 - c) $[(-8) + (-10)] \cdot (+1)$
 - d) $[(+4) + (+3)] \cdot (+2)$
 - e) $(+10) \cdot (-1)$
 - f) $(-1) \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot (+1) \cdot (-1)$
 - g) $(-2) \cdot [(-3) + (-4) + 10]$
 - h) $[(-5) + (+2) + (-3)] \cdot (-7)$



AULA 23

MULTIPLICAÇÃO DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE



esta aula, iniciaremos o estudo das propriedades de potência de base inteira, estudando a propriedade de multiplicação de potências de mesma base.

A base sendo um número inteiro, não altera a forma a que estamos acostumados a utilizar essa propriedade, como podemos ver na definição.

Definição: Na multiplicação de potências de mesma base, sendo a base um número inteiro, devemos conservar a base e somarmos os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplos:

1. $9^5 \cdot 9^3 = 9^{5+3} = 9^8$
2. $(-5)^7 \cdot (-5)^{11} \cdot (-5)^2 = (-5)^{7+11+2} = (-5)^{20}$
3. $(-2)^{100} \cdot (-2)^{25} \cdot (-2)^{45} \cdot (-2)^{30} = (-2)^{100+25+45+30} = (-2)^{200}$
4. $a^3 \cdot a^2 \cdot a^1 \cdot a^0 = a^{3+2+1+0} = a^6$
5. $(-b)^{11} \cdot (-b)^{12} \cdot (-b)^{13} \cdot (-b)^{14} \cdot (-b)^{15} = (-b)^{11+12+13+14+15} = (-b)^{65}$

Na multiplicação de potências de mesma base, sendo a base um número inteiro ou natural, devemos conservar a base e somar os expoentes, e isso ocorre por causa da definição de potências, como podemos ver nos próximos exemplos:

Exemplos:

1. $(-7)^2 \cdot (-7)^3 = [(-7) \cdot (-7)] \cdot [(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)]$
 $= (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = (-7)^5$
2. $8^4 \cdot 8^2 = (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) \cdot (8 \cdot 8) = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^6$
3. $(-2)^5 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^1 = [(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)] \cdot [(-2) \cdot (-2)] \cdot [-2]$
 $= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$
 $= (-2)^8$

ATIVIDADES

1. Reduza a uma só potência:

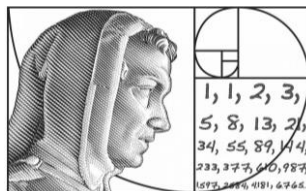
- a) $5^6 \cdot 5^3$
- b) $x^7 \cdot x^8$
- c) $2^4 \cdot 2 \cdot 2^9$
- d) $x^5 \cdot x^3 \cdot x$
- e) $m^7 \cdot m^0 \cdot m^5$
- f) $a \cdot a^2 \cdot a \cdot a^2$
- g) $j^8 \cdot j^9 \cdot j^{12} \cdot j^{15}$
- h) $b^{24} \cdot b^{26} \cdot b^{32} \cdot b^{42}$
- i) $y^{74} \cdot y^{50} \cdot y^{45} \cdot y^{97} \cdot y^{105}$
- j) $z^{241} \cdot z^{302} \cdot z^{278} \cdot z^{362} \cdot z^{501}$

2. Reduza a uma só potência:

- a) $(+5)^7 \cdot (+5)^2$
- b) $(+6)^2 \cdot (+6)^3$
- c) $(-3)^5 \cdot (-3)^2$
- d) $(-4)^2 \cdot (-4)$
- e) $(+7) \cdot (+7)^4$
- f) $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$
- g) $(-5)^3 \cdot (-5) \cdot (-5)^2$
- h) $(+3) \cdot (+3) \cdot (+3)^7$
- i) $(-6)^2 \cdot (-6) \cdot (-6)^2$
- j) $(+9)^3 \cdot (+9) \cdot (+9)^4$
- k) $(-1)^{13} \cdot (-1)^{22} \cdot (-1)^{45} \cdot (-1)^{40}$
- l) $(-1)^{31} \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^{42} \cdot (-1)^{16} \cdot (-1)^{35}$
- m) $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^5 \cdot (-2)^7 \cdot (-2)^{11} \cdot (-2)^{13}$

3. O valor da expressão $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ é:

- a) 512
- b) 2048
- c) 1024
- d) 256



AULA 28

MULTIPLICAÇÃO DE POTÊNCIAS DE EXPOENTES IGUAIS



esta aula, estudaremos a sétima propriedade de potência de base inteira, que é a propriedade de multiplicação de potências de expoentes iguais.

A base sendo um número inteiro, não altera a forma a que estamos acostumados a utilizar essa propriedade, como podemos ver na definição.

Definição: Na multiplicação de potências de expoentes iguais, devemos multiplicar as bases e conservar o expoente.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Exemplos:

$$1. (-8)^{11} \cdot 6^{11} = [(-8) \cdot 6]^{11} = (-48)^{11}$$

$$2. 7^{22} \cdot (-9)^{22} = [7 \cdot (-9)]^{22} = (-63)^{22}$$

$$3. (-2)^5 \cdot (-3)^5 = [(-2) \cdot (-3)]^5 = 6^5$$

$$4. (-5)^4 \cdot (-1)^4 = [(-5) \cdot (-1)]^4 = 5^4$$

$$5. (-a)^3 \cdot b^3 = [(-a) \cdot b]^3 = (-ab)^3$$

Na multiplicação de potências de expoentes iguais, sendo a base um número inteiro ou natural, devemos multiplicar as bases e conservar o expoente, e isso ocorre por causa da definição de potências, como podemos ver nos próximos exemplos:

Exemplos:

$$\begin{aligned} 1. (-5)^2 \cdot 8^2 &= [(-5) \cdot (-5)] \cdot [8 \cdot 8] \\ &= (-5) \cdot (-5) \cdot 8 \cdot 8 = (-5) \cdot 8 \cdot (-5) \cdot 8 = [(-5) \cdot 8] \cdot [(-5) \cdot 8] \\ &= (-40) \cdot (-40) = (-40)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. 7^4 \cdot (-2)^4 &= [7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7] \cdot [(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)] \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \\ &= 7 \cdot (-2) \cdot 7 \cdot (-2) \cdot 7 \cdot (-2) \cdot 7 \cdot (-2) \\ &= [7 \cdot (-2)] \cdot [7 \cdot (-2)] \cdot [7 \cdot (-2)] \cdot [7 \cdot (-2)] \\ &= (-14) \cdot (-14) \cdot (-14) \cdot (-14) = (-14)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. (-4)^3 \cdot (-6)^3 &= [(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)] \cdot [(-6) \cdot (-6) \cdot (-6)] \\
&= (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \\
&= (-4) \cdot (-6) \cdot (-4) \cdot (-6) \cdot (-4) \cdot (-6) \\
&= [(-4) \cdot (-6)] \cdot [(-4) \cdot (-6)] \cdot [(-4) \cdot (-6)] \\
&= (+24) \cdot (+24) \cdot (+24) = (+24)^3
\end{aligned}$$

ATIVIDADES

1. Defina a propriedade de multiplicação de potências de expoentes iguais e dê três exemplos.

2. Aplique a propriedade de multiplicação de potências de expoentes iguais:

a) $(-3)^2 \cdot 9^2$

f) $(-2)^{10} \cdot (-3)^{10} \cdot (-4)^{10} \cdot 5^{10}$

b) $(-8)^{20} \cdot (-12)^{20}$

g) $(-145)^3 \cdot (-1)^3$

c) $15^{45} \cdot (-4)^{45}$

d) $2^{31} \cdot (-3)^{31} \cdot (-5)^{31}$

h) $(-1)^2 \cdot (-2)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-4)^2$

e) $(-7)^{14} \cdot 6^{14} \cdot (-2)^{14}$

3. Sejam as afirmações:

I) $(-2)^6 = 64$

III) $(-10)^3 = -100$

II) $(-13)^2 = 169$

IV) $(-3)^2 = +6$

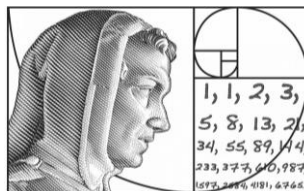
Quantas são verdadeiras?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4



AULA 31

EXPRESSÕES NUMÉRICAS



esta aula, estudaremos as expressões numéricas de números inteiros com as operações de potências e raízes.

Em uma expressão numérica nos deparamos com associações, operações e números.

Primeiramente, vamos lembrar o que são associações.

Definição: Os símbolos $()$, $\{ \}$ e $[]$ são chamados de sinais de associação na matemática.

Para resolver uma expressão numérica, devemos primeiramente eliminar as associações, nesta ordem:

1º) Parênteses $()$.

2º) Colchetes $[]$.

3º) Chaves $\{ \}$.

As associações possuem operações e números dentro delas. Para eliminar as associações, devemos resolver todas as operações que se encontram nelas. Para isso, devemos efetuar as operações obedecendo à seguinte ordem:

1º) Potenciação e Radiciação.

2º) Multiplicação e divisão.

3º) Adição e subtração.

Exemplos:

1. Calcule o valor da expressão $(-3)^4 - 4 - (-1) + 5^2$.

Resolução: Primeiramente, devemos resolver as potências. Então, temos que:

$$(-3)^4 - 4 - (-1) + 5^2$$

$$81 - 4 - (-1) + 25$$

$$81 - 4 + 1 + 25$$

Agora, iremos fazer as duas operações que faltam, a adição e a subtração, da esquerda para a direita:

$$81 - 4 + 1 + 25$$

$$77 + 1 + 25$$

$$103$$

Portanto, o valor da expressão $(-3)^4 - 4 - (-1) + 5^2$ corresponde a 103.

2. Resolva a expressão $15 + (-4) \cdot (+3) - 10$.

Resolução: Primeiramente, devemos resolver a multiplicação. Então, temos que:

$$15 + (-4) \cdot (+3) - 10$$

$$15 + (-12) - 10$$

$$15 - 12 - 10$$

Agora, iremos fazermos as duas subtrações que faltam, da esquerda para a direita:

$$15 - 12 - 10$$

$$3 - 10$$

$$-7$$

Portanto, o valor da expressão $15 + (-4) \cdot (+3) - 10$ corresponde a -7 .

3. Calcule o valor da expressão $5^2 + \sqrt{9} - [(+20) : (-4) + 3]$.

Resolução: Primeiramente, devemos eliminar os colchetes. Então, iremos resolver a divisão e depois a adição:

$$5^2 + \sqrt{9} - [(+20) : (-4) + 3]$$

$$5^2 + \sqrt{9} - [-5 + 3]$$

$$5^2 + \sqrt{9} - [-2]$$

$$5^2 + \sqrt{9} + 2$$

Agora, iremos resolver a potência e a raiz quadrada, e por fim a adição:

$$5^2 + \sqrt{9} + 2$$

$$25 + 3 + 2$$

$$30$$

Portanto, o valor da expressão $5^2 + \sqrt{9} - [(+20) : (-4) + 3]$ corresponde a 30.

ATIVIDADES

1. Calcule o valor das expressões:

a) $5 + (-3)^2 + 1$

b) $10 + (-2)^3 - 4$

c) $12 - 1 + (-4)^2$

d) $(-1)^5 + 3 - 9$

e) $18 - (+7) + 3^2$

f) $6 + (-1)^5 - 2$

g) $(-2)^3 - 7 - (-1)$

h) $(-5)^3 - 1 + (-1)^9$

i) $5^0 - (-10) + 2^3$

2. Calcule o valor das expressões:

a) $3 - 4^2 + 1$

b) $2^3 - 2^2 - 2$

c) $(-1)^4 + 5 - 3^2$

d) $(-3)^2 \cdot (+5) + 2$

e) $(-1)^7 - (-1)^8$

f) $5 + (-3)^2 + 7^0$

g) $\sqrt{49} + 2^3 - 1$

3. Calcule o valor das expressões:

a) $(-3 + 5 + 2) : (-2)$

b) $(+3 - 1)^2 - 15$

c) $(-2)^3 - (-1 + 2)^5$

d) $40 : (-1)^9 + (-2)^3 - 12$

e) $10 - [5 - (-2) + (-1)]$

f) $2 - \{3 + [4 - (1 - 2) + 3] - 4\}$

g) $15 - [(-5)^2 - (10 - 2^3)]$

h) $13 - [(-2) - (-7) + (+3)^2]$

i) $7^2 - [6 - (-1)^5 - 2^2]$

j) $2^3 - [(-16) : (+2) - (-1)^5]$

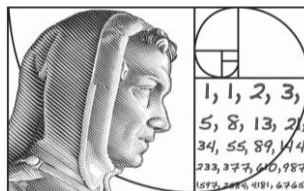
4. O valor da expressão numérica $-4^2 + (3 - 5) \cdot (-2)^3 + 3^2 - (-2)^4$ é:

a) 7

b) 8

c) 15

d) -7



AULA 34

FRAÇÃO E LEITURA DE FRAÇÕES



esta aula estudaremos as frações e a forma como lemos as frações.

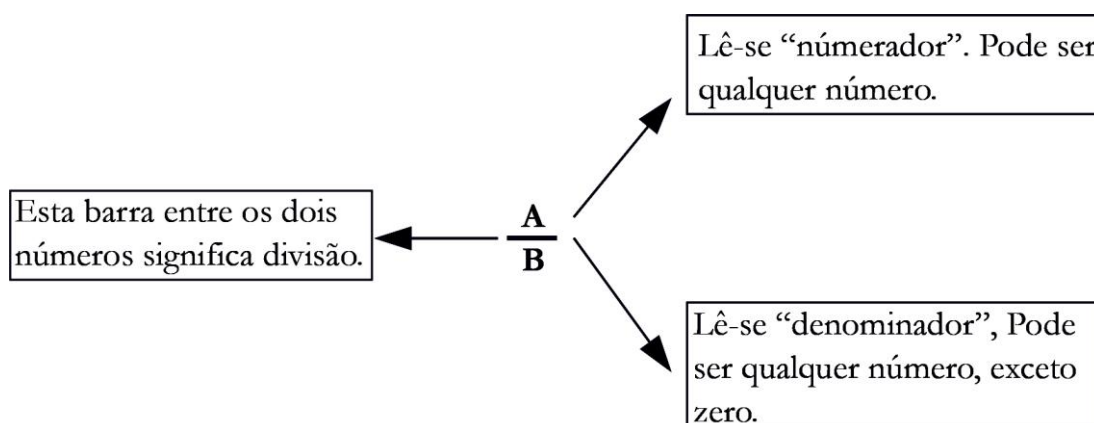
A palavra fração provém do latim *fractio*, que significa ação de quebrar, romper, partir.

A palavra fração aparece na passagem bíblica em que Jesus institui a Eucaristia, pois nessa passagem Jesus parte o pão e o entrega aos doze discípulos, essa passagem recebe o nome de fração do pão, pois um dos significados da palavra fração é partir.

No episódio bíblico da instituição da Eucaristia, Jesus parte o pão e o entrega aos seus 12 discípulos, e por este motivo é que esta passagem recebe o título de “Fração do Pão”. Sabemos então, que cada discípulo recebeu um pedaço do pão (pão = unidade) que foi partido em 12 pedacinhos (12 discípulos). Como podemos representar, numericamente, o pedaço que cada um recebeu?

FRAÇÕES: REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA E EM BARRAS

Definição: A fração é representada como sendo uma divisão entre o numerador e o denominador.



Exemplos:

1. Marcos partiu uma pizza entre seus 12 amigos. Portanto, cada um recebeu 1 pedaço da pizza que foi dividida em 12 pedaços iguais. Numericamente, a parte que cada um recebeu representaremos pintada de amarelo, que corresponde a $\frac{1}{12}$.



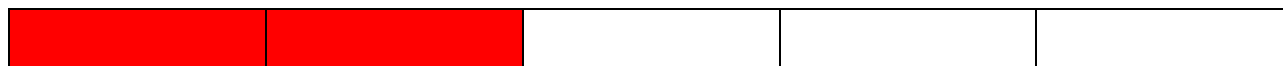
A parte pintada em amarelo representa a quantidade que cada um recebeu de

A fração $\frac{1}{2}$ significa que peguei 1 pedaço de um todo que foi dividido em 2 partes iguais.

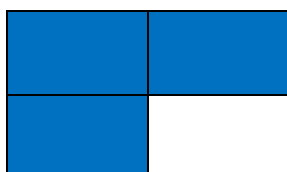


Observação: Notem que não importa os tamanhos das barras. Ela sempre irá representar o todo, e se a barra está sendo dividida ao meio, a parte pintada poderá ser representada pela fração $\frac{1}{2}$.

A fração $\frac{2}{5}$ significa que peguei 2 pedaços do todo que foi dividida em 5 partes iguais.



A fração $\frac{3}{4}$ significa que peguei 3 pedaços de um todo que foi dividido em 4 partes iguais.



Observação: Não importa o tamanho da barra, pois ela representa o todo; mas devemos sempre representar os pedaços com o mesmo tamanho.

LEITURA DE FRAÇÕES

A leitura de frações consiste em lermos as frações da forma correta e para isso devemos seguir duas regras.

1ª regra: Se o denominador da fração a qual faremos a leitura for 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000 devemos ler a fração da seguinte forma: lemos “o numerador” na forma cardinal e em seguida lemos “o denominador” na forma ordinal.

Observação: O número 2 no denominador é lido como meio.

Observação: O número 3 no denominador é lido como terço.

Observação: O singular no denominador será utilizado quando o numerador for 1.

Vejamos como lemos o denominador dependendo do seu valor:

2: meio(s)

3: terço(s)

4: quarto(s)

5: quinto(s)

6: sexto(s)

7: sétimo(s)

8: oitavo(s)

9: nono(s)

10: décimo(s)

100: centésimo(s)

1000: milésimo(s)

10000: décimo(s) de milésimo (s)

Exemplos:

1. A fração $\frac{1}{8}$ lemos como sendo “um oitavo”.

2. A fração $\frac{3}{4}$ lemos como sendo “três quartos”.

3. A fração $\frac{31}{1000}$ lemos como sendo “trinta e um milésimos”.

4. A fração $\frac{7}{2}$ lemos como sendo “sete meios”.

5. A fração $\frac{1}{3}$ lemos como sendo “um terço”.

2ª regra: Se o denominador for maior que 10 e diferente dos números listados acima, devemos ler a fração da seguinte forma: lemos “o numerador” na forma cardinal e em seguida “o denominador” na forma cardinal seguido da palavra “avos”.

Exemplos:

1. A fração $\frac{5}{14}$ lemos como sendo “cinco quatorze avos”.
2. A fração $\frac{15}{23}$ lemos como sendo “quinze vinte e três avos”.
3. A fração $\frac{3}{18}$ lemos como sendo “três dezoito avos”.

Observação: Quando rezamos apenas um dos mistérios do Rosário dizemos que rezamos um terço. Ao falarmos isso estamos dizendo que o terço que rezamos representa a terça parte do Rosário, isto é, quando meditamos somente um mistério, dizemos que rezamos $\frac{1}{3}$ (um terço) do Rosário e quando rezamos três terços ($\frac{3}{3} = 1$) completamos um Rosário.

ATIVIDADES

1. Escreva por extenso como se leem os números abaixo:

a) $\frac{37}{5}$

g) $\frac{5}{14}$

b) $\frac{3}{2}$

h) $\frac{11}{153}$

c) $-\frac{12}{10}$

i) $\frac{12}{3}$

d) $\frac{153}{11}$

j) $-\frac{100}{8}$

e) $-\frac{8}{9}$

k) $\frac{1}{3}$

f) $\frac{17}{99}$

2. Passe para a forma de fração os escritos abaixo:

a) Nove quartos.

b) Dezesete quinze avos.

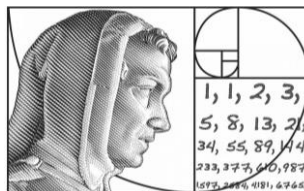
c) Treze meios.

d) Um quinto.

e) Trinta e dois trinta e sete avos.

f) Sessenta e dois nonos.

g) Mil quatrocentos e trinta e sete duzentos e cinquenta e dois avos.



AULA 37

DÍZIMAS PERIÓDICAS



esta aula estudaremos as dízimas periódicas.

Vimos na primeira aula que as dízimas periódicas são elementos que pertencem ao conjunto dos números racionais. Vejamos a definição desses números:

Definição: As dízimas periódicas são numerais decimais em que há repetição periódica e infinita de um ou mais algarismos.

Pela definição temos que as dízimas são números decimais, isto é, números com vírgulas e casas decimais. Porém, diferente dos decimais exatos, as dízimas possuem repetição de um ou mais algarismos. Em uma dízima periódica, o algarismo ou algarismos que se repetem infinitamente, constituem o período dessa dízima.

Exemplos:

1. O número $\frac{1}{3} = 0,333 \dots$ é uma dízima periódica, pois é decimal e repete infinitamente o número 3.

2. O número $\frac{17}{3} = 5,666 \dots$ é uma dízima periódica, pois é decimal e tem período, no caso o período é o número 6.

3. O número $\frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$ é uma dízima periódica, pois é decimal e tem período, no caso o período é o número 3.

Observação: As dízimas periódicas podem ser escritas com um traço em cima do período, ao invés das reticências.

CLASSIFICAÇÃO DAS DÍZIMAS PERIÓDICAS

As dízimas periódicas podem ser classificadas de duas formas: dízimas periódicas simples e dízimas periódicas compostas.

DÍZIMAS PERIÓDICAS SIMPLES

Definição: Nas dízimas periódicas simples, o período apresenta-se logo após a vírgula.

Exemplos:

1. O número $\frac{5}{9} = 0,555 \dots$ é uma dízima periódica simples, pois, o período 5 começa logo após a vírgula.

2. O número $\frac{15}{7} = 2,142857$ é uma dízima periódica simples, pois, o período 142857 começa logo após a vírgula.

DÍZIMAS PERIÓDICAS COMPOSTAS

Definição: Nas dízimas periódicas compostas, entre o período e a vírgula existe uma parte não periódica.

Exemplos:

1. O número $\frac{1}{15} = 0,0666 \dots$ é uma dízima periódica composta, pois, o período 6 não começa logo após a vírgula.

2. O número $\frac{289}{900} = 0,32111 \dots$ é uma dízima periódica composta, pois, o período 1 não começa logo após a vírgula.

3. O número $\frac{61}{495} = 0,12\overline{3}$ é uma dízima periódica composta, pois, o período 23 não começa logo após a vírgula.

Observação: As frações que geram as dízimas periódicas são chamadas de frações geratriz; a forma para encontrá-las estudaremos no ano que vem.

DESCOBRINDO SE UMA FRAÇÃO É DÍZIMA PERIÓDICA

Na aula anterior estudamos a seguinte definição para as frações irredutíveis:

Definição: Se o denominador for múltiplo somente dos primos 2 ou 5 então a fração será um decimal exato, se não, será uma dízima periódica.

Podemos definir de uma forma mais clara para as dízimas periódicas já que o objetivo dessa aula são as dízimas.

Definição: Se o denominador for múltiplo de qualquer número primo diferente de 2 ou 5, então a fração será uma dízima periódica.

Pela nova definição, temos que toda fração irredutível será uma dízima periódica se o denominador for múltiplo de algum primo diferente de 2 ou 5, em outras palavras, se

algum primo diferente de 2 ou 5 dividir o denominador, essa fração será uma dízima periódica.

Exemplos:

1. Verifique se $\frac{2}{3}$ é uma dízima periódica.

Resolução: A fração $\frac{2}{3}$ está na forma irredutível então basta verificarmos o denominador dessa fração. O denominador é 3, logo é múltiplo somente dele mesmo; então $\frac{2}{3}$ será uma dízima periódica.

$$\frac{2}{3} = 0,666 \dots$$

2. Verifique se $\frac{107}{90}$ é uma dízima periódica.

Resolução: A fração $\frac{107}{90}$ é uma dízima periódica, pois está na forma irredutível e o denominador é múltiplo de 3.

$$\frac{107}{90} = 1,1888 \dots$$

3. Verifique se $\frac{10}{30}$ é uma dízima periódica.

Resolução: A fração $\frac{10}{30}$ não está na forma irredutível, então vamos transformar essa fração na forma irredutível dividindo o numerador e o denominador por 10 (ou por 2 e depois por 5).

$$\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Agora que está na forma irredutível, na fração $\frac{1}{3}$ temos que o denominador é múltiplo de 3. Sendo assim, a fração $\frac{10}{30}$ é uma dízima periódica.

$$\frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$$

ATIVIDADES

1. Quando um número deve ser classificado como dízima periódica? Dê dois exemplos.

2. Diga, sem realizar as divisões, quais números são decimais exatos e quais são dízimas periódicas:

a) $\frac{3}{2}$

f) $\frac{10}{5}$

b) $-\frac{15}{7}$

g) $\frac{15}{12}$

c) $\frac{211}{10}$

h) $-\frac{6}{9}$

d) $\frac{7}{20}$

i) $\frac{34}{99}$

e) $-\frac{7}{4}$

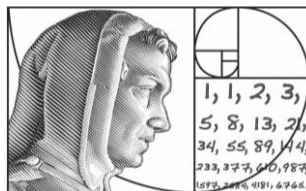
3. Determine qual é o período das dízimas abaixo:

a) 0,333 ...

b) 0,153153153 ...

c) 12,445555 ...

d) 1,999 ...



AULA 44

DIVISÃO COM NÚMEROS DECIMAIS

Nesta aula estudaremos a divisão nos racionais com números decimais.

Definição: Para dividirmos decimais exatos, podemos fazê-lo transformando-os em frações e resolvendo a divisão de frações.

Exemplos:

1. Resolva $2,5 : 0,05$.

Resolução:

$$2,5 : 0,05 = \frac{25}{10} : \frac{5}{100} = \frac{25}{10} \cdot \frac{100}{5} = \frac{2500}{50} = 50$$

2. Resolva $1,45 : 0,2$.

Resolução:

$$1,45 : 0,2 = \frac{145}{100} : \frac{2}{10} = \frac{145}{100} \cdot \frac{10}{2} = \frac{1450}{200} = 7,25$$

É possível realizar a divisão com números decimais utilizando o algoritmo e a chave da divisão. Para realizar a divisão utilizando o algoritmo da divisão, devemos seguir os dois passos abaixo:

1º Passo: Igualar a quantidade de casas após a vírgula, acrescentando zeros.

2º Passo: Cancelar as vírgulas e fazer a divisão.

Exemplos:

1. Resolva $2,5 : 0,05$.

Resolução: Primeiramente iremos igualar a quantidade de casas decimais.

$$2,5 : 0,05 = 2,50 : 0,05$$

Agora iremos cancelar as vírgulas e fazer a divisão.

$$2,5 : 0,05 = 2,50 : 0,05 = 250 : 005 = 250 : 5 = 50$$

Portanto, $2,5 : 0,05 = 50$.

Observação: Notem que o resultado foi o mesmo que encontramos no primeiro exemplo dessa aula.

Observação: As vírgulas podem ser tiradas, pois, ao igualarmos as casas decimais, temos que os denominadores de ambos os decimais são iguais, e como temos uma divisão, um dos denominadores se tornará numerador, fazendo com que possamos aplicar a propriedade do elemento inverso, isto é, podemos cancelá-los.

Exemplos:

1. Resolva $2,5 : 0,05$.

Resolução:

$$2,5 : 0,05 = 2,5\cancel{0} : 0,05 = \frac{250}{100} : \frac{5}{100} = \frac{250}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

2. Resolva $2,5 : 0,05$.

Resolução:

$$4,5 : 0,02 = 4,5\cancel{0} : 0,02 = \frac{450}{100} : \frac{2}{100} = \frac{450}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{2} = \frac{450}{2} = 225$$

3. Resolva $2,5 : 0,05$.

Resolução:

$$3,93 : 1,2 = 3,93 : 1,2\cancel{0} = \frac{393}{100} : \frac{120}{100} = \frac{393}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{120} = \frac{393}{120} = 3,275$$

ATIVIDADES

1. Calcule:

a) $0,36 : 1,8$

b) $0,8 : (-0,02)$

c) $1,44 : 5$

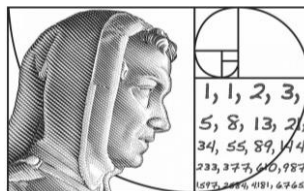
d) $0,81 : 2,25$

e) $62,9 : 2,7$

f) $60 : 0,002$

g) $1,21 : 2,5$

2. Explique como se deve dividir com números decimais e dê dois exemplos diferentes da atividade 1.



AULA 45

POTENCIAÇÃO COM NÚMEROS RACIONAIS



nesta aula estudaremos a potenciação de números racionais com expoente natural. Veremos que valem as mesmas regras de potenciação de números inteiros. Sendo assim, temos que:

- Se o expoente for par, a potência será sempre um número positivo.
- Se o expoente for ímpar, a potência terá sempre o mesmo sinal da base.

Exemplos:

$$1. (-0,2)^3 = (-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) = -0,008$$

$$2. (-0,3)^2 = (-0,3) \cdot (-0,3) = -0,09$$

$$3. \left(-\frac{1}{10}\right)^4 = \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) = 0,0001$$

POTÊNCIA DE EXPOENTE 1

Definição: Seja a um número racional qualquer, sempre que o expoente desse racional a for 1, o resultado será igual a base.

$$a^1 = a$$

Exemplos:

$$1. (-4)^1 = -4$$

$$2. (8,2)^1 = 8,2$$

$$3. \left(-\frac{5}{2}\right)^1 = -\frac{5}{2}$$

$$4. \left(\frac{1}{90}\right)^1 = \frac{1}{90}$$

POTÊNCIA DE EXPOENTE ZERO

Definição: Seja a um número racional, com $a \neq 0$, sempre que o expoente desse racional a for 0, o resultado será igual a 1.

$$a^0 = 1$$

Exemplos:

1. $(-2024)^0 = 1$

2. $(12,5)^0 = 1$

3. $\left(-\frac{41}{52}\right)^0 = 1$

MULTIPLICAÇÃO DE POTÊNCIAS DE MESMA BASE

Definição: Dada a multiplicação de potências de mesma base a tal que $a \in \mathbb{Q}$ e $b, c \in \mathbb{Z}$, o resultado se obtém conservando a base e somando os expoentes.

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

Exemplos:

1. $(2,6)^{10} \cdot (2,6)^5 \cdot (2,6)^{18} \cdot (2,6)^{31} = (2,6)^{10+5+18+31} = (2,6)^{64}$

2. $\left(-\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^9 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{4+5+9} = \left(-\frac{2}{5}\right)^{18}$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-13} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+(-7)+11+(-13)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$

DIVISÃO DE POTÊNCIAS DE MESMO EXPOENTE

Definição: Dada a divisão de potências de mesma base a tal que $a \in \mathbb{Q}$ e $b, c \in \mathbb{Z}$, o resultado se obtém conservando a base e subtraindo os expoentes.

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

ou

$$a^b : a^c = a^{b-c}$$

Exemplos:

1. $(-0,7)^6 : (-0,7)^5 = (-0,7)^{6-5} = (-0,7)^1 = -0,7$

2. $\left(\frac{7}{4}\right)^{15} : \left(\frac{7}{4}\right)^{20} = \left(\frac{7}{4}\right)^{15-20} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-5}$

3. $\frac{(1,4)^{-45}}{(1,4)^{-39}} = (1,4)^{-45-(-39)} = (1,4)^{-45+39} = (1,4)^{-6}$

POTÊNCIA DE UMA POTÊNCIA

Definição: Dada uma potência de base a e expoente b sendo elevada a um expoente c tal que $a \in \mathbb{Q}$ e $b, c \in \mathbb{Z}$, o resultado se obtém conservando a base e multiplicando os expoentes.

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

Exemplos:

$$1. [(-2,1)^6]^5 = (-2,1)^{6 \cdot 5} = (-2,1)^{30}$$

$$2. \left[\left(\frac{3}{8}\right)^4\right]^5 = \left(\frac{3}{8}\right)^{4 \cdot 5} = \left(\frac{3}{8}\right)^{20}$$

$$3. [(-4)^{-14}]^{-20} = (-4)^{(-14) \cdot (-20)} = (-4)^{280}$$

MULTIPLICAÇÃO DE POTÊNCIAS DE MESMO EXPOENTE

Definição: Dada uma multiplicação de potências de mesmo expoente c tal que $a, b \in \mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{Z}$, o resultado se obtém multiplicando as bases e conservando o expoente.

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

Exemplos:

$$1. (0,02)^{100} \cdot (0,5)^{100} = (0,02 \cdot 0,5)^{100} = 0,01^{100}$$

$$2. (0,7)^{22} \cdot (1,5)^{22} = (0,7 \cdot 1,5)^{22} = 1,05^{22}$$

$$3. \left(\frac{1}{8}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^4 = \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{7}{9}\right)^4 = \left(\frac{7}{72}\right)^4$$

$$4. \left(\frac{2}{5}\right)^{12} \cdot \left(\frac{15}{22}\right)^{12} = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{22}\right)^{12} = \left(\frac{30}{110}\right)^4 = \left(\frac{3}{11}\right)^4$$

DIVISÃO DE POTÊNCIAS DE MESMO EXPOENTE

Definição: Dada uma divisão de potências de mesmo expoente c tal que $a, b \in \mathbb{Q}$ e $c \in \mathbb{Z}$, o resultado se obtém dividindo as bases e conservando o expoente.

$$a^c : b^c = (a : b)^c$$

ou

$$\frac{a^b}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

Exemplos:

$$1. (-3,5)^8 : (5)^8 = (-3,5 : 5)^8 = -0,7^8$$

$$2. \left(\frac{1}{4}\right)^{25} : \left(\frac{1}{3}\right)^{25} = \left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^{25} = \left(\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{1}\right)\right)^{25} = \left(\frac{3}{4}\right)^{25}$$

$$3. \frac{0,4^{13}}{0,08^{13}} = \left(\frac{0,4}{0,08}\right)^{13} = 5^{13}$$

EXPOENTE INTEIRO NEGATIVO

Por enquanto não fizemos nenhum cálculo envolvendo expoentes negativos, apenas aplicamos as propriedades das potências. Agora, iremos definir como resolver as potências racionais com expoente negativo.

Definição: Seja a um número racional, com $a \neq 0$, sempre que o expoente desse racional a for $-n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o resultado invertendo a base, o expoente será positivo.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n}$$

Exemplos:

$$1. 5^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$$

$$2. 8^{-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1^2}{8^2} = \frac{1}{64}$$

$$3. \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{7^2}{2^2} = \frac{49}{4}$$

$$4. (0,2)^{-3} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{2}\right)^3 = \frac{10^3}{2^3} = \frac{1000}{8} = 125$$

Observação: Note que, para indicar uma potência com expoente inteiro negativo, escreve-se o inverso da base e muda-se o sinal do expoente.

Depois de estudarmos as propriedades das potências de base racional, vejamos alguns exemplos de expressões numéricas envolvendo potências de base racionais.

Exemplos:

$$1. \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) = \left(-\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) = 0$$

$$2. (0,5) \cdot (0,2)^2 - (0,5)^4 = (0,5) \cdot (0,04) - 0,0625 = 0,02 - 0,0625 = -0,0425$$

ATIVIDADES

1. Escreva o valor de:

a) $\left(-\frac{1}{10}\right)^3$

b) $\left(-\frac{5}{24}\right)^0$

c) $(0,2)^5$

d) $(1,6)^2$

e) $(-8,1)^2$

f) $(7,75)^0$

2. Reduza a uma só potência as expressões:

a) $(4,3)^5(4,3)^7$

b) $\left(-\frac{1}{4}\right)^9 : \left(-\frac{1}{4}\right)^3$

c) $[(-1,2)^2]^4$

d) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 \left(\frac{2}{7}\right)^{13} \left(\frac{2}{7}\right)^{42}$

3. Calcule o valor das expressões numéricas abaixo:

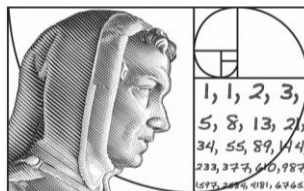
a) $\left(-\frac{7}{9}\right) : \left(-\frac{7}{6}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)^2$

b) $(-2)^3 - (-0,5)^3$

c) $(-2)^2 - (-0,5)^2$

4. Calcule o valor de x na expressão $x = (0,8) : (-0,2)^2 + (-2,7) : (-0,3)^2$.

5. Sendo $x = 3^{-1}$, $y = 6^{-1}$ e $z = 9^{-1}$, calcule o valor da expressão $y + z - x$.



AULA 50

AS VARIÁVEIS E AS EXPRESSÕES NUMÉRICAS



esta aula, estudaremos as variáveis e as expressões algébricas.

Primeiramente iremos estudar o conceito de variável.

Definição: Variável são as letras de uma expressão algébrica e que podem assumir diferentes valores, conforme a situação.

Exemplos:

1. A idade é variável, pois ela muda todo ano.
2. A metade de um número é uma variável, pois podemos encontrar diferentes valores dependendo do número ao qual queremos encontrar sua metade.
3. O quadrado de um número é uma variável, pois podemos encontrar diferentes valores dependendo do número ao qual queremos elevar ao quadrado.
4. A soma de um número com o seu sucessor é uma variável, pois podemos encontrar diferentes valores dependendo de qual número queremos somar com o seu sucessor.

Como as variáveis passaram a ser escritas com as últimas letras do alfabeto depois do século XVII, agora iremos representar os exemplos acima através de variáveis.

Exemplos:

1. Minha idade = x .
2. A metade de um número = $\frac{a}{2}$.
3. O quadrado de um número = y^2 .
4. A soma de um número com seu sucessor = $z + (z + 1)$.

Observação: Podemos representar as variáveis por qualquer letra.

Pela primeira vez iremos nos deparar com expressões matemáticas que contenham letras. Para isso, devemos primeiramente aprender a transliterar as sentenças da língua portuguesa para a linguagem matemática, isto é, devemos escrever as sentenças da língua portuguesa que aparecem nos enunciados como expressões envolvendo números, letras, operações e definições matemáticas.

Exemplos:

1. Transliteração da língua portuguesa para a linguagem matemática envolvendo números e operações.

Língua Portuguesa	Linguagem Matemática
O produto entre cinco e sete	$5 \cdot 7$
O quádruplo de nove	$4 \cdot 9$
A terça parte de oito	$8 : 3$ ou $\frac{8}{3}$
A metade de onze	$11 : 2$ ou $\frac{11}{2}$
A soma de sete quartos e três décimos	$\frac{7}{4} + 0,3$
O quociente entre vinte e quatro e cinco	$24 : 5$

2. Transliteração da língua portuguesa para a linguagem matemática envolvendo variáveis.

Língua Portuguesa	Linguagem Matemática
O triplo de um número	$3 \cdot x$
Um número acrescido de duas unidades	$x + 2$
Metade de um número	$x : 2$ ou $\frac{x}{2}$ ou $x \cdot \frac{1}{2}$
A soma da metade de um número com a quinta parte dele	$\frac{x}{2} + \frac{x}{5}$
A soma de dois números	$x + y$
O produto de dois números	$x \cdot y$

Definição: Expressões algébricas são todas as expressões que envolvem números, letras e operações.

Pela definição temos que todas as expressões que apresentam números, letras e operação são chamadas de expressões algébricas. As letras nas expressões algébricas são chamadas de variáveis, pois, podem assumir diferentes valores.

As expressões algébricas nos ajudam a generalizar muitos casos dentro da matemática, pois a letra como uma variável, nos auxilia a generalizar os casos e não apenas, os casos específicos numéricos.

Observação: A álgebra é muito utilizada para generalizar a aritmética, isto é, utilizamos a álgebra para estabelecermos regras, propriedades e demonstrações matemáticas, pois com o uso das letras, as regras, propriedades e demonstrações se aplicam para todo e qualquer número.

Exemplos:

1. Números Pares = $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$. Como a tabuada do número 2 representa todos os números pares, podemos generalizar e escrever o número par como sendo $2 \cdot x$, sendo x um número natural.

2. Números Ímpares = $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots\}$. Como os números ímpares são sucessores dos números pares podemos generalizar e escrever o número ímpar como sendo $2 \cdot x + 1$, sendo x um número natural.

3. A soma de dois números pares é um número par.

Resolução: Utilizando a álgebra e representando o número par por $2 \cdot x$ e $2 \cdot y$, temos que:

$$(2 \cdot x) + (2 \cdot y) = \underbrace{2 \cdot (x + y)}_{\text{Número Par}}$$

4. A soma de dois números ímpares é um número par.

Resolução: Utilizando a álgebra e representando o número ímpar por $2 \cdot x + 1$ e $2 \cdot y + 1$, temos que:

$$(2 \cdot x + 1) + (2 \cdot y + 1) = 2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 = \underbrace{2 \cdot (x + y + 1)}_{\text{Número Par}}$$

Para verificarmos se as generalizações estão corretas, basta substituímos as letras por valores numéricos, e se existir algum contraexemplo, essas generalizações não são verdadeiras, isto é, se algum número não satisfizer aquela generalização, ela será falsa.

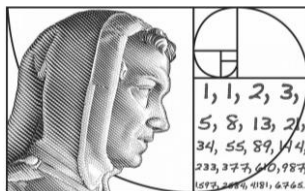
Ao substituímos as variáveis por números, estamos transformando essa expressão algébrica em uma expressão numérica, pois a expressão algébrica assumirá um valor numérico.

ATIVIDADES

1. Transforme as sentenças escritas em linguagem matemática:

- a) A soma de dois números.
- b) O quádruplo de um número.
- c) O produto de dois números.
- d) O quociente de dois números.
- e) Um número subtraído de três.
- f) Três subtraído de um número.
- g) A soma de cinco com o triplo de um número.
- h) Metade de um número.
- i) A quinta parte de um número.
- j) A terça parte de um número.

- k)** O produto de um número pela sua terça parte.
 - l)** A soma de um número e sua metade.
 - m)** A soma de três números.
 - n)** O produto de três números.
- 2.** O que é uma expressão algébrica?
- 3.** Tente generalizar:
- a)** A soma de um par e um ímpar.
 - b)** O produto de dois números pares.
 - c)** O produto de dois números ímpares.
 - d)** O produto de um número par e um número ímpar.



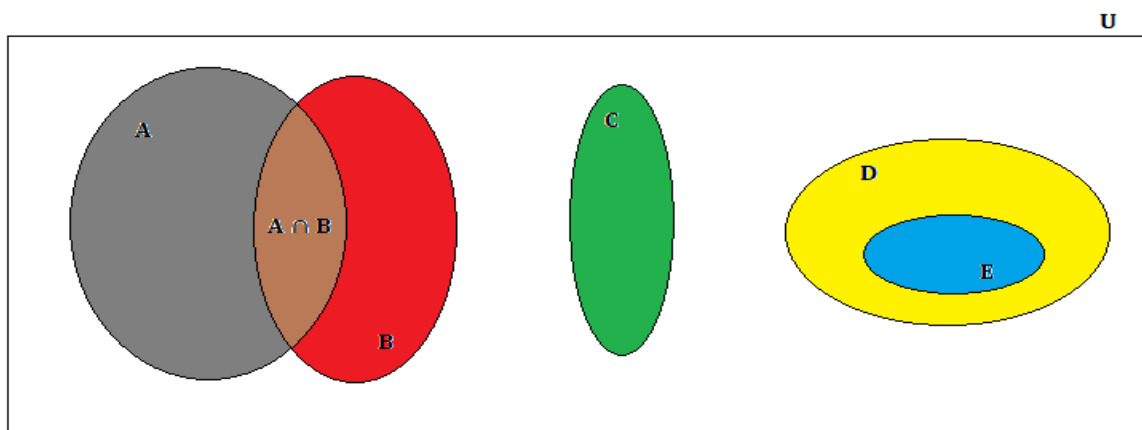
AULA 56

CONJUNTO UNIVERSO E CONJUNTO SOLUÇÃO

Nesta aula, estudaremos dois conjuntos importantes para o conteúdo das equações: o conjunto universo e o conjunto solução.

CONJUNTO UNIVERSO

Definição: O conjunto universo é o conjunto de todos os valores que a variável pode assumir e é representado pela letra U .



Assim, se estivermos resolvendo um problema cuja solução seja um número racional, o conjunto universo é $\mathbb{Q}$. Se a solução for do conjunto dos inteiros, o conjunto universo será $\mathbb{Z}$.

Com isso, para resolver uma equação, é fundamental fixar o conjunto universo U em que se estiver trabalhando:

Exemplos:

1. O conjunto universo é $U = \mathbb{Z}$, desta forma, podemos ter como solução qualquer número que seja inteiro.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 6\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. O conjunto universo é $U = \mathbb{Z}$, desta forma, se tivermos como solução um número racional, o conjunto solução será vazio, já que o conjunto universo só aceita números inteiros.

$$S = \{ \quad \}$$

CONJUNTO SOLUÇÃO

Definição: o conjunto solução são os valores que as variáveis podem assumir para que dada igualdade seja verdadeira.

Exemplos:

1. Seja a equação $2x + 8 = 12$, o conjunto solução desta igualdade são os valores que x pode assumir para que esta igualdade seja verdadeira. Desta forma, temos como solução o número 2 e escrevemos a solução como $S = \{2\}$.

2. Na igualdade $3x - 4 = 7$, o conjunto solução é $S = \left\{\frac{11}{3}\right\}$, porque o único valor que x pode assumir na igualdade é $\frac{11}{3}$.

ATIVIDADES

1. Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações:

a) $x - 7 = 0, U = \mathbb{N}$

b) $x + 9 = 0, U = \mathbb{Z}$

c) $x - \frac{3}{8} = 0, U = \mathbb{Q}$

d) $x + 1 = 0, U = \mathbb{N}$

e) $x - 10 = 3, U = \mathbb{Q}$

f) $x - 6 = -10, U = \mathbb{Q}$

g) $2x = -16, U = \mathbb{Z}$

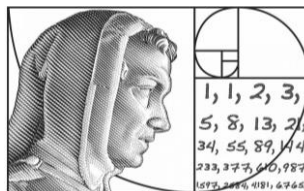
h) $4x = -40, U = \mathbb{Q}$

i) $8x = -8, U = \mathbb{Z}$

j) $8x = -8, U = \mathbb{Q}$

k) $\frac{x}{3} = 4, U = \mathbb{N}$

l) $x + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, U = \mathbb{Q}$



AULA 60

EQUAÇÕES EQUIVALENTES



esta aula estudaremos as equações equivalentes e, para isso, vamos primeiro definir essas equações.

Definição: duas equações que apresentam o mesmo conjunto solução são chamadas **equações equivalentes**.

Exemplos:

1. As equações $x + 3 = 13$ e $x - 2 = 12$ são equações equivalentes, porque possuem o mesmo conjunto solução, que no caso é $S = \{10\}$.

2. Obtenha uma equação equivalente a $4x + 15 = 5x + 10$.

Resolução: Um jeito de encontrar uma equação equivalente é encontrar a raiz desta equação.

$$4x + 15 = 5x + 10$$

$$4x + \cancel{15 - 15} = 5x + 10 - 15$$

$$4x - 5x = \cancel{+5x - 5x} - 5$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

Logo, uma equação equivalente a $4x + 15 = 5x + 10$ é $x = 5$. Todas as equações que possuem $S = \{5\}$ são equivalentes a $4x + 15 = 5x + 10$.

ATIVIDADES

1. Considerando os pares de equações em cada item, verifique se são ou não equivalentes.

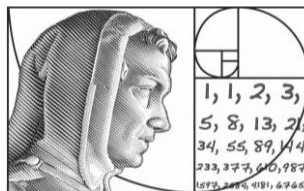
a) $x + 4 = 7$ e $x = 7 - 4$

b) $x + 2 = 9$ e $x = 7$

- c) $x - 5 = 0$ e $x = -5$
- d) $2x = 18$ e $x = 9$
- e) $5x = -15$ e $x = 3$
- f) $x - 1 = -3$ e $x = -2$
- g) $4x = 16$ e $x = 4$
- h) $x + 2 = -5$ e $x = -7$

2. Usando os princípios de equivalência, escreva, na forma mais simples possível, uma equação equivalente a cada uma das seguintes equações:

- a) $x + 2 = 5$
- b) $x - 11 = 0$
- c) $x - 11 = 0$
- d) $x - 2 = -1$
- e) $6x = 6$
- f) $4x = 3x + 9$
- g) $3x = 7$
- h) $5x + 1 = 16$
- i) $\frac{x}{4} = \frac{3}{10}$
- j) $10x - 2 = 7x$
- k) $6x + 5 = 6$
- l) $8x + 4 = 0$



AULA 64

AVALIAÇÃO

1. A soma de três números inteiros consecutivos é igual a 96. Determine o valor dos números.

2. Somando 8 anos ao dobro da idade de Mateus, obtemos 32 anos. Qual é a idade de Mateus?

3. Bernardo tem em seu bolso apenas moedas de 10, 25 e 50 centavos, no total de quarenta e duas moedas. Sabe-se ainda que o número de moedas de 25 centavos é menor em 5 unidades em relação ao número de moedas de 50 centavos, e que o número de moedas de 10 centavos excede em 8 unidades as de 50 centavos. Qual é a quantia, em reais, que Bernardo tem no bolso?

4. Subtrair 3 anos do triplo da idade de Rodrigo é igual a adicionar 5 anos ao dobro da idade dele. Que idade tem Rodrigo?

5. Fábio coleciona selos. O número de selos que Fábio tem, acrescido de 20, é o dobro do número de selos que ele possui. Quantos selos há na coleção de Fábio?

6. Metade da distância de São Paulo a Belo Horizonte, mais 15 km, é igual à distância entre São José dos Campos e o Rio de Janeiro, que é de 300 km. Qual é a distância de São Paulo a Belo Horizonte?

7. Pedro pediu a seu primo Carlos que pensasse em um número e, a seguir, fizesse as seguintes operações:

1º Adicionasse 40 ao número pensado.

2º Multiplicasse por 5 o resultado obtido.

3º Dividissemos por 2 o novo resultado.

Ao término dessas operações, Carlos encontrou 120 como resultado. Que número Carlos pensou?

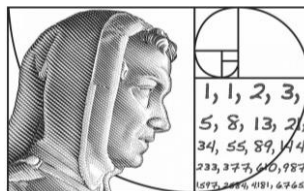
8. Um número somado à sua quarta parte é igual a 80. Qual é esse número?

9. Quatro amigos se reuniram para comer numa lanchonete. A conta, de R\$ 52,00, foi paga da seguinte forma: Vicente pagou mais R\$ 2,00 que Rubens; Rubens pagou mais R\$ 3,50 que Laerte; Laerte pagou a metade do que Valter pagou.

a) Quem pagou a maior quantia? Quanto foi?

b) Quem pagou a menor quantia? Quanto foi?

10. Três números consecutivos somam -72 . Quais são esses três números?



AULA 65

RAZÕES



esta aula, estudaremos o conceito de razão.

Primeiramente iremos estudar a etimologia da palavra razão.

A palavra razão deriva do latim *ratio* e pode significar “cálculo, medida, divisão”.

O conceito de razão é um conceito primitivo. Como exemplo podemos encontrar esse conceito em uma passagem do livro do Êxodo.

“Para o segundo lado do tabernáculo, ao norte, farás vinte tábuas, com quarenta suportes de prata, à razão de dois por tábua.” Ex 26, 20-21

A razão de dois por tábua nessa passagem, significa que deveriam colocar dois suportes de prata para cada tábua. Desta forma, temos a razão de dois para um e podemos representar da seguinte forma:

$$\frac{\text{Suportes de Prata}}{\text{Tábua}} = \frac{2}{1}$$

Veremos que na matemática, o conceito de razão está totalmente ligado, à divisão. Desta forma, ao dividirmos um valor por outro, acabamos realizando uma comparação entre o primeiro valor e o segundo, como veremos ao longo do nosso estudo.

Definição: a razão de dois números é o quociente do primeiro pelo segundo.

Exemplos:

1. A razão de 5 para 10 é $\frac{5}{10}$, que é igual a $\frac{1}{2}$.
2. A razão de 10 para 5 é $\frac{10}{5}$, que é igual a 2.
3. A razão de 8 para 12 é $\frac{8}{12}$, que é igual a $\frac{2}{3}$.
4. A razão de 7 para 15 é $\frac{7}{15}$.

Observação: Lê-se: “7 está para 15”.

Observação: A razão $\frac{7}{15}$ pode ser indicada por 7 : 15.

Os termos de uma razão recebem nomes especiais: o numerador é chamado de antecedente e o denominador de consequente.

Exemplos:

1. Na razão $\frac{2}{9}$ temos que o número 2 é chamado de antecedente e o número 9 é chamado de consequente.

2. Na razão $\frac{12}{23}$ temos que o número 12 é chamado de antecedente e o número 23 é chamado de consequente.

3. Na razão $\frac{1}{5}$ temos que o número 1 é chamado de antecedente e o número 5 é chamado de consequente.

Como estudamos álgebra no volume anterior, agora podemos representar a notação de razão de uma forma generalizada.

$$\frac{a}{b} = k \quad \text{ou} \quad a : b = k$$

Lê-se: razão de “a” para “b”. Nesse caso, k é o quociente entre a e b .

ATIVIDADES

1. Qual é a definição de razão na matemática?

2. Substitua o valor de x , de tal forma que a razão entre a e b esteja correta:

a	6	8	- 1,2	x	x	x
b	3	x	x	- 5	- 9	8
$\frac{a}{b}$	x	4	0,5	3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

3. Calcule a razão:

a) De 3 para 9.

c) De 2 para $\frac{1}{3}$.

e) 1,25 e 0,25.

b) De 18 para 6.

d) De $\frac{1}{2}$ para $\frac{1}{4}$.

f) 4 e 2,5.

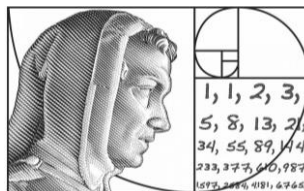
g) 1,4 e - 2,1.

4. A razão entre dois números é $\frac{7}{3}$, e o menor deles é 9. Qual é o maior?

5. A razão de um número x para um número y é 2. Qual é a razão de y para x ?

6. Os números a e b são racionais positivos e $6a = 10b$. Determine a razão de a para b .

7. Certo refrigerante é vendido por R\$ 1,40, em latas de 350 ml, e por R\$ 3,50, em garrafas de 1500 ml. Qual das duas embalagens é mais econômica para o consumidor?



AULA 71

PROPRIEDADES DAS PROPORÇÕES



esta aula, iniciaremos o estudo das propriedades das proporções.

As proporções possuem cinco propriedades que foram divididas em duas partes. A primeira parte compõe três propriedades das proporções, que estudaremos ao longo desta aula, e as outras duas propriedades serão estudadas na próxima aula.

1ª PROPRIEDADE

Em uma proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o 2º termo, assim como a soma dos dois últimos está para o 4º termo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Se (a, b, c, d) é proporcional, então $(a+b, b, c+d, d)$ também é proporcional.

Demonstração: Sabendo que nossa quádrupla é uma proporção, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Adicionando 1 a cada membro da primeira proporção, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + 1 &= \frac{c}{d} + 1 \\ \frac{a}{b} + \frac{b}{b} &= \frac{c}{d} + \frac{d}{d} \\ \frac{a+b}{b} &= \frac{c+d}{d} \end{aligned}$$

Portanto, a quádrupla $(a+b, b, c+d, d)$ é proporcional.

Observação: Essa propriedade vale também, para o seguinte enunciado: A soma dos dois primeiros termos está para o 1º termo, assim como a soma dos dois últimos termos está para o terceiro.

Exemplos:

1. Verifique a 1ª propriedade para a quádrupla $(2, 5, 8, 20)$ proporcional.

Resolução: Aplicando a 1ª propriedade, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} &= \frac{8}{20} \\ \frac{2+5}{5} &= \frac{8+20}{20} \\ \frac{7}{5} &= \frac{28}{20}\end{aligned}$$

Aplicando o P.F.P., temos que:

$$\begin{aligned}\frac{7}{5} &= \frac{28}{20} \\ 7 \cdot 20 &= 5 \cdot 28 \\ 140 &= 140\end{aligned}$$

Portanto, a quádrupla $(2 + 5, 5, 8 + 20, 20)$ é proporcional.

2ª PROPRIEDADE

Em uma proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 2º termo, assim como a diferença dos dois últimos está para o 4º termo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Se (a, b, c, d) é proporcional, então $(a-b, b, c-d, d)$ também é proporcional.

Demonstração: Sabendo que nossa quádrupla é uma proporção, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Subtraindo 1 a cada membro da primeira proporção, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} - 1 &= \frac{c}{d} - 1 \\ \frac{a}{b} - \frac{b}{b} &= \frac{c}{d} - \frac{d}{d} \\ \frac{a-b}{b} &= \frac{c-d}{d}\end{aligned}$$

Portanto, a quádrupla $(a-b, b, c-d, d)$ é proporcional.

Observação: Essa propriedade vale também, para o seguinte enunciado: A subtração dos dois primeiros termos está para o 1º termo, assim como a subtração dos dois últimos termos está para o terceiro.

Exemplos:

1. Verifique a 2ª propriedade para a quádrupla (3, 6, 15, 30) proporcional.

Resolução: Aplicando a 2ª propriedade, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{3}{6} &= \frac{15}{30} \\ \frac{3+6}{6} &= \frac{15+30}{30} \\ \frac{9}{6} &= \frac{45}{30}\end{aligned}$$

Aplicando o P.F.P., temos que:

$$\begin{aligned}\frac{9}{6} &= \frac{45}{30} \\ 9 \cdot 30 &= 6 \cdot 45 \\ 270 &= 270\end{aligned}$$

Portanto, a quádrupla (3 + 6, 6, 15 + 30, 30) é proporcional.

3ª PROPRIEDADE

Em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Demonstração: Sabendo que nossa quádrupla é uma proporção, temos a seguinte igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Permutando os meios, temos que:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\ \frac{a}{c} &= \frac{b}{d}\end{aligned}$$

Aplicando a 1ª propriedade, temos que:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$$

Permutando os meios, temos que:

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Portanto, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Exemplos:

1. Verifique a 3ª propriedade para a quádrupla (1, 4, 12, 48) proporcional.

Resolução: Aplicando a 3ª propriedade, temos que:

$$\frac{1}{4} = \frac{12}{48}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{12}{48} = \frac{1+12}{4+48}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{12}{48} = \frac{13}{52}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{13}{52}$$

Aplicando o P.F.P., temos que:

$$\frac{1}{4} = \frac{13}{52}$$

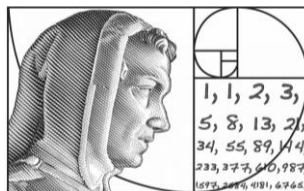
$$1 \cdot 52 = 4 \cdot 13$$

$$52 = 52$$

Portanto, a 3ª propriedade é válida para a quádrupla (1, 4, 12, 48) proporcional.

ATIVIDADES

1. Enuncie e demonstre a 1ª propriedade.
2. Verifique a 1ª propriedade nas seguintes proporções:
 - a) (1, 2, 10, 20)
 - b) (1, 5, 25, 125)
 - c) (4, 5, 48, 60)
 - d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$
3. Enuncie e demonstre a 2ª propriedade.
4. Verifique a 2ª propriedade nas seguintes proporções:
 - a) (1, 2, 10, 20)
 - b) (1, 5, 25, 125)
 - c) (4, 5, 48, 60)
 - d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$
5. Enuncie e demonstre a 3ª propriedade.
6. Verifique a 3ª propriedade nas seguintes proporções:
 - a) (1, 2, 10, 20)
 - b) (1, 5, 25, 125)
 - c) (4, 5, 48, 60)
 - d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$
7. Demonstre que, se a seguinte quádrupla x, y, a, b é proporcional, então $x, x + y, a, a + b$ também será proporcional. Depois substitua x, y, a e b por números proporcionais e verifique o que acabou de demonstrar.
8. Demonstre que, se a seguinte quádrupla x, y, a, b é proporcional, então $x, x - y, a, a - b$ também será proporcional. Depois substitua x, y, a e b por números proporcionais e verifique o que acabou de demonstrar.
9. Em uma conferência de padres da América, a razão entre brasileiros e estrangeiros era de $7 : 9$. Se havia 80 pessoas nessa conferência, quantos eram brasileiros?
10. Em um parque de diversões, a razão entre adultos e crianças era de $5 : 7$. Se há mais 226 crianças do que adultos, quantas pessoas temos ao todo no parque?
11. A razão entre a idade de Pedro e a de seu pai é igual a $\frac{2}{9}$. Se a soma da idade dos dois é igual a 55 anos, qual é a idade de Pedro?
12. A proporção entre as medalhas de ouro, de prata e de bronze de um atleta é $3 : 4 : 7$, respectivamente. Quantas medalhas de ouro, de prata e de bronze se espera que esse atleta obtenha em 70 jogos, se essa proporção se mantiver e ele conquistar medalhas em todos os jogos?



AULA 73

PROPORÇÃO MÚTIPLA

Nesta aula, estudaremos o conceito da proporção múltipla.

Definição: Denominamos proporção múltipla uma série de razões iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Exemplos:

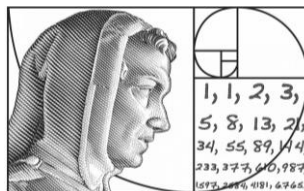
1. $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15}$ é uma proporção múltipla.
2. $\frac{1}{8} = \frac{7}{56} = \frac{10}{80}$ é uma proporção múltipla.
3. $\frac{3}{7} = \frac{30}{70} = \frac{300}{700}$ é uma proporção múltipla.
4. $\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = \frac{140}{700}$ é uma proporção múltipla.

Dada a série de razões iguais $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, utilizando a 3ª e a 4ª propriedade, temos os seguintes resultados:

1. $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$
2. $\frac{a+c-e}{b+d-f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$
3. $\frac{a-c+e}{b-d-f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$
4. $\frac{a-c-e}{b-d-f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

ATIVIDADES

1. Defina proporção múltipla e dê dois exemplos.



AULA 77

REGRA DE TRÊS SIMPLES – PARTE II



esta aula, daremos continuidade no estudo da regra de três simples, analisando problemas de grandezas inversamente proporcionais.

Os mesmos passos que utilizamos na aula passada para resolvermos problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais através da regra de três simples, iremos utilizar para resolvermos problemas envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Vamos relembrar os passos estudados na última aula.

1º passo: Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2º passo: Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

3º passo: Montar a proporção e resolver a equação.

Exemplos:

1. Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400 Km/h , faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade utilizada fosse de 480 km/h ?

Resolução: Primeiramente iremos montar a tabela:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
400	3
480	x

Essas duas grandezas são inversamente proporcionais, pois, se aumentarmos a velocidade do trem, o tempo do percurso será menor.

Dessa forma, podemos inverter os valores da velocidade para montarmos a proporção.

Montando a proporção, temos que:

$$\frac{480}{400} = \frac{3}{x}$$

$$480x = 400 \cdot 3$$

$$x = \frac{1200}{480}$$

$$x = 2,5$$

Portanto, o tempo desse percurso seria de 2,5 horas ou 2 horas e 30 minutos.

Observação: Podemos realizar a conta envolvendo grandezas inversamente proporcionais apenas multiplicando os números na horizontal ao invés de multiplicá-los em cruz.

$$400 \cdot 3 = 480 \cdot x$$

$$480x = 1200$$

$$x = \frac{1200}{480}$$

$$x = 2,5$$

2. Uma equipe de operários, trabalhando 8 horas por dia, realizou determinada obra em 20 dias. Se o número de horas de serviço for reduzido para 5 horas por dia, em que prazo essa equipe fará o mesmo trabalho?

Resolução: Primeiramente iremos construir a tabela:

Horas por dia	Prazo para término (<i>dias</i>)
8	20
5	x

Essas duas grandezas são inversamente proporcionais, pois, ao diminuirmos a quantidade de horas trabalhadas por dia, iremos precisar de um prazo maior para completar a obra.

Montando a proporção através da multiplicação na diagonal, temos que:

$$\frac{1,2}{1,5} = \frac{400}{x}$$

$$8 \cdot 20 = 5 \cdot x$$

$$160 = 5x$$

$$x = \frac{160}{5}$$

$$x = 32$$

Portanto, para o serviço de 5 horas por dia, precisará de um prazo de 32 dias para concluir a obra.

ATIVIDADES

1. Antigamente, o trajeto São Paulo-Rio podia ser feito por trem. À velocidade constante de 50 km/h , o trem fazia essa viagem em 8 horas. Se ele desenvolvesse a velocidade de 80 km/h , em quanto tempo faria o mesmo trajeto?

2. Para construir um telhado, cinco homens levam 20 dias. Quanto tempo um conjunto de oito homens, com a mesma capacidade de serviço, levaria para construir este telhado?

3. Um navio foi abastecido com comida suficiente para alimentar 14 pessoas durante 45 dias. Se 18 pessoas embarcarem nesse navio, para quantos dias, no máximo, as reservas de alimento serão suficientes?

4. Dez pessoas realizam um trabalho em 15 dias. Qual é o número de dias em que seis pessoas, com igual força de trabalho, fariam o mesmo trabalho?